数 学 年 刊
3 (1) 1982

一类二阶非线性微分方程的极限边值问题

梁 中 超
(山东大学)

§1. 引 言

本文考虑极限边值问题

$$\ddot{x}=f(t,\ x)g(\dot{x}), \tag{F}$$

$$a\dot{x}(0)+bx(0)=c, \tag{A}$$

$$x(+\infty)=0 \tag{B}$$

解的存在和唯一性. 此类边值问题是从物理学的研究中提出的(见[1],第12章, §7; [2]及其引用文献). 关于解的存在性研究已有许多工作[1-8],但是除了对线性方程及"几乎不含 $\dot{x}$" 的非线性方程[6-8],建立的充要条件之外, 其它的结果均为充分条件. 在本文中,将给出边值问题(F), (A), (B)解的存在性之充要条件和唯一性的充分条件.

假定函数 $f(t,\ x)$, $g(\dot{x})$ 是连续的 $\{t\geqslant0,\ -\infty<x,\ \dot{x}<+\infty\}$, 并且满足保证解的唯一性及对初值的连续依赖性的条件. 此外,设 1) $f(t,\ 0)\equiv0$, $f(t,\ x)/x>0(x\neq0)$; 2) 函数 $f(t,\ x)/x$ 对固定的 t,当 $x>0$ 时是不减的, 当 $x<0$ 时是不增的; 3) $g(\dot{x})>0$. 在引理2及定理1中还假定 4) $\int_0^{\pm\infty}dy/g(y)=\pm\infty$.

在条件(A)中,设 $ab\leqslant0$, $a^2+b^2>0$, $c\neq0$. 因此 (A) 可分为如下三种边界条件进行讨论

$$x(0)=p\quad(p\neq0), \tag{A$_1$}$$

$$\dot{x}(0)=q\quad(q\neq0), \tag{A$_2$}$$

$$\dot{x}(0)=kx(0)+r\quad(k>0,\ r\neq0). \tag{A$_3$}$$

如果对任意的 $\alpha\neq0$, 有

$$\int_0^{+\infty}\alpha tf(t,\ \alpha)dt=+\infty,$$

则以下称 $f(t,\ x)$ 属于 I_∞ 类. 记为 $f(t,\ x)\in I_\infty$.

§2. 引 理

引理 1 设 $x(t)$ 为(F)的任一非零解, $t\in[t_0,\ \bar{t})$, $[t_0,\ \bar{t})$ 是 $x(t)$ 的右向最大延展区

本文1980年5月8日收到.

间, $0\leqslant t_0<\bar{t}\leqslant+\infty$,则 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 为最终的严格单调函数*,并且有:

1° 当 $x(t_0)\geqslant 0$, $\dot{x}(t_0)\geqslant 0$, $x(t_0)+\dot{x}(t_0)>0$ 时, $x(t)$ 满足

$$x(t)>0,\quad \dot{x}(t)>0,\quad t\in(t_0,\ \bar{t});\tag{2.1}$$

2° 当 $x(t_0)\leqslant 0$, $\dot{x}(t_0)\leqslant 0$, $x(t_0)+\dot{x}(t_0)<0$ 时, $x(t)$ 满足

$$x(t)<0,\quad \dot{x}(t)<0,\quad t\in(t_0,\ \bar{t});\tag{2.2}$$

3° 当 $x(t_0)>0$, $\dot{x}(t_0)<0$ 时, $x(t)$ 有三种: 最终地满足(2.1)和(2.2), 以及

$$0<x(t)\leqslant x(t_0),\quad \dot{x}(t_0)\leqslant\dot{x}(t)<0,\quad t\in[t_0,\ +\infty);\tag{2.3}$$

4° 当 $x(t_0)<0$, $\dot{x}(t_0)>0$ 时, $x(t)$ 有三种: 最终地满足(2.1)和(2.2), 以及

$$x(t_0)\leqslant x(t)<0,\quad 0<\dot{x}(t)\leqslant\dot{x}(t_0),\quad t\in[t_0,\ +\infty).\tag{2.4}$$

引理 1 见[8]的引理 1 和 2 及其附注.

