数 学 年 刊
3 (1) 1982

一类二阶拟线性抛物方程组的初值问题与非线性边值问题

严 子 谦
(吉林大学)

§1. 记号和主要结果

设 E_n 是 n 维欧氏空间，其中的点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，Ω 是 E_n 中的有界域，S 是 Ω 的边界，$\bar{\Omega}=\Omega\cup S$，$Q_T=\Omega\times(0, T]$，$S_T=S\times(0, T]$，$D_{n+1}^T=E_n\times(0, T]$.

设 l 和 m 为二非负整数，α 和 β 为二小于 1 的正数. 称有界连续函数 $u(x, t)\in H^{l+\alpha, m+\beta}(\overline{D_{n+1}^T})$，如果所有 $D_x^l u(x, t)$ 和 $D_t^m u(x, t)$ 都存在，且分别对 x 和 t 满足以 α 和 β 为指数的(一致) Hölder 条件，即有有限半模

$$\langle u\rangle_{l+\alpha, m+\beta}^{D_{n+1}^T}=\langle u\rangle_{l+\alpha, 0}^{D_{n+1}^T}+\langle u\rangle_{0, m+\beta}^{D_{n+1}^T},$$

其中

$$\langle u\rangle_{l+\alpha, 0}^{D_{n+1}^T}=\sum_l \sup_{\substack{x, y\in E_n, x\neq y\\ 0<t<T}} \frac{|D_x^l u(x, t)-D_x^l u(y, t)|}{|x-y|^\alpha},\text{[注]}$$

$$\langle u\rangle_{0, m+\beta}^{D_{n+1}^T}=\sup_{\substack{x\in E_n\\ 0<t, \tau<T, t\neq\tau}} \frac{|D_t^m u(x, t)-D_t^m u(x, \tau)|}{|t-\tau|^\beta}.$$

对 $u\in H^{l+\alpha, m+\beta}(\overline{D_{n+1}^T})$，定义模为

$$\|u\|_{l+\alpha, m+\beta}^{D_{n+1}^T}=|u|_0^{D_{n+1}^T}+\langle u\rangle_{l+\alpha, m+\beta}^{D_{n+1}^T} \quad \Big(|u|_0^{D_{n+1}^T}=\sup_{D_{n+1}^T}|u(x, t)|\Big).$$

类似地定义 $u\in H^{l+\alpha, m+\beta}(\bar{Q}_T)$ 与 $\|u\|_{l+\alpha, m+\beta}^{Q_T}$. 在不致引起混淆的地方，我们将略去上标 D_{n+1}^T 和 Q_T，而只写 $\|u\|_{l+\alpha, m+\beta}$，$\langle u\rangle_{l+\alpha, m+\beta}$ 等等. 如果 $m+\beta=\frac{1}{2}(l+\alpha)$，我们也简记 $\|u\|_{l+\alpha, m+\beta}=\|u\|_{l+\alpha}$，$\langle u\rangle_{l+\alpha, m+\beta}=\langle u\rangle_{l+\alpha}$.

称向量函数 $\boldsymbol{u}(x, t)=(u_1(x, t), \cdots, u_N(x, t))\in H^{l+\alpha, m+\beta}$，如果对每个 $k\in\{1, \cdots, N\}$，$u_k(x, t)\in H^{l+\alpha, m+\beta}$；模定义为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{l+\alpha, m+\beta}=\sum_{k=1}^N \|u_k\|_{l+\alpha, m+\beta}.$$

称有界连续函数 $u(x)\in C^{l+\alpha}(E_n)$，如果所有 $D^l u(x)$ 都存在，且有有限半模

$$\langle u\rangle_{(l+\alpha)}^{E_n}=\sum_{l, x, y\in E_n, x\neq y} \sup \frac{|D^l u(x)-D^l u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

对 $u\in C^{l+\alpha}(E_n)$，定义模为

本文 1980 年 5 月 8 日收到.

[注] $\sum_l$ 表示对所有 l 阶微商求和.

$$\|u\|_{(l+\alpha)}^{E_n}=|u|_0^{E_n}+\langle u\rangle_{(l+\alpha)}^{E_n}\quad (|u|_0^{E_n}=\sup_{E_n}|u(x)|).$$

类似地定义 $u\in C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ 与 $\|u\|_{(l+\alpha)}^{\Omega}$.

称向量函数 $\boldsymbol{u}(x)=(u_1(x),\cdots,u_N(x))\in C^{l+\alpha}$, 如果对每个 $k\in\{1,\cdots,N\}$, $u_k(x)\in C^{l+\alpha}$; 模定义为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{(l+\alpha)}=\sum_{k=1}^{N}\|u_k\|_{(l+\alpha)}.$$

所有上述数值和向量函数空间都是 Banach 空间.

对 $S\in C^{l+\alpha}$, $\boldsymbol{u}\in H^{l+\alpha,m+\beta}(\bar{S}_T)$ 和 $\|\boldsymbol{u}\|_{l+\alpha,m+\beta}^{S_T}$ 等等, 其意义当可推想而知.

记 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_N)$, $\boldsymbol{u}_x=\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1},\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial u_N}{\partial x_n}\right)$, $|\boldsymbol{u}|=\left(\sum_{k=1}^{N}u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\boldsymbol{p}=(p_{11},p_{12},\cdots,p_{Nn}),\quad p=|\boldsymbol{p}|=\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

在本文中, C 表示只与已知常数和已知函数在相应空间之模有关的常数, 在不同的地方取值可以不同. $\mu(\xi)$ 表示 $\xi\geqslant 0$ 上的递增正函数, $s_i(p)$ 表示当 $p\to\infty$ 时单调递减趋于零的正函数, $i=1,2,3,4$.

本文讨论的对象是下述抛物方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}=f_m(x,t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_x),\ (x,t)\in D_{n+1}^T, & (1)\\ u_m|_{t=0}=\varphi_m(x),\ x\in E_n,\ m=1,\cdots,N, & (2)\end{cases}$$

与非线性混合边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}=f_m(x,t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_x),\quad m=1,\cdots,N,\ (x,t)\in Q_T, & (3)\\ u_m|_{S_T}=g_m(x,t),\quad m=1,\cdots,s, & (4)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\Big|_{S_T}=h_m(x,t,\boldsymbol{u}),\quad m=s+1,\cdots,N, & (5)\\ u_m|_{t=0}=\varphi_m(x),\quad m=1,\cdots,N,\ x\in\Omega. & (6)\end{cases}$$

这是一类特殊的方程组. 如果抹去低阶项, 它就成为 N 个彼此独立的线性抛物方程. 非线性边值条件(5)的特点也是这样.

