数 学 年 刊
3 (1) 1982

一类具非正则奇性的拟微分算子的局部可解性和奇性传播

仇 庆 久
(南京大学)

近年来已有许多人对具重特征的正则奇性拟微分算子进行研究；尤其对Fuchs型方程更有了较多的结果[1,2]. 但是对非正则奇性的情况讨论甚少. 本文研究一类具重特征的非正则奇性双曲拟微分算子. 根据此类算子的特性，可以微局部地化简为非Fuchs型的情况；即如下形式的算子

$$P=t^m\frac{\partial}{\partial t}-B(x,\ t,\ D_x,\ D_t)\quad (B\in L^0_{1,0},\ m>1\ \text{是正整数}). \tag{1}$$

对于算子(1)，我们要在重特征点附近研究它的局部可解性和奇性传播情况. 为此先注意:

第一，此算子的奇性集中体现在第一项中自变量 t 上. 因此考虑 B 只依赖于 x, D_x 的情形就可能得到此算子的最基本的信息；而此时却可以减少大量复杂的运算. 所以，本文仅讨论此种情形.

第二，在 $t=0$ 附近，由于 m 的奇偶性不同，算子也将具不同的性状. 但是讨论的方法可同时适用于这两种情形. 为确定起见，本文仅研究是奇数的情形. 此时算子呈如下形状

$$P=t^{2N+1}\frac{\partial}{\partial t}-(2N)B(x,\ D_x)\quad (B\in L^0_{1,0},\ N\geqslant 1\ \text{的正整数}). \tag{2}$$

第三，为使上述算子具有局部可解性，对 B 必须加上适当的限制条件. 在本文中提出如下假设条件：在重特征点附近有

$$\mathrm{Re}(b_0(x,\ \xi))<0, \tag{3}$$

此中 b_0 是 $B(x,\ D_x)$ 的主象征.

本文分三个部分. 第一部分利用微局部分析把所考虑的拟微分算子化简为非Fuchs型算子(1). 第二部分利用一种新的象征类得到(2)的右拟基本解，并得到此右拟基本解的波前集. 以上计算是较为繁杂的，它们已在文[3]中详述. 因此，在本文中只列出有关结论及主要过程. 在第二部分的后半部分建立(2)的左拟基本解以及它的波前集. 然后，利用第二部分内容，就可以证明(2)的 C_0^∞ 局部可解性并讨论相应解的奇性传播. 有关这方面的内容将在第三部分中讨论.

本文1980年5月2日收到.

一、

在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中考虑开集 $X\times T$(其中任意一点的坐标是 $(x^1, \cdots, x^n, t)$, 简记为 (x, t)). 用 $L_C^m(X\times T)$ 表示由经典拟微分算子所成的空间. 因而此空间中任一元素 $A(x, t, D_x, D_t)$ 必属于 $L_{1,0}^m(X\times T)$, 且它的全象征 $a(x, t, \xi, \tau)$ 有渐近展式

$$a(x, t, \xi, \tau)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x, t, \xi, \tau),$$

其中 $a_j\in S_{1,0}^{m-j}$.

取 $P_j\in L_C^{m_j}(X\times T)\ (j=1, 2)$, $Q\in L_C^{m_1+m_2-1}(X\times T)$. 设 P_j 的主象征 $p_j(j=1, 2)$ 均是实的. 考虑

$$P=P_1P_2+Q. \tag{4}$$

假设 p_1 和 p_2 在 z_0: $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)\in T^*(X\times T)\setminus\{0\}$ 点满足如下条件:

1 $p_1(z_0)=0=p_2(z_0)$,

2 $\nabla_{(\xi,\tau)}p_2(z_0)\neq 0$; 即 p_2 在 z_0 点是主型的,

3 记 $S_k(z)=\{p_2, S_{k-1}\}$, $S_0(z)=p_1(k=1, \cdots, m)$, 则

$$S_k(z)=\begin{cases}0, & k=1, 2, \cdots, m-1,\\ \neq 0, & k=m,\end{cases}$$

其中 m 是大于 1 的自然数; $\{,\}$ 是 Poisson 括号.

4 在 z_0 的某锥邻域内, 存在一个 $-m_1$ 阶椭圆算子 $E\in L_C^{-m_1}$, 使得在此邻域内 $h_m(z)=$ 常数, 而 $h_k(z)|_{h_{m-1}(z)=0}=0(k=0, \cdots, m-2)$. 此处 $h_k(z)\equiv\{p_2, h_{k-1}(z)\}, \cdots, h_0(z)\equiv ep_1$; e 是 E 的实主象征.