引理 2 对任意给定的 $p\neq 0$, 存在这样的 $\beta\neq 0$, 使得 Cauchy 问题 (F), $x(0)=p$, $\dot{x}(0)=\beta$ 的解 $x(t,\ p,\ \beta)$ 最终地满足

$$\operatorname{sgn}x(t,\ p,\ \beta)=\operatorname{sgn}\dot{x}(t,\ p,\ \beta)=\operatorname{sgn}(-p).\tag{2.5}$$

证 先设 $p>0$. 对某一确定的 $T>0$, 取满足下式的 β

$$\int_\beta^{-\frac{p}{T}}\frac{dy}{g(y)}>MT,\tag{2.6}$$

其中 $M=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant p}f(t,\ x)$. 显然, $M>0$. 根据条件 3), 4) 知, 这样的 β 是存在的, 并且 $\beta<-p/T$.

下面证明: 解 $x(t,\ p,\ \beta)$ 在 $(0,\ T]$ 内有零点. 事实上, 若不然, 则有

$$x(t,\ p,\ \beta)>0,\quad t\in[0,\ T].\tag{2.7}$$

以下将引出矛盾. 为此, 先指出

$$\dot{x}(t,\ p,\ \beta)<-\frac{p}{T},\quad t\in[0,\ T].\tag{2.8}$$

事实上, 若存在 $t'\in(0,\ T]$, 使得

$$\dot{x}(t',\ p,\ \beta)=-\frac{p}{T},\tag{2.9}$$

而当 $t\in[0,\ t')$ 时, 有 $\dot{x}(t,\ p,\ \beta)<-p/T$, 那么, 当 $t\in[0,\ t')$ 时, 有 $0<x(t,\ p,\ \beta)\leqslant p$. 因此, 由 (F) 及条件 3), 当 $t\in[0,\ t')$ 时, 有

$$\int_\beta^{\dot{x}(t)}\frac{dy}{g(y)}=\int_0^t f[\tau,\ x(\tau,\ p,\ \beta)]d\tau\leqslant Mt.$$

令 $t=t'$, 并且注意到 (2.6), (2.9) 式得

$$MT<\int_\beta^{-\frac{|p|}{T}}\frac{dy}{g(y)}\leqslant Mt'.$$

这个矛盾结果指出(2.8)式成立, 从 0 到 T 积分(2.8)式得

$$x(T,\ p,\ \beta)<x(0,\ p,\ \beta)-\frac{p}{T}T=0.$$

此式与(2.7)式抵触. 因此, 存在 $t_0\in(0,\ T]$, 使 $x(t_0,\ p,\ \beta)=0$. 此时, 显然有 $\dot{x}(t_0,\ p,\ \beta)<0$. 根据引理 1, 2° 推知, 解 $x(t,\ p,\ \beta)$ 最终地满足(2.2)式. 从而(2.5)式成立.

* 即存在 $t'(t_0\leqslant t'<\bar{t})$, 使当 $t\geqslant t'$ 时, $x(t)$, $\dot{x}(t)$ 为严格单调函数.

同理可证 $p<0$ 的情况.

引理 3 对任意给定的 $q\neq 0$, 存在这样的 $\alpha\neq 0$, 使得 Cauchy 问题 (F), $x(0)=\alpha$, $\dot{x}(0)=q$ 的解 $x(t,\alpha,q)$ 最终地满足

$$\operatorname{sgn} x(t,\alpha,q)=\operatorname{sgn}\dot{x}(t,\alpha,q)=\operatorname{sgn}(-q). \tag{2.10}$$

证　先设 $q>0$. 对某一确定的 $T>0$, 取满足下式的 α

$$\alpha<2\min\left\{-\frac{q}{mQ},\ -qT\right\}, \tag{2.11}$$

其中
$$m=\min_{0<\dot{x}<q} g(\dot{x}),\qquad Q=(-qT)^{-1}\int_0^T f(t,\ -qT)\,dt.$$

显然, $m>0$, $Q>0$, $\alpha<0$.