这类方程组包括伴有化学反应的扩散方程组. 当高阶项系数不是 $a_{ij}^{(m)}(x,t)$, 而是 $a_{ij}(x,t,\boldsymbol{u})$ 时, Ладыженская, О. А. 和 Уральцева, Н. Н. [1,2] 证明了第一边值问题的古典可解性. 周毓麟[3] 就 $a_{ij}^{(m)}(x,t)=a_{ij}(x,t)$, $b_i^{(m)}(x,t)=b_i(x)$ 的情形, 在关于区域边界和已知函数过强的光滑性假定下, 证明了斜微商问题的可解性.

本文的主要结果是:

定理 1 假设

1) $a_{ij}^{(m)}(x,t)\in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{D}_{n+1}^T)$, $\varphi_m(x)\in C^{2+\alpha}(E_n)$, $i,j=1,\cdots,n$; $m=1,\cdots,N$; $0<\alpha<1$;

2) $\forall$ 实 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $m=1,\cdots,N$, $(x,t)\in D_{n+1}^T$, 有

$$\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\,\xi_i\xi_j\leqslant\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \mu>\nu>0; \tag{7}$$

3) $f_m(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ 关于 u_k 和 p_{ij} 两次连续可微，f_m, $\frac{\partial f_m}{\partial u_k}$, $\frac{\partial f_m}{\partial p_{ij}}$ 关于 x 和 t 满足指数分别为 α 和 $\frac{\alpha}{2}$ 的 Hölder 条件，且当 $(x, t)\in D^T_{n+1}$, $|\boldsymbol{u}|<M$, $p<M_1$(M, M_1——任意常数)时，f_m 及其所有上述微商与 Hölder 常数，均按绝对值以一与 M 和 M_1 有关的常数为界，而当 (x, t), $(y, \tau)\in D^T_{n+1}$, $(x, t)\neq(y, \tau)$, $|\boldsymbol{u}|<\infty$, $p<\infty$ 时，

$$|f_m(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})|+\frac{|f_m(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})-f_m(y, \tau, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})|}{|x-y|^\alpha+|t-\tau|^{\alpha/2}}+\left|\frac{\partial f_m}{\partial u_k}\right|+\left|\frac{\partial f_m}{\partial p_{ij}}\right|(1+p)$$
$$\leqslant\mu(|\boldsymbol{u}|)(1+p)^2\varepsilon_1(p),\quad m=1, \cdots, N, \tag{8}$$

此处 $\varepsilon_1(p)(1+p)$ 当 $p\to\infty$ 时单调递增.

于是，若能对以 τf_m 代 f_m 和以 $\tau\varphi_m$ 代 φ_m 的问题 (1)－(2) 之所有可能的古典解给出最大模估计，则此问题在 $H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$ 中可解.

定理 2　假设

1) $S\in C^{2+\alpha}$;

2) $a^{(m)}_{ij}(x, t)\in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, $b^{(m)}_i(x, t)\in H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{S}_T)$, $\varphi_m(x)\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $g_k(x, t)\in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{S}_T)$, $i, j=1, \cdots, n$; $m=1, \cdots, N$; $k=1, \cdots, s$; $0<\alpha<1$;

3) $\forall$ 实 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $m=1, \cdots, N$, $(x, t)\in\overline{Q}_T$, (7) 式成立;

4) $\forall m=1, \cdots, N$, $(x, t)\in S_T$

$$\sum_{i=1}^n b^{(m)}_i(x, t)\cos(n, x_i)\geqslant\nu, \tag{9}$$

其中 $\cos(n, x_i)$ 为 S 上的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x_i 轴的夹角余弦;

5) $f_m(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ 对 $(x, t)\in Q_T$ 满足定理 1 的条件 3);

6) $h_m(x, t, \boldsymbol{u})$ $(m=s+1, \cdots, N)$ 关于 x_i 和 u_k 有连续微商，$\frac{\partial h_m}{\partial x_i}$ 和 $\frac{\partial h_m}{\partial u_k}$ 关于 u_j 两次连续可微，$\frac{\partial h_m}{\partial x_i}$, $\frac{\partial h_m}{\partial u_k}$, $\frac{\partial^2 h_m}{\partial x_i\partial u_k}$, $\frac{\partial^2 h_m}{\partial u_k\partial u_l}$ 关于 x 和 t 满足指数分别为 α 和 $\frac{1+\alpha}{2}$ 的 Hölder 条件，且当 $(x, t)\in S_T$, $|\boldsymbol{u}|<\infty$ 时，h_m 及其所有上述微商与所涉及的 Hölder 常数，均按绝对值以 $\mu(|\boldsymbol{u}|)$ 为界;

7) 在 $x\in S$, $t=0$ 时成立相容性条件:

$$\begin{cases}\varphi_m(x)=g_m(x, 0),\ u'_m(x)=\dfrac{\partial g_m(x, 0)}{\partial t}, & x\in S,\ m=1, \cdots, s,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^n b^{(m)}_i(x, 0)\frac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_i}=h_m(x, 0, \boldsymbol{\varphi}(x)), & x\in S,\ m=s+1, \cdots, N,\end{cases} \tag{10}$$

其中

$$u'_k(x)=\sum_{i,j=1}^n a^{(k)}_{ij}(x, 0)\frac{\partial^2\varphi_k(x)}{\partial x_i\partial x_j}+f_k(x, 0, \boldsymbol{\varphi}(x), \boldsymbol{\varphi}_x(x)),\ k=1, \cdots, s. \tag{11}$$

于是，若能对右端乘以 τ 后的问题(3)—(6)之所有可能的古典解给出最大模估计，则此问题在 $H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$ 中可解.