上述条件 1 和条件 2 表明(4)中算子 P 是一类带有实主象征且在 z_0 点具重特征的拟微分算子. 条件 3 刻划了这类算子的特性; 由条件 3 有 $\{p_2, p_1\}(z_0)=0$, 但 Hamilton 矢量场 H_{p_1} 和 H_{p_2} 在 z_0 点仍可能线性相关. 因此此类算子与一般的"对合"算子十分不同. 另外, 当 $m=1$ 时, 可由条件 3 推得条件 4[4], 但当 $m>1$ 时, 由条件 3 只能推知存在 z_0 的一个锥邻域, 使得在其内 $h_m(z)\neq 0$. 所以条件 4 是条件 3 的强化.

在上述条件下先用适当的椭圆算子相乘. 这种乘法并不影响对局部可解性及奇性传播等问题的研究; 但相乘的结果都可把 P_1 和 P_2 分别降为零阶和 1 阶, 且它们仍满足如上的条件 1—3. 而条件 4 中的椭圆算子 E 可降为零阶. Q 同时也降为零阶. 然后根据条件 4, 由齐次 Darboux 定理得到一个齐次典则变换, 在此变换下 p_1 和 p_2 分别变换为 t'^m 和 τ'(设该齐次典则变换: $(x, t, \xi, \tau)\mapsto(x', t', \xi', \tau')$). 另一方面, 相应于这个典则变换, 存在一个适当支撑的椭圆 Fourier 积分算子. 于是, 用 Егоров 相似定理, 算子(4)在 z_0 附近可微局部地化简为相应地在 z_0': $(x_0', 0, \xi_0', 0)$ 附近呈如下形式的算子

$$t'^m\frac{\partial}{\partial t'}-B(x', t', D_{x'}, D_{t'}),\ B\in L_C^0,$$

此处, z_0' 是 z_0 在上述典则变换下的象点.

大家知道, 典则变换同样也不影响对局部可解性及奇性传播等问题的讨论. 所以, 通过上述微局部化简, 我们就可集中注意于在 $(x_0, 0, \xi_0, 0)$ 附近讨论非 Fuchs 型的拟微分

算子(1).

现在对条件 4 作一简单的说明. 上面已提到, 条件 4 是条件 3 的加强. Malgrange 予备定理启示我们, 仅有条件 1—3 似乎不大可能把算子(4)微局部地化简为(1)的形式. 而条件 4 也只是由(4)化简成(1)的一个充分条件. 在[3]中提出了可用一个较弱的条件 4′ 去代替条件 4:

4′ 在下述 Cauchy 问题所决定典则变换 χ 下(χ: $(x, t, \xi, \tau)\mapsto(x', t', \xi', \tau')$), p_1 所对应的象函数在 z_0' 的一个锥邻域内仅是 t' 的函数.

此典则变换 χ 所相应的生成函数 $s(x, t, \xi', \tau')$ 由 Cauchy 问题

$$\begin{cases} p_2\left(x,\ t,\ \dfrac{\partial s}{\partial x},\ \dfrac{\partial s}{\partial t}\right)=\tau', \\ \left.\dfrac{\partial s}{\partial x}\right|_{(x_0, t_0, \xi_0', 0)}=\xi_0,\ \left.\dfrac{\partial s}{\partial t}\right|_{(x_0, t_0, \xi_0', 0)}=\tau_0, \\ s\,|_{t=t_0}=\langle x,\ \xi'\rangle \end{cases}$$

所确定. 这里 p_1, p_2 已认为是属于 L_C^0, L_C^1 了.

条件 4′ 的叙述依赖于所考虑的典则变换, 它没有条件 4 的叙述那样自然. 但是若条件 4 成立则条件 4′ 一定成立, 反之不确. 所以 4′ 比 4 弱.

二、

现在要在$(x_0,\ 0,\ \xi_0,\ 0)$附近构作算子

$$P=t^{2N+1}\frac{\partial}{\partial t}-2NB(x,\ D_x)\quad (B\in L_C^0,\ N>0) \tag{2}$$

的微局部拟基本解, 这里, 我们假设在$(x_0,\ \xi_0)$附近有

$$\operatorname{Re} b_0(x,\ \xi)<0, \tag{3}$$

其中$(x_0,\ \xi_0)\in T^*(\mathbf{R}^{2n})\setminus\{0\}$, 为此, 定义一个新的象征类 $S_{E,+}^m$ 如下.

记 $\overline{\mathbf{R}}^+=[0,\ \infty)$, 函数 $a(\rho,\ x,\ \xi)\in S_{E,+}^m$ 是指 $a(\rho,\ x,\ \xi)\in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}^+\times X\times\mathbf{R}_n)$, 且满足下面条件:

任给 $\varepsilon>0$、$j\in\mathbf{Z}_+$ (非负整数的全体), 多重指标 α, β 及紧集 $K\subset X$, 存在常数 $C_{\varepsilon,j,\alpha,\beta,K}>0$, 使当 $\rho\in\overline{\mathbf{R}}^+$, $(x,\ \xi)\in K\times\mathbf{R}_n\setminus\{0\}$ 时有

$$\left|e^{-\varepsilon\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta a(\rho,\ x,\ \xi)\right|\leqslant C_{\varepsilon,j,\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}. \tag{5}$$

由(5), 按标准方式可得 $S_{E,+}^m$ 上的半模使 $S_{E,+}^m$ 构成一个 Fréchet 空间.