下面证明: $\dot{x}(t,\alpha,q)$ 在 $(0,T]$ 内有零点. 事实上, 若不然, 则有

$$\dot{x}(t,\alpha,q)>0,\quad t\in[0,T]. \tag{2.12}$$

以下将引出矛盾. 为此, 先指出

$$\ddot{x}(t,\alpha,q)<0,\quad t\in[0,T]. \tag{2.13}$$

事实上, 由条件 1), 3) 知, $\ddot{x}(0)=f(0,\alpha)g(q)<0$. 若存在 $t'\in(0,T]$, 使 $\ddot{x}(t',\alpha,q)=0$, 而当 $t\in[0,t')$ 时, $\ddot{x}(t,\alpha,q)<0$. 从而, 当 $t\in[0,t')$ 时, 有 $\dot{x}(t,\alpha,q)<q$. 再注意到 (2.11) 式便得, 当 $t\in[0,t')$ 时

$$x(t,\alpha,q)=\alpha+\int_0^t \dot{x}(\tau,\alpha,q)\,d\tau<\frac{\alpha}{2}-qT+qt<\frac{\alpha}{2}. \tag{2.14}$$

由解的连续性得 $x(t',\alpha,q)\leqslant\alpha/2$. 根据条件 1), 3) 得 $\ddot{x}(t',\alpha,q)<0$. 这个矛盾结果指出 (2.13) 式成立. 因此, 由 (2.11)—(2.13) 式以及用类似于 (2.14) 式的推导得

$$0<\dot{x}(t,\alpha,q)\leqslant q, \tag{2.15}$$

$$x(t,\alpha,q)<\frac{\alpha}{2}<-qT. \tag{2.16}$$

再由 (F), 条件 1)—3) 以及 (2.11), (2.15), (2.16) 式得

$$\begin{aligned}\dot{x}(T,\alpha,q)&=q+\int_0^T x(t,\alpha,q)\,\frac{f[t,\ x(t,\alpha,q)]}{x(t,\alpha,q)}\,g[\dot{x}(t,\alpha,q)]\,dt\\&\leqslant q+\frac{\alpha}{2}m\int_0^T\frac{f(t,\ -qT)}{-qT}\,dt\leqslant q+\frac{\alpha}{2}mQ<q+\left(-\frac{q}{mQ}\right)mQ=0.\end{aligned}$$

此式与 (2.12) 式抵触. 因此, 存在 $t_0\in(0,T]$, 使得 $\dot{x}(t_0,\alpha,q)=0$. 此时, 显然有 $x(t_0,\alpha,q)<0$. 根据引理 1, 2° 知, (2.10) 式成立.

同理可证 $q<0$ 的情况.

§3. 边值问题 (F), (A_1), (B)

定理 1 对任意给定的 $p\neq 0$, 边值问题 (F), (A_1), (B) 存在解的充要条件为 $f(t,x)\in I_\infty$.

证　充分性. 先证 $p>0$ 的情况. 设 $\{\beta\}$ 是这样的数集, 使对其中任一数 β, Cauchy 问题 (F), $x(0)=p$, $\dot{x}(0)=\beta$ 的解 $x(t,p,\beta)$ 满足 (2.1) 式. 根据引理 1, 1° 知, 集合 $\{\beta\}$ 是非空的; 根据引理 2 知, 集合 $\{\beta\}$ 有下界. 因此, 集合 $\{\beta\}$ 有下确界. 设 $\inf\{\beta\}=\eta$.

显然，$\eta<0$. 根据 η 的意义及解对初值的连续依赖性知，Cauchy 问题 (F)，$x(0)=p$，$\dot{x}(0)=\eta$ 的解 $x(t, p, \eta)$ 不能最终地满足(2.1)或(2.2)式. 再由引理1, 3° 知，$x(t, p, \eta)$ 必满足(2.3)式. 即当 $t\in[0, +\infty)$ 时，有

$$0<x(t, p, \eta)\leqslant p, \quad \eta\leqslant\dot{x}(t, p, \eta)<0. \tag{3.1}$$

从而，$x(+\infty)=x_\infty$ 存在，并且 $x_\infty\geqslant 0$.

下面指出，$x(t, p, \eta)$ 满足 (B). 即 $x_\infty=0$. 事实上，若 $x_\infty>0$，则有 $x_\infty<x(t, p, \eta)\leqslant p$. 再由 (F) 及条件 1)—3) 得

$$\begin{aligned}x(t)&=p+t\dot{x}(t)-\int_0^t \tau f[\tau, x(\tau, p, \eta)]g[\dot{x}(\tau, p, \eta)]d\tau\\&<p-m\int_0^t \tau f(\tau, x_\infty)d\tau,\end{aligned}$$

其中 $m=\min\limits_{\eta<\dot{x}<0} g(\dot{x})$. 因 $f(t, x)\in I_\infty$，故对充分大的 t 有 $x(t, p, \eta)<0$. 这与(3.1)式的前者抵触. 因此，$x(t, p, \eta)$ 满足 (B) 式.