在 $b^{(m)}_i(x, t)=\sum_{j=1}^n a^{(m)}_{ij}(x, t)\cos(n, x_j)$, $(i=1, \cdots, n;\ m=s+1, \cdots, N)$ 时，即对第一、二、三边值条件混合的非线性边值问题，若更设 $\frac{\partial a^{(m)}_{ij}}{\partial x_j}$ 在 $\overline{Q}_T$ 中有界，则解是唯一的.

关于最大模估计，我们给出了下面的充分条件.

定理3 设诸 $a_{ij}^{(m)}(x, t)$, $f_m(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ 处处有限，且

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \forall m,$$

$f_m(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})u_m \leqslant b_1|\boldsymbol{u}|^2+b_2$[注] ($b_1$, b_2——非负常数), $\forall m$, 当 $p_{m1}=\cdots=p_{mn}=0$ 时，则对以 τf_m 代 f_m 和以 $\tau\varphi_m$ 代 φ_m 的问题(1)—(2)之所有可能的古典解 $\boldsymbol{u}(x, t)$，有估计式

$$|\boldsymbol{u}| \leqslant \inf_{b>Nb_1} \sqrt{N}\, e^{bT}\left[\sup_{m,E_n}|\varphi_m(x)|+\sqrt{\frac{b_2}{b-Nb_1}}\right].$$

若再加上诸 $b_i^{(m)}(x, t)$, $h_m(x, t, \boldsymbol{u})$ 处处有限，且

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{(m)}(x, t)\cos(n, x_i) \geqslant 0, \quad \forall m,$$

$$h_m(x, t, \boldsymbol{u})u_m < 0^{[注]} \quad (u_m \neq 0), \ \forall m;$$

则对右端乘以 τ 后的问题(3)—(6)之所有可能的古典解 $\boldsymbol{u}(x, t)$，有估计式

$$|\boldsymbol{u}| \leqslant \inf_{b>Nb_1} \sqrt{N}\, e^{bT}\left[\sup_{m,\bar{\Omega}}|\varphi_m(x)|+\sup_{m,S_T}|g_m(x, t)|+\sqrt{\frac{b_2}{b-Nb_1}}\right]. \tag{12}$$

注 在方程组(1)或(3)的右端加上一项

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)}(x, t, u, u_x)\frac{\partial u_m}{\partial x_i},$$

而 $\sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)}(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})p_{mi}$ 满足与定理1或2中加于 $f_m(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ 的条件相同的假设，定理1、2、3的结论仍然成立.

§2. 辅助命题

为了引用的方便，我们列举若干辅助命题，首先是关于线性抛物方程的 Schauder 型结果.

考虑二阶线性抛物算子

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x, t)u,$$

假定满足一致抛物性条件

$$\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \mu>\nu>0.$$

关于 $\mathscr{L}u$ 的初值问题，第一边值问题和斜微商问题分别是

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f(x, t), & (x, t)\in D_{n+1}^T,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in E_n;\end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f(x, t), & (x, t)\in Q_T,\\ u|_{S_T}=g(x, t),\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in\Omega;\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f(x, t), \quad (x, t)\in Q_T,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(x, t)u|_{S_T}=h(x, t),\\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad x\in\Omega.\end{cases} \tag{15}$$

[注] 对 m 不求和.

假定 $b_i(x, t)$ 满足"非切"条件

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\cos(n, x_i) \geqslant \nu,$$

而问题(14)和(15)中的已知函数 f, g, h 和 φ 当 $x\in S$, $t=0$ 时满足适当阶数的相容性条件(例如见[2]).

设 l 是非负整数, $0<\alpha<1$. 已知下列定理成立(见[2]).

定理 A 设 $a_{ij}(x, t)$, $a_i(x, t)$, $a(x, t)\in H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$, 则对任何 $f\in H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}\times(\overline{D^T_{n+1}})$ 和 $\varphi\in C^{l+2+\alpha}(E_n)$, 初值问题(13)有唯一解 $u(x, t)\in H^{l+2+\alpha, \frac{l+2+\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$, 且有估计式

$$\|u\|^{D^T_{n+1}}_{l+2+\alpha} \leqslant C(\|f\|^{D^T_{n+1}}_{l+\alpha} + \|\varphi\|^{E_n}_{(l+2+\alpha)}),$$

其中常数 C 与 f 和 φ 无关.

定理 B 设 $a_{ij}(x, t)$, $a_i(x, t)$, $a(x, t)\in H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, $S\in C^{l+2+\alpha}$, 则对任何 $f\in H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, $g\in H^{l+2+\alpha, \frac{l+2+\alpha}{2}}(\overline{S}_T)$ 和 $\varphi\in C^{l+2+\alpha}(\overline{\Omega})$, 只要 f, g 和 φ 满足 $[l/2]+1$ 阶相容性条件, 第一边值问题(14)便有唯一解 $u(x, t)\in H^{l+2+\alpha, \frac{l+2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, 且有估计式

$$\|u\|^{Q_T}_{l+2+\alpha} \leqslant C(\|f\|^{Q_T}_{l+\alpha} + \|g\|^{S_T}_{l+2+\alpha} + \|\varphi\|^{\Omega}_{(l+2+\alpha)}),$$

其中常数 C 与 f, g 和 φ 无关.

定理 C 设 $a_{ij}(x,t)$, $a_i(x,t)$, $a(x,t)\in H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, $S\in C^{l+2+\alpha}$, b_i, $b\in H^{l+1+\alpha, \frac{l+1+\alpha}{2}}\times(\overline{S}_T)$, 则对任何 $f\in H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, $h\in H^{l+1+\alpha, \frac{l+1+\alpha}{2}}(\overline{S}_T)$, $\varphi\in C^{l+2+\alpha}(\overline{\Omega})$, 只要 f, h 和 φ 满足 $[(l+1)/2]$ 阶相容性条件, 斜微商问题(15)便有唯一解 $u(x, t)\in H^{l+2+\alpha, \frac{l+2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, 且有估计式

$$\|u\|^{Q_T}_{l+2+\alpha} \leqslant C(\|f\|^{Q_T}_{l+\alpha} + \|h\|^{S_T}_{l+1+\alpha} + \|\varphi\|^{\Omega}_{(l+2+\alpha)}),$$

其中常数 C 与 f, h 和 φ 无关.