在此, 仅把此象征类的某些性质略述于下, 而这些性质均为今后运算所需要的.

$$S_{1,0}^m(X\times\mathbf{R}_n)\subset S_{p,+}^m(\overline{\mathbf{R}}^+\times X\times\mathbf{R}_n)\subset S_{E,+}^m(\overline{\mathbf{R}}^+\times X\times\mathbf{R}_n), \tag{6}$$

式中 $S_{1,0}^m(X\times\mathbf{R}_n)$是通常的 m 阶 (0, 1) 型象征类

$$S_{p,+}^m(\overline{\mathbf{R}}^+\times X\times\mathbf{R}_n)=\left\{\sum_{j=0}^k\rho^j a_j(x,\ \xi);\ a_j(x,\ \xi)\in S_{1,0}^m(X\times\mathbf{R}_n),\ \rho\in\overline{\mathbf{R}}^+,\ k\in\mathbf{Z}_+\right\}.$$

$$S_{E,+}^{m_1}\subset S_{E,+}^{m_2},\ m_1<m_2. \tag{7}$$

$$a_1a_2\in S_{E,+}^{m_1+m_2},\ a_i\in S_{E,+}^{m_i},\ i=1,\ 2. \tag{8}$$

若 $a_k\in S^{m_k}_{E,+}$, $m_k\downarrow-\infty$, 则存在 $a\in S^{m_0}_{E,+}$ 使得 a 有渐近展式 $a\sim\sum\limits_k a_k$. 并且在 mod $S^{-\infty}_{E,+}$ 下, 这个 a 是唯一的.

设 $B\in L^{m_1}_C(X)$ 具适当支撑, 用 $b(x,\xi)$ 表示它的全象征. 又设

$$a(\rho,x,\xi)\in S^{m_2}_{E,+}(\overline{\mathbf{R}}^+\times X\times\mathbf{R}_n),$$

则

$$e^{-i\langle x,\xi\rangle}B(e^{i\langle x,\xi\rangle}a)\in S^{m_1+m_2}_{E,+}(\overline{\mathbf{R}}^+\times X\times\mathbf{R}_n),$$

且它有渐近展开

$$e^{-i\langle x,\xi\rangle}B(e^{i\langle x,\xi\rangle}a)\sim\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^n}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha_\xi b)(D^\alpha_x a). \tag{10}$$

利用上述象征类, 就可在 $(x_0,0,\xi_0,0)$ 附近构作 (2) 的微局部右拟基本解. 设 E_R 表示此右拟基本解, 它所对应的核 $E_R(x,t,y,s)$ 由下式决定

$$\langle E_R,\varphi\rangle=(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{3n+1}}e^{i\langle x-y,\xi\rangle}e^{\rho b_0(x,\xi)}a(\rho,x,\xi)\varphi\Big(x,t,y,\frac{t}{(1+\rho t^{2N})^{1/2N}}\Big)dx\,dy\,dt\,d\xi\,d\rho, \tag{11}$$

式中

$$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n+2}),\ a\in S^0_{E,+}(\overline{\mathbf{R}}^+\times X\times\mathbf{R}_n).$$

核 E_R 确定一个分布. 且有 E_R: $C_0^\infty(X\times T)\to C^\infty(X\times T)$.

用几何光学方法可以定出上述 $a(\rho,x,\xi)$ 使得

$$PE_R=I+R_R, \tag{12}$$

此处, 算子 R_R 所对应的核也有 (11) 形式, 只不过它所对应的象征是

$$r_R(\rho,x,\xi)\in S^{-\infty}_{E,+} \tag{13}$$

计算 E_R 和 R_R 的波前集, 可得它们的波前集由下式构造

$$WF'(E_R)\subseteq\mathscr{A}\cup\mathscr{B}\subset T^*(\mathbf{R}^{2n+2})\setminus\{0\}, \tag{14}$$

$$WF'(R_R)\subseteq\mathscr{B}\subset T^*(\mathbf{R}^{2n+2})\setminus\{0\}, \tag{15}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathscr{A}=&\Big\{\{(x,t,\xi,\tau;x,s,\xi,\sigma);\ t\tau=s\sigma=0,\ \frac{\tau}{\sigma}\in[0,1],\ \frac{s}{t}\in[0,1]\Big\}\\&\cup\{(x,t,\xi,\tau;\ x,t,\xi,\tau)\}\\ \mathscr{B}=&\Big\{(x,t,0,\tau;y,0,0,\sigma);\ t\tau=0,\ \frac{\tau}{\sigma}\in[0,1]\Big\}\cup\{(x,t,0,\tau;y,t,0,\tau)\}\end{aligned} \tag{16}$$

这里规定 $\frac{\tau}{0}\in[0,1]$ 表示 $\tau=0=\sigma$.