对 $p<0$ 的情况同理可证.

必要性. 设存在常数 $\alpha_1\neq 0$，使得

$$\int_0^{+\infty}\alpha_1 t f(t, \alpha_1)dt<+\infty. \tag{3.2}$$

取与 α_1 同号的 $p\neq 0$. 不妨设 $\alpha_1>0$, $p>0$. 根据假定，问题(F), (A_1), (B)存在解 $x(t)$. 再由引理1, 3° 知，$x(t)$ 必满足

$$0<x(t)\leqslant p, \quad \dot{x}(0)\leqslant\dot{x}(t)<0, \quad t\in[0, +\infty). \tag{3.3}$$

显然，$x(+\infty)=x_\infty=0$, $\dot{x}(+\infty)=\dot{x}_\infty=0$. 因此，存在 $T>0$，使当 $t\geqslant T$ 时，$0<x(t)<\alpha_1$. 并且 $x(t)$ 满足

$$x(t)=\int_t^{+\infty}d\tau\int_\tau^{+\infty}f[s, x(s)]\,g[\dot{x}(s)]ds,$$

上式两端除以 $x(t)$，再注意到(3.3)式及条件 1)—3)，当 $t\geqslant T$ 时，有

$$1<\int_t^{+\infty}d\tau\int_\tau^{+\infty}\frac{f[s, x(s)]}{x(s)}g[\dot{x}(s)]ds<G\int_t^{+\infty}d\tau\int_\tau^{+\infty}\frac{f(s, \alpha_1)}{\alpha_1}ds \tag{3.4}$$

其中 $G=\max\limits_{\dot{x}(0)<\dot{x}<0} g(\dot{x})$. 显然，$G>0$. 根据(3.2)式，易证(3.4)式右端的积分满足

$$\lim_{t\to+\infty}\int_t^{+\infty}d\tau\int_\tau^{+\infty}f(s, \alpha_1)ds=0.$$

这个矛盾证明了必要性.

同理可证 $\alpha_1<0$ 的情况. 证毕.

§4. 边值问题(F), (A_2), (B)

定理2 对任意给定的 $q\neq 0$，边值问题 (F), (A_2), (B) 存在解的充要条件为 $f(t, x)\in I_\infty$.

事实上，证明解的存在性时利用引理3. 此定理的证明与定理1类似，故从略.

§5. 边值问题(F), (A_3), (B)

定理 3　对任意给定的 $k>0$ 和 $r\neq 0$, 边值问题 (F), (A_3), (B) 存在解的充要条件为 $f(t, x)\in I_\infty$.

此定理的证明与定理 1 类似, 故从略.

§6. 唯　一　性

定理 4　设条件 1)—3) 成立, 则边值问题(F), (A_j), (B)最多有一个解$(j=1, 2, 3)$.

证　以下仅证明边值问题(F), (A_1), (B)解的唯一性. 而其它的两个边值问题可以类似地证明.

如果边值问题 (F), (A_1), (B) 有两个解 $x_1(t)$, $x_2(t)$, 那么 $x_1(0)=x_2(0)=p$, $\dot{x}_1(0)\neq\dot{x}_2(0)$. 不妨设 $\dot{x}_2(0)>\dot{x}_1(0)$. 显然, 对充分小的 $t>0$, 有

$$x_2(t)>x_1(t), \tag{6.1}$$

$$\dot{x}_2(t)>\dot{x}_1(t). \tag{6.2}$$

由(F)及条件 3) 得

$$\int_{\dot{x}_1(t)}^{\dot{x}_2(t)}\frac{dy}{g(y)}=\int_{\dot{x}_1(0)}^{\dot{x}_2(0)}\frac{dy}{g(y)}+\int_0^t\{f[\tau, x_2(\tau)]-f[\tau, x_1(\tau)]\}d\tau.$$

根据条件 2), 对使 (6.1) 式成立的 $t>0$, 总有 $f[t, x_2(t)]-f[t, x_1(t)]\geqslant 0$. 因此, 对上述 t 值有

$$\int_{\dot{x}_1(t)}^{\dot{x}_2(t)}\frac{dy}{g(y)}\geqslant\int_{\dot{x}_1(0)}^{\dot{x}_2(0)}\frac{dy}{g(y)}>0,$$

从而, (6.2)式也保持成立. 若存在 $t'>0$, 使得 $x_2(t')=x_1(t')$, 则必存在 $t''\in(0, t')$, 使得 $\dot{x}_2(t'')=\dot{x}_1(t'')$. 此与已证明的结论抵触. 因此, 对一切 $t>0$, (6.1)和(6.2)式恒成立.