关于 Никольский 空间 $H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}$, 有如下嵌入不等式.

引理 1 $\boldsymbol{u}\in H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{u}_x\in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$, 且

$$\langle \boldsymbol{u}_x\rangle_{0, \frac{\alpha}{2}} \leqslant C(\langle \boldsymbol{u}\rangle_{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}). \tag{16}$$

事实上, 对数值函数 u, 上述类型的不等式乃是[2]中第二章引理 3.1 取 β 为 $\dfrac{1+\alpha}{2}$, 而 α 不变的结果. 对 $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_N)\in H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}$, 将关于 $u_1, \cdots, u_N$ 的上述不等式相加, 即得(16).

引理 2 $\boldsymbol{u}\in H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{u}\in H^{r, \frac{r}{2}}$, 且

$$\langle \boldsymbol{u}\rangle_{r, r/2} \leqslant C[(\langle \boldsymbol{u}\rangle_{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}})^{\frac{r}{l+\alpha}} |\boldsymbol{u}|_0^{1-\frac{r}{l+\alpha}} + |\boldsymbol{u}|_0], \tag{17}$$

这里 $l=1$, $r=\alpha$, 1, 或 $l=2$, $r=\alpha$, 1, $1+\alpha$, 2. 当 r 为整数时 $\langle u_k\rangle_{r,0}=\sum|D^r_x u_k|_0$, $\langle u_k\rangle_{0,r}=|D^r_t u|_0$.

事实上, 对每个 $k\in\{1, \cdots, N\}$, 分别视 $u_k(x, t)$ 为 x 和 t 的函数, 相应地视 t 和 x 为

参数，引用 $C^{l+\alpha}$ 型空间的插值不等式(参看[4])，即得

$$\langle u_k\rangle_{r,0}\leqslant C[(\langle u_k\rangle_{l+\alpha,0})^{\frac{r}{l+\alpha}}|u_k|_0^{1-\frac{r}{l+\alpha}}+|u_k|_0],$$

$$\langle u_k\rangle_{0,\frac{r}{2}}\leqslant C[(\langle u_k\rangle_{0,\frac{l+\alpha}{2}})^{\frac{r}{l+\alpha}}|u_k|_0^{1-\frac{r}{l+\alpha}}+|u_k|_0].$$

合并以上二式并对 k 求和，即得(17)。

引理 3 设 $f_m(x,t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$ 关于 x 和 t 满足指数分别为 α 和 $\frac{\alpha}{2}$ 的 Hölder 条件，关于 u_k 和 p_{ij} 连续可微，且(8)式成立。设 $\boldsymbol{u}(x,t)\in H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}$。令

$$\tilde{f}_m(x,t)=f_m(x,t,\boldsymbol{u}(x,t),\boldsymbol{u}_x(x,t)), \tag{18}$$

则 $\tilde{f}_m\in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$，且

$$\|\tilde{f}_m\|_\alpha\leqslant\mu_1(|\boldsymbol{u}|_0)\varepsilon_1(\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})\left(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}\right), \tag{19}$$

其中 $\mu_1(\xi)$ 与 $\mu(\xi)$ 性质相同。

证 据(8)式，

$$|\tilde{f}_m|_0\leqslant\mu_1(|\boldsymbol{u}|_0)(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})^2\varepsilon_1(\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0}).$$

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{f}_m\rangle_{\alpha,0}&=\sup_{x\neq y}\frac{|f_m(x,t,\boldsymbol{u}(x,t),\boldsymbol{u}_x(x,t))-f_m(y,t,\boldsymbol{u}(y,t),\boldsymbol{u}_x(y,t))|}{|x-y|^\alpha}\\
&\leqslant\sup_{x\neq y}\frac{|f_m(x,t,\boldsymbol{u}(x,t),\boldsymbol{u}_x(x,t))-f_m(y,t,\boldsymbol{u}(x,t),\boldsymbol{u}_x(x,t))|}{|x-y|^\alpha}\\
&\quad+\sup_{x\neq y}\sum_{k=1}^N|f_{mk}|\frac{|u_k(x,t)-u_k(y,t)|}{|x-y|^\alpha}\\
&\quad+\sup_{x\neq y}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n|f_{mij}|\frac{\left|\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}-\frac{\partial u_i(y,t)}{\partial x_j}\right|}{|x-y|^\alpha}\\
&\leqslant\mu_1(|\boldsymbol{u}|_0)\varepsilon_1(\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})[(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})^2(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{\alpha,0})+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1+\alpha,0}(1+\langle u\rangle_{1,0})],
\end{aligned}$$

$$\langle\tilde{f}_m\rangle_{0,\frac{\alpha}{2}}\leqslant\mu_1(|\boldsymbol{u}|_0)\varepsilon_1(\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})[(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})^2(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{0,\frac{\alpha}{2}})+\langle\boldsymbol{u}_x\rangle_{0,\frac{\alpha}{2}}(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})],$$

其中

$$\begin{aligned}
f_{mk}=\int_0^1\frac{\partial f_m}{\partial u_k}(y,t,\boldsymbol{u}(y,t)+\theta[\boldsymbol{u}(x,t)-\boldsymbol{u}(y,t)],\boldsymbol{u}_x(y,t)\\
+\theta[\boldsymbol{u}_x(x,t)-\boldsymbol{u}_x(y,t)])d\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{mij}=\int_0^1\frac{\partial f_m}{\partial p_{ij}}(y,t,\boldsymbol{u}(y,t)+\theta[\boldsymbol{u}(x,t)-\boldsymbol{u}(y,t)],\boldsymbol{u}_x(y,t)\\
+\theta[\boldsymbol{u}_x(x,t)-\boldsymbol{u}_x(y,t)])d\theta.
\end{aligned}$$

根据这些估计式以及(16)和(17)，便可推知 $\tilde{f}_m\in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$，且

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}_m\|_\alpha&=|\tilde{f}_m|_0+\langle\tilde{f}_m\rangle_{\alpha,0}+\langle\tilde{f}_m\rangle_{0,\frac{\alpha}{2}}\\
&\leqslant\mu_1(|u|_0)\varepsilon_1(\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1,0})\left(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}\right).
\end{aligned}$$