下面来构作左拟基解. 仍设 (3) 成立, 我们要在 $(x_0,0,\xi_0,0)$ 点附近构作 (2) 的微局部左拟基本解. 用 E_L 表示左拟基本解, 它所对应的核 $E_L(x,t,y,s)$ 由下式确定

$$\langle E_L,\varphi\rangle=(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{3n+1}}e^{i\langle x-y,\xi\rangle}e^{\rho b_0(y,\xi)}a(\rho,y,\xi)\varphi(x,t,y,\frac{t}{(1+\rho t^{2N})^{1/2N}})\,dx\,dy\,dt\,d\xi\,d\rho \tag{17}$$

式中 $\varphi(x,t,y,s)$ 是 $\mathbf{R}^{2n+2}$ 上的试验函数, $a(\rho,y,\xi)$ 是 $S^0_{E,+}$ 类中待定的一个象征.

由于假设条件 (3), 上式所确定的 $E_L(x,t,y,s)$ 定义了一个振荡积分 (只要在上式中对 x 进行分部积分就可明了), 从而确定了一个 Schwartz 分布. 根据核定理, 此分布核对应一个算子 E_L. 更进一步, 由振荡积分理论知道[5]

$$E_L:\ C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})\to C^\infty(\mathbf{R}^{n+1}).$$

现用几何光学方法找出(17)中 $a(\rho, y, \xi)$，使得相应的 E_L 是所求的左拟基本解.

设 $f\in C_0^\infty(X\times T)$，考虑

$$[(E_LP)f](x, t)=(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi)$$

$$\cdot\left\{s^{2N+1}\frac{\partial}{\partial s}-2NB(y, D_y)\right\} f(y, s)\,dy\,d\xi\,d\rho=I_1+I_2, \tag{18}$$

式中
$$s=\frac{t}{(1+\rho t^{2N})^{1/2N}}.$$

取 $a(0, y, \xi)=-\dfrac{1}{2N}$. 分别考虑(18)中两个积分

$$I_1=(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi) s^{2N+1}\frac{\partial f(y, s)}{\partial s}\,dy\,d\xi\,d\rho$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}}(-2N) e^{i\langle x-y,\xi\rangle} e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(f\left(y, \frac{t}{(1+\rho t^{2N})^{1/2N}}\right)\right)dy\,d\xi\,d\rho$$

$$=f(x, t)+(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}}(2N) e^{i\langle x-y,\xi\rangle} e^{\rho b_0(y,\xi)}\left(\frac{\partial a}{\partial\rho}+b_0 a\right) f\,dy\,d\xi\,d\rho$$

$$I_2=(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}}(-2N) e^{i\langle x-y,\xi\rangle} e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi)(B(y, D_y) f(y, s))\,dy\,d\xi\,d\rho$$

$$=(-2N)(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi)$$

$$\cdot\left\{(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle y-z,\xi\rangle} b\ (y, \xi) f\left(z, \frac{t}{(1+\rho t^{2N})^{1/2N}}\right) dz\,d\xi\right\} dy\,d\xi\,d\rho$$

$$=(-2N)(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle x-z,\xi\rangle}$$

$$\cdot\left\{(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle z-y,\eta\rangle} b(y, \xi-\eta) e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi)\,dy\,d\eta\right\} f\left(z, \frac{t}{(1+\rho t^{2N})^{1/2N}}\right) dz\,d\xi\,d\rho$$

$$=(-2N)(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle x-z,\xi\rangle}\left\{(2\pi)^{-n}\sum_{\alpha\geq 0}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle z-y,\eta\rangle}\right.$$

$$\left.\cdot\eta^\alpha(\partial_\xi^\alpha b(y, \xi)) e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi)\,dy\,d\eta\right\} f\,dz\,d\xi\,d\rho$$

$$=(-2N)(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle x-z,\xi\rangle}\left\{\sum_{\alpha\geq 0}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} D_z^\alpha[\partial_\xi^\alpha b(z, \xi)\right.$$

$$\left.\cdot e^{\rho b_0(z,\xi)} a(\rho, z, \xi)\right\} f\,dz\,d\xi\,d\rho.$$

把上述两式代入(18)式右边. 为使 E_L 是所需的左拟基本解，要求 $a(\rho, y, \xi)\in S^0_{E,+}$ 满足:

$$\begin{cases} r_L(\rho, y, \xi)=\dfrac{\partial a}{\partial\rho}+b_0 a-e^{-\rho b_0}\displaystyle\sum_{\alpha\geq 0}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} D_y^\alpha[\partial_\xi^\alpha b(y, \xi) e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi)]\sim 0, \\ a_0(0, y, \xi)=-\dfrac{1}{2N}. \end{cases} \tag{19}$$