从 0 到 $+\infty$ 积分(6.2)式得

$$x_2(+\infty)-x_1(+\infty)=\int_0^{+\infty}[\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)]dt>0.$$

这与 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 满足 (B) 式矛盾. 唯一性得证.

参　考　文　献

[1] Сансоне, ДЖ., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Т. П, Москва, 1954.

[2] Мышкис, А. Д., Щербина, Г. В., Об одной предельной краевой задаче, не удовлетворяющей условию С. Н. Бернштейна и имеющей приложение в теории капиллярных явлений. «*Дифф. Урав.*», **XII**: 6 (1976), 991—998.

[3] Клоков, Ю. А., Метод решения предельной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второло порядка, *Мат. СБ.*, **53**(95) (1961), 219—232.

[4] Клоков, Ю. А., Об одной краевой задаге с условием на бесконенности для обыкновенного дифференциального уравления второго порядка, *УМН*, **17**:2(1962), 145—149.

[5] Клоков, Ю. А. Одна Предельная краевая задача для уравнения $\ddot{x}+\dot{x}f(x, \dot{x})+\varphi(x)=0$, *Изв. ВУЗ'ов, Мат.*, **6**(1959), 72—79.

[6] Hartman, P., Wintner, A., On the non-increasing solutions of $y''=f(x, y, y')$, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 390—404.

[7] 梁中超, 一类二阶非线性微分方程解的渐近性状, 数学进展, **9**(1966), 251—264.

[8] 梁中超, 二阶非线性微分方程在无穷区间上的边值问题, 应用数学学报, **4** (1981), 272—279.

LIMIT BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

LIANG ZHONGCHAO
(*Shandong University*)

ABSTRACT

In this paper, the existence and uniqueness of solution of the limit boundary value problem

$$\ddot{x}=f(t,\ x)g(\dot{x}), \tag{F}$$

$$a\dot{x}(0)+bx(0)=c, \tag{A}$$

$$x(+\infty)=0 \tag{B}$$

is considered, where $f(t,\ x)$, $g(\dot{x})$ are continuous functions on $\{t\geqslant 0, -\infty<x,\ \dot{x}<+\infty\}$ such that the uniqueness of solution together with thier continuous dependence on initial value are ensured, and assume: 1) $f(t,\ 0)\equiv 0$, $f(t,x)/x>0(x\neq 0)$; 2) $f(t,x)/x$ is nondecreasing in $x>0$ for fixed t and non-increasing in $x<0$ for fixed t; 3) $g(\dot{x})>0$. In theorem 1, further assume: 4) $\int_0^{\pm\infty} dy/g(y)=\pm\infty$.

Condition (A) may be discussed in the following three cases

$$x(0)=p \quad (p\neq 0), \tag{A$_1$}$$

$$\dot{x}(0)=q \quad (q\neq 0), \tag{A$_2$}$$

$$\dot{x}(0)=kx(0)+r \quad (k>0,\ r\neq 0). \tag{A$_3$}$$

The notation $f(t,\ x)\in I_\infty$ will refer to the function $f(t,\ x)$ satisfying

$$\int_0^{+\infty} \alpha t f(t,\ \alpha)\,dt=+\infty,$$

for each $\alpha\neq 0$.

Theorem 1. For each $p\neq 0$, the boundary value problem (F), (A_1), (B) has a solution if and only if $f(t,\ x)\in I_\infty$.

Theorem 2. For each $q\neq 0$, the boundary value problem (F), (A_2), (B) has a solution if and only if $f(t,\ x)\in I_\infty$.

Theorem 3. For each $k>0$ and $r\neq 0$, the boundary value problem (F), (A_3), (B) has a solution if and only if $f(t,\ x)\in I_\infty$.

Theorem 4. The boundary value problem (F), (A_j), (B) has at most one solution for $j=1,\ 2,\ 3$.