现在考虑如下线性抛物方程组的定解问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}_m \boldsymbol{u} \equiv \dfrac{\partial u_m}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(x, t) \dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i,j=1}^{N,n} a_{mij}(x, t) \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum\limits_{k=1}^{N} a_{mk}(x, t) u_k \\ \qquad = f_m(x, t), \quad m=1, \cdots, N; \ (x, t) \in Q_T; \\ u_m|_{S_T} = 0, \quad m=1, \cdots, s; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(x, t) \cos(n, x_j) \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i} + \sum\limits_{k=1}^{N} b_{mk}(x, t) u_k = h_m(x, t), \quad m=s+1, \cdots, N; \\ u_m|_{t=0} = \varphi_m(x), \quad m=1, \cdots, N. \end{cases} \tag{20}$$

引理 4　设定解问题(20)中方程和定解条件的系数和右端以及 $\dfrac{\partial a_{ij}^{(m)}}{\partial x_j}$ 都有界

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(x, t) \xi_i \xi_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall m,$$

$\boldsymbol{u} \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$ 是问题(20)的解，则有能量不等式

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{u}^2(x, t) dx + \iint\limits_{Q_t} \boldsymbol{u}_x^2 dx dt \leqslant e^{ct} \left[\iint\limits_{Q_t} \sum_{m=1}^{N} f_m^2 dx dt + \iint\limits_{S_t} \sum_{m=s+1}^{N} h_m^2 ds dt + \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{N} \varphi_m^2 dx \right]. \tag{21}$$

其中 C 是与 f_m, h_m, φ_m 和 $\boldsymbol{u}$ 都无关的正常数.

证　乘第 m 个方程以 u_m，在 Q_t 上积分，并求和，我们得到

$$\sum_{m=1}^{N} \iint\limits_{Q_t} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_m^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} u_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{N,n} a_{mij} u_m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{N} a_{mk} u_m u_k \right] dx dt$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \iint\limits_{Q_t} u_m f_m dx dt.$$

通过分部积分，并应用定解条件 可得

$$\sum_{m=1}^{N} \iint\limits_{Q_t} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} u_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} dx dt = \sum_{m=s+1}^{N} \iint\limits_{S_t} \left(h_m - \sum_{k=1}^{N} b_{mk} u_k \right) u_m ds dt$$
$$- \sum_{m=1}^{N} \iint\limits_{Q_t} \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}^{(m)} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{ij}^{(m)}}{\partial x_i} u_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) dx dt,$$

$$\sum_{m=1}^{N} \iint\limits_{Q_t} \frac{\partial}{\partial t} u_m^2 dx dt = \sum_{m=1}^{N} \int_{\Omega} u_m^2(x, t) dx - \sum_{m=1}^{N} \int_{\Omega} \varphi_m^2 dx.$$

根据这些以及关于系数的假设，运用带小因子的 Cauchy 不等式和嵌入不等式，即可推出

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{u}^2(x, t) dx + \iint\limits_{Q_t} \boldsymbol{u}_x^2 dx dt \leqslant \iint\limits_{Q_t} \sum_{m=1}^{N} f_m^2 dx dt + \iint\limits_{S_t} \sum_{m=s+1}^{N} h_m^2 ds dt$$
$$+ \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{N} \varphi_m^2 dx + C \iint\limits_{Q_t} \boldsymbol{u}^2(x, t) dx dt,$$

由此即可得到能量不等式(21).

最后介绍一个 Schauder 不动点原理(例如见[5]之第四章注 10.2).

引理 5　设 $A(v)$ 是 Banach 空间 H 中的全连续变换. 若已知方程 $v = \tau A(v)$, $\tau \in [0, 1]$ 之所有可能的解之模 $|v|_H \leqslant R$，则方程 $v = A(v)$ 至少有一使 $|v|_H \leqslant R$ 的解.

§3. 定理1, 2的证明

首先证明定理1. 假定对以 τf_m 代 f_m 和以 $\tau\varphi_m$ 代 φ_m 的问题(1)—(2)之所有可能解 $\boldsymbol{u}(x,t)\in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$ 已有最大模估计: $\sup\limits_{D^T_{n+1}}|\boldsymbol{u}|\leqslant M$, 往估 $\|\boldsymbol{u}\|^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$.

对每个 $m\in\{1,\cdots,N\}$, 我们将 $u_m(x,t)$ 视作下述线性抛物方程初值问题之解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a^{(m)}_{ij}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}=\tau\tilde{f}_m(x,t), & (x,t)\in D^T_{n+1},\\ u_m|_{t=0}=\tau\varphi_m(x), & x\in E_n,\end{cases}$$

其中 $\tilde{f}_m(x,t)$ 如(18)所定义.

对上述问题应用定理 $A(l=0)$, 并注意引理2, 3, 得到

$$\|u_m\|^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha}\leqslant C\tau(\|\tilde{f}_m\|^{D^T_{n+1}}_{\alpha}+\|\varphi_m\|^{E_n}_{(2+\alpha)})\leqslant C\varepsilon_2(\langle\boldsymbol{u}\rangle^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha})[1+\langle\boldsymbol{u}\rangle^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha}],\quad\forall m,\tag{22}$$

从而

$$\langle\boldsymbol{u}\rangle^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha}\leqslant\|\boldsymbol{u}\|^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha}=\sum_{m=1}^{N}\|u_m\|^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha}\leqslant C\varepsilon_2(\langle\boldsymbol{u}\rangle^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha})[1+\langle\boldsymbol{u}\rangle^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha}].\tag{23}$$

按 $\varepsilon_2(\xi)$ 的性质, 存在 $M_2>1$, 使当 $\xi>M_2$ 时, $\varepsilon_2(\xi)<\dfrac{1}{2C}$. 由此以及(23)可见

$$\langle\boldsymbol{u}\rangle^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha}\leqslant M_2.$$

进而可得

$$\|\boldsymbol{u}\|^{D^T_{n+1}}_{1+\alpha},\ \|\boldsymbol{u}\|^{D^T_{n+1}}_{2+\alpha}\leqslant M_3\ (\text{常数}).\tag{24}$$

$\forall\boldsymbol{v}\in H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$, 据引理3, $f_m(x,t,\boldsymbol{v}(x,t),\boldsymbol{v}_x(x,t))\in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$. 因此, 按定理 A, 存在唯一的 $\boldsymbol{u}(x,t)\in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$, 满足下述初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a^{(m)}_{ij}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}=f_m(x,t,\boldsymbol{v}(x,t),\boldsymbol{v}_x(x,t)), & (x,t)\in D^T_{n+1},\\ u_m|_{t=0}=\varphi_m(x),\ x\in\Omega,\ m=1,\cdots,N.\end{cases}\tag{25}$$

这样一来, 我们就可以定义一个算子 A

$$\boldsymbol{u}=A(\boldsymbol{v}),\quad\forall\boldsymbol{v}\in H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}}),$$

而且这个算子变 $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$ 中的有界集为 $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$ 中的有界集, 因此是从 $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$ 到自身的紧算子.