把(19)式中有关项进行展开

$$D_y^\alpha[\partial_\xi^\alpha b(y, \xi) e^{\rho b_0(y,\xi)} a(\rho, y, \xi)]=\sum_{\beta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta} D_y^{\alpha-\beta}(\partial_\xi^\alpha b(y, \xi))\cdot D_y^\beta(e^{\rho b_0} a),$$

而上式右面

$$D_y^\beta(e^{\rho b_0} a)=\sum_{\gamma\leq\beta} C_{\beta,\gamma}(D_y^\gamma e^{\rho b_0})(D_y^{\beta-\gamma} a)=e^{\rho b_0}\sum_{\gamma\leq\beta} C_{\beta,\gamma}\left(\sum_{j=0}^{|\gamma|}\rho^j g_{j,\beta}\right)(D_y^{\beta-\gamma} a),$$

式中 $g_{j,\beta}(y,\xi)\in S^0_{1,0}$, $\sum_{j=0}^{|\gamma|}\rho^j g_{j,\beta}\in S^0_{P,+}$. 记 $h_\beta(a,b_0)=\sum_{\gamma\leq\beta}C_{\beta,\gamma}\left(\sum_{j=0}^{|\gamma|}\rho^j g_{j,\beta}\right)(D_y^{\beta-\gamma}a)$, 故 $h_\beta\in S^0_{P,+}$ 且 $h_0(a,b_0)=a$. 于是(19)式成为

$$\frac{\partial a}{\partial\rho}+b_0a-\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n_+}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\Big(\sum_{\beta\leq\alpha}C_{\alpha,\beta}(D_y^{\alpha-\beta}\partial_\xi^\alpha b)h_\beta(a,b_0)\sim 0. \tag{20}$$

设 $b(y,\xi)\sim\sum_{k\leq 0}b_k(y,\xi)$, $b_k\in S^k_{1,0}(k=0,-1,-2,\cdots)$, 又设所找的 $a(\rho,y,\xi)\sim\sum_{k\leq 0}a_k(\rho,y,\xi)$, $a_0=-\dfrac{1}{2N}$, $a_k\in S^k_{P,+}(k=-1,-2,\cdots)$. 把它们代入(20), 可得如下的迁移方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial a_{-1}}{\partial\rho}=b_{-1}a_0-\Big[\sum_{\beta\leq\alpha}C_{\alpha,\beta}(D_y^{\alpha-\beta}\partial_\xi^\alpha b_0)h_\beta(a_0,b_0)\Big]_{|\alpha|=1},\ a_{-1}(0,y,\xi)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial a_k}{\partial\rho}=L_k(b_0,\cdots,b_k;a_0,\cdots,a_{k+1}),\ a_k(0,y,\xi)=0\quad(k=-2,-3,\cdots),\end{cases}\tag{21}$$

由于可递推地得知 $L_k\in S^k_{P,+}$, 所以可把上述迁移方程定解问题归结为在 $S^k_{P,+}$ 内求下面定解问题之解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v(\rho,y,\xi)}{\partial\rho}=\rho^j w(y,\xi)\ (w\in S^k_{1,0},\ j\in\mathbf{Z}_+),\\ v(0,y,\xi)=0,\end{cases}$$

此问题显然有解 $v(\rho,y,\xi)=(j+1)^{-1}\rho^{j+1}w(y,\xi)$.

用上述方法找到了 $a(\rho,y,\xi)\in S^0_{E,+}$ 后, 代入(17)就有

$$E_LP=I+R_L, \tag{22}$$

式中 R_L 所相应的分布核 $R_L(x,t,y,s)$ 也有(17)形式, 只不过它所对应的象征是由(19)所确定的 $r_L(\rho,y,\xi)$. 由上作法可知

$$r_L(\rho,y,\xi)\in S^{-\infty}_{E,+}. \tag{23}$$

把右拟基本解分布核(11)及左拟基本解分布核(17)进行比较, 它们的区别在于 b_0 和 a 这二个函数中的第一个自变量由 x 换为 y. 注意到这点后, 对它们进行波前集计算时就必然会得出同样的结论. 因此 E_L 和 R_L 的波前集的结构也分别有的(14), (15)的形式. 即

$$WF'(E_L)\subseteq\mathscr{A}\cup\mathscr{B}\subset T^*(\mathbf{R}^{2n+2})\setminus\{0\}, \tag{24}$$

$$WF'(R_L)\subseteq\mathscr{B}\subset T^*(\mathbf{R}^{2n+2})\setminus\{0\}, \tag{25}$$

式中集合 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 由(16)表出.

值得注意的是, 上述右、左拟基本解的波前集的构造(14)—(15)及(24)—(25)对 m 为所有的奇数时均成立; 特别地, 当 $m=1$ 时也属于此例[1,4]. (当然均在假设条件(3)的情况下).