设在 $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D^T_{n+1}})$ 中, $\lim\limits_{h\to\infty}\boldsymbol{v}^h=\boldsymbol{v}^0$. 令 $\boldsymbol{u}^h=A(\boldsymbol{v}^h)$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{h'}-\boldsymbol{u}^h$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^h-\boldsymbol{v}^{h'}$, 则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a^{(m)}_{ij}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}=\sum\limits_{i,j=1}^{N,n}f_{mij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+\sum\limits_{k=1}^{N}f_{mk}v_k, & (x,t)\in D^T_{n+1},\\ u_m|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega,\ m=1,\cdots,N,\end{cases}\tag{26}$$

其中

$$f_{mk}=\int_0^1\frac{\partial f_m}{\partial u_k}(x,t,\boldsymbol{v}^{h'}+\theta(\boldsymbol{v}^h-\boldsymbol{v}^{h'}),\boldsymbol{v}^{h'}_x+\theta(\boldsymbol{v}^h_x-\boldsymbol{v}^{h'}_x))d\theta,$$

$$f_{mij}=\int_0^1\frac{\partial f_m}{\partial p_{ij}}(x,t,\boldsymbol{v}^{h'}+\theta(\boldsymbol{v}^h-\boldsymbol{v}^{h'}),\boldsymbol{v}^{h'}_x+\theta(\boldsymbol{v}^h_x-\boldsymbol{v}^{h'}_x))d\theta.$$

按定理 1 的条件 3) 和 $\|v^h\|_{1+\alpha}^{D_{n+1}^T}$ 有界，容易推出 $\|f_{mk}\|_{\alpha}^{D_{n+1}^T}$，$\|f_{mij}\|_{\alpha}^{D_{n+1}^T}\leqslant C$. 于是，对问题(26)应用定理 A 即知

$$\|\boldsymbol{u}\|_{2+\alpha}^{D_{n+1}^T}=\sum_{m=1}^{N}\|u_m\|_{2+\alpha}^{D_{n+1}^T}\leqslant C\|\boldsymbol{v}\|_{1+\alpha}^{D_{n+1}^T}.$$

由此可见，$\{\boldsymbol{u}^h\}$ 是 $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D_{n+1}^T})$ 中的基本序列，因而存在 $\boldsymbol{u}^0\in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D_{n+1}^T})$，使按 $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D_{n+1}^T})$ 模，当然更按 $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D_{n+1}^T})$ 模，$\boldsymbol{u}^h\to\boldsymbol{u}^0(h\to\infty)$. 在 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^h$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^h$ 的初值问题(25)中，令 $h\to\infty$ 取极限，即知 $\boldsymbol{u}^0=A(\boldsymbol{v}^0)$，算子 A 连续.

综上所述，A 是从 $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D_{n+1}^T})$ 到自身的全连续算子.

容易看出，若 $\boldsymbol{u}=A(\boldsymbol{v})$ 是初值问题(25)之解，则对任何 $\tau\in[0,1]$，$\boldsymbol{w}=\tau A(\boldsymbol{v})$ 是下述初值问题之解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x_i\partial x_j}=\tau f_m(x,t,\boldsymbol{v}(x,t),\boldsymbol{v}_x(x,t)), & (x,t)\in D_{n+1}^T,\\ w_m|_{t=0}=\tau\varphi_m(x),\quad x\in\Omega,\ m=1,\cdots,N,\end{cases}$$

而方程 $\boldsymbol{v}=\tau A(\boldsymbol{v})$ 则对应于初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial^2 v_m}{\partial x_i\partial x_j}=\tau f_m(x,t,\boldsymbol{v}(x,t),\boldsymbol{v}_x(x,t)), & (x,t)\in D_{n+1}^T,\\ v_m|_{t=0}=\tau\varphi_m(x),\quad x\in\Omega,\ m=1,\cdots,N.\end{cases}$$

按照(24)，对于方程 $\boldsymbol{v}=\tau A(\boldsymbol{v})$ 之所有可能的解 $\boldsymbol{v}$，有估计式 $\|\boldsymbol{v}\|_{1+\alpha}^{D_{n+1}^T}\leqslant M_3$. 据引理 5，方程 $\boldsymbol{v}=A(\boldsymbol{v})$ 至少存在一解，即初值问题(1)—(2)至少存在一解 $\boldsymbol{u}\in H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D_{n+1}^T})$. 再次用定理 A，知 $\boldsymbol{u}$ 其实属于 $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D_{n+1}^T})$.

定理 1 于是得证.

下面对右端乘以 τ 后的非线性混合边值问题(3)—(6)的所有可能解 $\boldsymbol{u}(x,t)\in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$ 估计 $\|\boldsymbol{u}\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}^{Q_T}$，假定已知 $\sup\limits_{Q_T}|\boldsymbol{u}|\leqslant M$.