三、

利用上述的微局部右拟基本解 E_R 及其波前集的表示式可以证明算子 (2) 在 $t=0$ 附近是局部可解的. 这里指的是 C^∞_- 局部可解性, 即如下意义:

记 $\Omega\equiv X\times T$，设 $(x_0, 0)\in\Omega$，则存在 $(x_0, 0)$ 的邻域 $\Omega_0\subset\Omega$，对任意的 $f(x, t)\in C_0^\infty(\Omega_0)$，一定有 $u(x, t)\in C^\infty(\Omega)$ 存在，使得在 Ω_0 内成立

$$Pu\equiv t^{2N+1}\frac{\partial u}{\partial t}-2NB(x, D_x)u=f((x, t)). \tag{26}$$

为此先要注意

$$WF(R_R)\cap\{(x, 0, \xi, \tau; y, s, \eta, \sigma); (y, s, \eta, \sigma)\in T^*(X\times T)\}=\emptyset. \tag{27}$$

事实上，因为 $WF(R_R)\subseteq\mathscr{B}'$，而集合 $\mathscr{B}$ 的表示式(16)中第一个集合内的 $\sigma\neq 0$，(16)中第二个集合内的 $\tau\neq 0$，且若 $\mathscr{B}$ 中 $t=0$ 则 $s=0$；所以只要证明 $\{(x,0,0,\tau; y, 0, 0, \sigma); \frac{\tau}{\sigma}\in[0, 1], \sigma\neq 0, (y, 0, 0, -\sigma)\in T^*(\Omega)\setminus\{0\}\}\in WF'(R_R)$，而用稳定位相法直接推知，为使上述关系式左边的点集属于 $WF'(R_R)$，必须 $\tau=0=\sigma$．这个矛盾证明了(27)是成立的．

(27)式表示算子 R_R 所对应的分布核 $R_R(x, t, y, s)$ 的奇支集 sing supp R_R 不与集合 $\{(x_0, 0)\}\times\Omega$ 相交．利用奇支集的闭性，存在含 $(x_0, 0)$ 的两个开集 Ω' 和 Ω''，使得此分布核 $R_R(x, t, y, s)$ 在 $\Omega'\times\Omega''$ 上光滑．

取相对紧集 Ω_1，$(x_0, 0)\in\Omega_1\subset\subset\Omega'\cap\Omega''$．再取函数 $\varphi_1(x, t)\in C_0^\infty(\Omega_1)$ 和 $\varphi_2(x, t)\in C_0^\infty(\Omega'')$，使在含 $(x_0, 0)$ 的开集 $\Omega_0(\Omega_0\subset\Omega_1)$ 上 $\varphi_1\equiv 1$，在 $\bar{\Omega}_1$ 的某邻域上 $\varphi_2\equiv 1$．

任取 $f\in C_0^\infty(\Omega_0)$，令

$$PE_R=I+R_R=I+\varphi_1R_R\varphi_2+(1-\varphi_1)R_R\varphi_2+R_R(1-\varphi_2), \tag{28}$$

式中 φ_1，φ_2 分别表示用函数 $\varphi_1(x, t)$，$\varphi_2(y, s)$ 相乘的算子．由 φ_1 与 φ_2 的作法，$\varphi_1R_R\varphi_2$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上具紧支集及 C^∞-核的算子，故 $\varphi_1R_R\varphi_2\in L^m_{1,0}(\mathbf{R}^{n+1})$ (m 是任意实数)上带有紧支集．利用[1]中引理7.3，我们可以看到 $\varphi_1R_R\varphi_2$ 是 $H^m(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^n))$ 上的连续线性算子．并且，适当收缩 Ω_1，可以认为 $\varphi_1R_R\varphi_2$ 的算子模严格小于1．于是 $(I+\varphi_1R_R\varphi_2)^{-1}$ 存在．记 $v=(I+\varphi_1R_R\varphi_2)^{-1}f(f\in C_0^\infty(\Omega_0))$．由 $(\varphi_1R_R\varphi_2)v\in C_0^\infty(\Omega_1)$ 可知 $v=f-(\varphi_1R_R\varphi_2)v\in C_0^\infty(\Omega_1)$．

于是当限制在 Ω_0 上时，有

$$PE_Rv=(I+R_R)v=(I+\varphi_1R_R\varphi_2)v+(1-\varphi_1)R_R\varphi_2v+R_R(1-\varphi_2)v=f.$$

令 $u=E_Rv$，上式即 $Pu=f$．又由于 E_R 有 $C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$ 的性质，所以 $u\in C^\infty(\Omega)$．

这个 $u(x, t)$ 就是 C^∞-局部可解性中所要求的．

下面来研究方程的解的奇性传播情况．一般讲来，对非齐次方程(26)而言，当它的右端 f 确定时，方程是否有解尚属未知；并且，即令 $f\in C^\infty$ 时虽由 C^∞-局部可解性已知存在 C^∞-解，但也可能存在另外一些非 C^∞ 的解．因此，在研究方程的解的奇性传播时，事先要认为对所考虑的 f，方程具有 Schwartz 意义下的分布解．现在，我们的目的就是要研究对应于 f 的所有分布解的奇性在重特征点附近的传播情况．(在非重特征点附近，奇性的传播情况是通常大家熟知的)．

我们将利用左拟基本解 E_L 及余项算子 R_L 来研究这个问题．为此先观察 E_L 和 R_L 传播奇性的情况．

设 $h(x, t)$ 在 (x_1, t_1) 点有奇性，且 $(x_1, t_1, \xi_1, \tau_1)\in WF(h)$．由于我们是在重特征点

$(x_0, 0, \xi_0, 0)$附近研究问题，所以可以认为$\xi_1\neq 0$；于是集合$\mathscr{B}$的影响可以忽略．按波前集计算公式[5]

$$WF(R_L h)\subseteq \mathscr{B}\circ WF(h)\cup WF'_{X\times T}(R_L),$$

式中 $WF'_{X\times T}(R_L)=\{(x, t, \xi, \tau);\ (x, t, \xi, \tau)\in T^*(X\times T)\setminus\{0\};$ 存在 $(y, s)\in X\times T$ 使有$(x, t, \xi, \tau; y, s, 0, 0)\in WF(R_L)\}$

在$(x_0, 0, \xi_0, 0)$附近考虑上式时，由于$\mathscr{B}\circ WF(h)$不起作用，且集合$\mathscr{B}$的表示式(16)中σ, τ不能同时为0, $WF'_{X\times T}(R_L)=\emptyset$，所以，在$(x_0, 0, \xi_0, 0)$附近考虑奇性传播时，$R_L$的作用可以略去．

又

$$WF(E_L h)\subseteq WF'(E_L)\circ WF(h)\cup WF'_{X\times T}(E_L)\subseteq \mathscr{A}\circ WF(h)\cup \mathscr{B}\circ WF(h)\cup WF'_{X\times T}(E_L) \tag{29}$$

其中，$\mathscr{B}\circ WF(h)$可以忽略．按(16)式中的$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$计算$WF'_{X\times T}(E_L)$，它也仍是空集．而

$$\mathscr{A}\circ\{(x_1, t_1, \xi_1, \tau_1)\}=\left\{(x_1, t, \xi_1, \tau);\ t\tau=t_1\tau_1=0,\ \frac{\tau}{\tau_1}\in[0, 1],\ \frac{t_1}{t}\in[0,1]\right\}\cup\{(x_1, t_1, \xi_1, \tau_1)\}, \tag{30}$$

把这些结果代入(29)式．因此，E_L仅靠集合

$$\left\{(x_1, t, \xi_1, \tau);\ t\tau=t_1\tau_1=0,\ \frac{\tau}{\tau_1}\in[0, 1],\ \frac{t_1}{t}\in[0,1]\right\}$$

把$h(x, t)$在$(x_1, t_1, \xi_1, \tau_1)$处奇性传播出去．

鉴于上述事实，用[6]中的方法就可以讨论方程(26)的解在重特征点$(x_0, 0, \xi_0, 0)$附近的奇性传播情况．

用ν表示象征t由$(x_0, 0, \xi_0, 0)$点出发的零次特征带．即

$$\nu:\ \{(x_0, 0, \xi_0, \tau)\}. \tag{31}$$

考虑$u(x, t)\in\mathscr{D}'(X\times T)$，设它具有下述性质

$$WF(u)\cap\nu\setminus\{(x_0, 0, \xi_0, 0)\}=\emptyset. \tag{32}$$

我们要证明：在上述假定下，若$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(Pu)$，则$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(u)$．

为此，由$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(Pu)$，存在$(x_0, 0, \xi_0, 0)$的一个锥邻域$\omega_0$，使得$\omega_0\overline{\subset} WF(Pu)$．用$\Omega_0$表示$\omega_0$在底空间上投影所构成的开集，$(x_0, 0)\in\Omega_0\subset X\times T$．

作$\varphi(x, t)$, $\psi(x, t)$如下：

$\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$，在$(x_0, 0)$的小邻域$\Omega_1(\subset\Omega_0)$上$\varphi=1$；$\psi\in C_0^\infty(\Omega_0)$，在$\operatorname{supp}\varphi$的某邻域$\Omega_2(\subset\Omega_0)$上$\psi=1$．