对 $m=1,\cdots,s$，将 $u_m(x,t)$ 视为下述线性抛物方程的第一边值问题之解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}=\tau\tilde{f}_m(x,t), & (x,t)\in Q_T,\\ u_m|_{S_T}=\tau g_m(x,t),\\ u_m|_{t=0}=\tau\varphi_m(x), & x\in\Omega.\end{cases}$$

应用定理 $B(l=0)$，并参考(22)，得到估计式

$$\begin{aligned}\|u_m\|_{2+\alpha}^{Q_T}&\leqslant C\tau(\|\tilde{f}_m\|_{\alpha}^{Q_T}+\|g_m\|_{2+\alpha}^{S_T}+\|\varphi_m\|_{(2+\alpha)}^{\Omega})\\&\leqslant C\varepsilon_3(\langle\boldsymbol{u}\rangle_{(2+\alpha)}^{Q_T})[1+\langle\boldsymbol{u}\rangle_{2+\alpha}^{Q_T}],\quad m=1,\cdots,S.\end{aligned}\tag{27}$$

对 $m=s+1,\cdots,N$，将 $u_m(x,t)$ 视为下述斜微商问题之解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}=\tau\tilde{f}_m(x,t), & (x,t)\in Q_T,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\Big|_{S_T}=\tau\tilde{h}_m(x,t),\\ u_m|_{t=0}=\tau\varphi_m(x), & x\in\Omega,\end{cases}\tag{28}$$

其中 $$\tilde{h}_m(x,\ t)=h_m(x,\ t,\ \boldsymbol{u}(x,\ t)).$$

为估算 $\|\tilde{h}_m\|^{S_T}_{1+\alpha,\ \frac{1+\alpha}{2}}$，我们在 $\partial\Omega$ 的局部坐标系

$$x=x(\xi),\quad \xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_{n-1}).$$

下将 $\tilde{h}_m(x,\ t)$ 表成

$$\tilde{h}_m(x(\xi),\ t)=h_m(x(\xi),\ t,\ \boldsymbol{u}(x(\xi),\ t)),$$

然后对 ξ_l 求导

$$\frac{\partial\tilde{h}_m}{\partial\xi_l}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_m}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_l}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial h_m}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_l}.$$

利用定理 2 中的条件 6) 和插值不等式(16), (17)，仿照引理 3 对 $\tilde{f}_m$ 的估计，容易得到

$$\tau|\tilde{h}_m|^{S_T}_0\leqslant\mu(M),$$

$$\tau\langle\tilde{h}_m\rangle_{0,\ \frac{1+\alpha}{2}}\leqslant C[1+\langle\boldsymbol{u}\rangle^{Q_T}_{0,\ \frac{1+\alpha}{2}}],$$

$$\tau\left\langle\frac{\partial\tilde{h}_m}{\partial\xi_l}\right\rangle_{\alpha,0}\leqslant C\|x(\xi)\|_{1+\alpha}[1+\langle\boldsymbol{u}\rangle^{Q_T}_{1+\alpha,0}].$$

因此

$$\tau\|\tilde{h}_m\|^{S_T}_{1+\alpha}\leqslant C[1+\langle\boldsymbol{u}\rangle^{Q_T}_{1+\alpha,\ \frac{1+\alpha}{2}}].\tag{29}$$

对斜微商问题(28)应用定理 $C(l=0)$，并注意(29)，即得

$$\begin{aligned}\|u_m\|^{Q_T}_{2+\alpha}&\leqslant C\tau(\|\tilde{f}_m\|^{Q_T}_{\alpha}+\|\tilde{h}_m\|^{S_T}_{1+\alpha}+\|\varphi_m\|^{\Omega}_{(2+\alpha)})\\&\leqslant C[1+\langle\boldsymbol{u}\rangle^{Q_T}_{1+\alpha}+s_4(\langle\boldsymbol{u}\rangle^{Q_T}_{2+\alpha})(1+\langle\boldsymbol{u}\rangle^{Q_T}_{2+\alpha})],\quad m=s+1,\ \cdots,\ N.\end{aligned}\tag{30}$$

合并(27)与(30)，乃得

$$\|\boldsymbol{u}\|^{Q_T}_{1+\alpha},\ \|\boldsymbol{u}\|^{Q_T}_{2+\alpha}\leqslant M_4(\text{常数}).\tag{31}$$

为证定理 2 的存在性部分，我们不妨假定 $\boldsymbol{\varphi}(x)=0$，并取 $H^{1+\alpha,\ \frac{1+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 的一个闭子空间

$$H=\{\boldsymbol{w}\in H^{1+\alpha,\ \frac{1+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T):\boldsymbol{w}(x,\ 0)=0\}.$$

$\forall\boldsymbol{v}\in H$, $f_m(x,\ t,\ \boldsymbol{v}(x,\ t),\ \boldsymbol{v}_x(x,\ t))\in H^{\alpha,\ \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $m=1,\ \cdots,\ N$; $h_k(x,\ t,\ \boldsymbol{v}(x,\ t))\in H^{1+\alpha,\ \frac{1+\alpha}{2}}(\bar{S}_T)$, $k=s+1,\cdots,N$. 按定理 2 的假设 7)，对于线性抛物型方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,\ t)\dfrac{\partial^2u_m}{\partial x_i\partial x_j}=f_m(x,\ t,\ \boldsymbol{v}(x,\ t),\ \boldsymbol{v}_x(x,\ t)),\quad(x,\ t)\in Q_T,\\ u_m|_{S_T}=g_m(x,\ t),\ u_m|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega.\end{cases}\tag{32}$$

$(\forall m=1,\ \cdots,\ s)$ 和斜微商问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,\ t)\dfrac{\partial^2u_m}{\partial x_i\partial x_j}=f_m(x,\ t,\ \boldsymbol{v}(x,\ t),\ \boldsymbol{v}_x(x,\ t)),\quad(x,\ t)\in Q_T,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{(m)}(x,\ t)\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\Big|_{S_T}=h_m(x,\ t,\ \boldsymbol{v}(x,\ t)),\\ u_m|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega\end{cases}\tag{33}$$

$(\forall m=s+1,\ \cdots,\ N)$，定理 B, C 所需的相容性条件全都满足. 因此，问题(32)和(33)唯一地确定一算子 A'

$$\boldsymbol{u}=A'(\boldsymbol{v}),\quad\forall\boldsymbol{v}\in H.$$

仿照关于算子 A 的推理可以证明 A' 的全连续性，进而根据估计式(31)，应用引理 5，即可

推出方程 $v=A'(v)$ 在 H 中可解.