记$v=\psi u$, $g=Pv=P(\psi u)$．考虑

$$WF(\varphi g)\subseteq WF(\varphi[P, \psi]u)\cup WF(\varphi\psi Pu)$$

由于$\omega_0\overline{\subset} WF(Pu)$，所以$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(\varphi\psi Pu)$．再由$\varphi$及$\psi$之作法知道

$$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(\varphi[P, \psi]u),$$

从而$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(\varphi g)$，也就是

$$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(g). \tag{33}$$

另一方面，由于$\mathscr{B}$的作用可以忽略，所以

$$WF(E_L g)\subseteq\mathscr{A}\circ WF(g), \tag{34}$$

(34)表明$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(E_L g)$. 事实上, 若$(x_0, 0, \xi_0, 0)\in WF(E_L g)$, 由(30)有 τ_0 存在使$(x_0, 0, \xi_0, \tau_0)\in WF(g)$. (33)式意味着 $\tau_0\neq 0$. 而由拟微分算子的拟微局部性, $WF(g)\subset WF(v)$, 从而$(x_0, 0, \xi_0, \tau_0)\in WF(v)$. 这是和假定(32)矛盾的.

再由于 $v\in\mathscr{E}'^1$, 可以把等式 $E_L P=I+R_L$ 作用于 v 上. 再考虑到 R_L 的作用可以忽略. 所以

$$WF(v)\subseteq WF(E_L g)$$

由此式, $(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(v)$. 特别地, 因在$(x_0, 0, \xi_0, 0)$处 $\psi=1$, 故

$$(x_0, 0, \xi_0, 0)\overline{\in} WF(u).$$

这就是我们所要的结论.

作者衷心感谢王柔怀教授和齐民友教授在本文写作中给予的关怀和鼓励.

参 考 文 献

[1] Hanges, N., Parametrices and local solvability for a class of singular hyperbolic operators, *Comm. P.D.E.*, **3** (2) (1978), 105—152.

[2] Trèves, F., Second order Fuchsican elliptic equations and eigenvalue asymptotics, *Lecture Notes in Math.*, **459** (1975), 283—340.

[3] 仇庆久, 一类具重特征的非 Fuchs 型双曲拟微分算子, 南京大学学报"自然科学版", **4** (1980), 1—15.

[4] Hanges, N., Propagation of singularities for a class of operators with double characteristics, Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations, edited by L. Hörmander, Annals of math. studies., Princeton University Press., 1978.

[5] Duistermaat, J. J. Fourier integral operators, Lecture notes, Courant institute of math sciences., 1973.

[6] Duistermaat, J. J. and Hörmander, L., Fourier integral operators II, *Acta Math.*, **128** (1972), 183—269.

LOCAL SOLVABILITY AND PROPAGATION OF SINGULARITIES FOR A CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL OPERATOAS WITH IRREGULAR SINGULARITY

QIU QINGJIU
(*Nanjing University*)

ABSTRACT

Consider a class of pseudodifferential operators which satisfy the conditions 1—4 (or 4′). By microlocal analysis, we can reduce the operators to

$$P=t^m\frac{\partial}{\partial t}-B(x,\ t,\ D_x,\ D_t)\quad (B\in L^0_C,\ m>1 \text{ is integer}),$$

which we call non-Fuchsian operators. Then, we give an explicit construction for the microlocal right and left parametrices of these operators near multi-characteristics and compute wave front sets of those parametrices. Finally, we study the local solvability and the propagation of singularities for the equation corresponding to the non-Fuchsian operator.

In order to obtain the previous results, the following are noteworthy.

1 The singularity of the operators $t^m\frac{\partial}{\partial t}-B$ is concentrated on $t^m\frac{\partial}{\partial t}$. So, for simplicity, we may suppose that B depends only on x and D_x. Obviously, it will lead to considerable simplification of working process.

2 It's necessary to distinguish the odd integer m from even, however, we can study these different cases in the same way. In this paper, we study only that m is odd; i. e.

$$P=t^{2N+1}\frac{\partial}{\partial t}-2NB(x,\ D_x)\quad (N\geqslant 1 \text{ integer}). \tag{2}$$

3 We have to make some hypothesis about B to obtain local solvability. Here we assume

$$\operatorname{Re}(b_0(x,\ \xi))<0 \text{ near characteristic point}, \tag{3}$$

where $b_0(x,\ \xi)$ is the principal symbol of $B(x,\ D_x)$.

By the discussion on this subject we prove that the operator (2) is, under the assumption (3), C^∞-locally solvable near the multi-characteristic point $(x_0,\ 0)$; and obtain the following result for the propagation of singularities: Assume the multi-characteristic point $(x_0,\ 0,\ \xi_0,\ 0)$ of the operator (2) doesn't belong to $WF(pu)$. Let ν denote the null bicharacteristic strip of symbol to through $(x_0,\ 0,\ \xi_0,\ 0)$. Then, if $WF(u)\cap\nu\backslash\{(x_0,\ 0,\ \xi_0,\ 0)\}=\emptyset$, we have $(x_0,\ 0,\ \xi_0,\ 0)\in WF(u)$.