若更设 $\dfrac{\partial a_{ij}^{(m)}}{\partial x_j}$ 在 $\bar{Q}_T$ 中有界, $b_i^{(m)}(x,t)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\cos(n,x_j)$, $i=1,\cdots,n$; $m=s+1,\cdots,N$, 则解的唯一性可从能量不等式(21)推出. 事实上, 设 u^1, u^2 都是问题(3)—(6)之属于 $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 的解, 令 $u=u^1-u^2$, 则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}=f_m(x,t,u^1,u_x^1)-f_m(x,t,u^2,u_x^2)\\ \qquad\qquad\equiv\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\partial\tilde{f}_m}{\partial u_k}u_k+\sum\limits_{i,j=1}^{N,n}\dfrac{\partial\tilde{f}_m}{\partial p_{ij}}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j},\quad m=1,\cdots,N;\\ u_m|_{S_T}=0,\quad m=1,\cdots,s;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\cos(n,x_j)\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\Big|_{S_T}=\sum\limits_{k=1}\dfrac{\partial\tilde{h}_m}{\partial u_k}u_k,\quad m=s+1,\cdots,N;\\ u_m|_{t=0}=0,\quad m=1,\cdots,N.\end{cases}$$

对上述问题写出能量不等式(21), 右端为 0, 因而 $u\equiv0$.

定理 2 于是全部得证.

注　应用定理 A, B, C 不难看出, 当提高已知函数和区域边界的光滑性, 并增加相容性条件时, 定理 1, 2 肯定其存在的解的光滑性也随之提高.

§4. 最大模估计

现在来证定理 3, 不妨认为 $\tau=1$, 并且只对非线性边值问题(3)—(6)证明估计式(12); 至于初值问题(1)—(2), 相应的估计式之证更为简单.

作函数变换 $u_m(x,t)=v_m(x,t)e^{bt}$ $(b>Nb_1)$, $w_m=v_m^2$, 则 $w_m=u_m^2e^{-2bt}$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_m}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial v_m}{\partial x_i}\dfrac{\partial v_m}{\partial x_j}+2bw_m\\ \quad=2e^{-bt}f_mv_m,\quad m=1,\cdots,N,\ (x,t)\in Q_T;\\ w_m|_{S_T}=e^{-2bt}g_m^2(x,t),\quad m=1,\cdots,s,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{(m)}(x,t)\dfrac{\partial w_m}{\partial x_i}\Big|_{S_T}=2e^{-bt}h_m(x,t,u)v_m,\quad m=s+1,\cdots,N,\\ w_m|_{t=0}=\varphi_m^2(x),\quad m=1,\cdots,N,\ x\in\Omega.\end{cases}$$

设 $1\leqslant\bar{m}\leqslant N$, $(x_0,t_0)\in\bar{Q}_T$, 使 $w_{\bar{m}}(x_0,t_0)\geqslant\max\limits_{1\leqslant m\leqslant N}\max\limits_{\bar{Q}_T}w_m(x,t)$.

若 $(x_0,t_0)\in Q_T$, 则

故从方程和关于 f_m 的假设, 在此点可得

$$2bw_{\bar{m}0}\leqslant2e^{-bt}f_{\bar{m}0}v_{\bar{m}0}\leqslant2e^{-2bt}\left[b_1\sum_{k=1}^{N}u_k^2+b_2\right]\leqslant2Nb_1w_{\bar{m}}+2b_2,$$

从而

$$w_{\bar{m}}(x_0,t_0)\leqslant\frac{b_2}{b-Nb_1}.$$

若 $(x_0,t_0)\in S_T$, $w_{\bar{m}0}(x_0,t_0)\neq0$, 则关于边值的假设, 必有 $\bar{m}\leqslant s$, 因而

$$w_{\bar{m}}(x_0,t_0)\leqslant\sup_{\substack{(x,t)\in S_T\\1\leqslant m\leqslant s}}g_m^2(x,t).$$

若 $t_0=0$, 则

$$w_{\bar{m}}(x_0,\ t_0) \leqslant \sup_{m,\bar{\Omega}} \varphi_m^2(x).$$

综上所述，即得

$$|u|^2 = \sum_{m=1}^{N} u_m^2 \leqslant N \sup_{m,\bar{Q}_T} u_m^2 \leqslant N e^{2bT} \sup_{m,\bar{Q}_T} w_m\ (x_0,\ t_0)$$

$$\leqslant N e^{2bT}\left[\sup_{m,\bar{\Omega}} \varphi_m^2(x) + \sup_{\substack{(x,t)\in S_T \\ 1<m<s}} g_m^2(x,\ t) + \frac{b_2}{b-Nb_1}\right].$$ 证毕.

(12)式得证.

参 考 文 献

[1] Ладыженская, О. А., Уральцева, Н. Н., Краевая задач для линейных и квази-линейных уравнений и систем параьолического Типа, III, *Изв. АН СССР, Сер. Матем.*, **27** (1963), 161—240.

[2] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параьолического типа, «Наука», М., 1967.

[3] 周毓麟，关于拟线性椭圆型方程与抛物型方程的非线性边界问题，吉林大学自然科学学报，**1** (1980), 19—46.

[4] Миранда, К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, И*Л, М., 1957.

[5] Ладыженская, О. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптическото типа, «Наука», М., 1973.

THE INITIAL VALUE PROBLEMS AND NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF THE SECOND ORDER QUASILINEAR PARABOLIC SYSTEMS

YAN ZIQIAN

(*Jilin University*)

ABSTRACT

In this paper initial value problems and nonlinear mixed boundary value problems for the quasilinear parabolic systems below

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x,\ t)\, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = f_k(x,\ t,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_x), \quad k=1,\ \cdots,\ N$$

are discussed. The boundary value conditions are

$$u_k|_{\partial\Omega} = g_k(x,\ t), \quad k=1,\ \cdots,\ s,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{(k)}(x,\ t)\, \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\bigg|_{\partial\Omega} = h_k(x,\ t,\ \boldsymbol{u}), \quad k=s+1,\ \cdots,\ N.$$

Under some "basically natural" assumptions it is shown by means of the Schauder type estimates of the linear parabolic equations and the embedding inequalities in Nikol'skii spaces, these problems have solutions in the spaces $H^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}$ $(0<\alpha<1)$. For the boundary value problem with $b_i^{(k)}(x,\ t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x,\ t)\cos(n,\ x_j)$ uniqueness theorem is proved.