

关于单叶亚纯函数系数的 Springer 猜想

姚 璧 芸
(杭州大学)

我们把区域 $1 < |z| < \infty$ 上的单叶函数

$$F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

的全体记作 Σ' . $F(z)$ 的逆函数记作 $G(w)$, 它在 ∞ 领域的展式是

$$G(w) = w - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{w^n}.$$

易知对任意的 $F(z) \in \Sigma'$ 总有 $|B_1| \leq 1$. Springer^[1] 证明 $|B_3| \leq 1$ 并且猜测

$$|B_{2n-1}| \leq \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n-1} \quad (n=3, 4, \dots). \quad (1)$$

Kubota^[2] 证明(1)式当 $n=3, 4, 5$ 时成立. Schober^[3] 证明(1)式当 $n=6, 7$ 时成立. 任福尧^[4, 5] 证明(1)式当 $n=6, 7, 8$ 时成立. 我们现在证明当 $n=9$ 时(1)式也成立.

引理 1^[3] 设 $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n/z^n \in \Sigma'$, $G(w) = F^{-1}(w) = w - \sum_{n=1}^{\infty} B_n/w^n$ 是在 ∞ 领域的展式, 则

$$|B_{2N-1}| \leq 1 + \sum_{n=1}^{N-2} |B_N^{(-n)}|^2 \quad (N=3, 4, \dots). \quad (2)$$

其中

$$B_N^{(-n)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=N-n-m \\ m, k_1, k_2, \dots, k_m \geq 1}} \binom{n+m-1}{m} B_{k_1} B_{k_2} \dots B_{k_m}.$$

引理 2^[1] 设 $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n/z^n \in \Sigma'$, 记 $K = b_1^2 + 2b_3$, 则

$$|K| \leq 1. \quad (3)$$

定理 设 $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n/z^n \in \Sigma'$, $G(w) = F^{-1}(w) = w - \sum_{n=1}^{\infty} B_n/w^n$ 是在 ∞ 领域的展式, 则成立着

$$|B_{17}| \leq 1430. \quad (4)$$

此不等式是准确的, 等号由函数 $F(z) = z + \eta/z$ ($|\eta|=1$) 的逆函数的系数所达到.

证 根据(2)式有

$$|B_{17}| \leq 1 + \sum_{n=1}^7 |B_9^{(-n)}|^2, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}
 B_9^{-1} &= B_7 + 2B_1B_5 + 2B_2B_4 + B_3^2 + 3B_1^2B_3 + 3B_1B_2^2 + B_1^4, \\
 B_9^{-2} &= 2B_6 + 6B_1B_4 + 6B_2B_3 + 12B_1^2B_2, \\
 B_9^{-3} &= 3B_5 + 12B_1B_3 + 6B_2^2 + 10B_1^3, \\
 B_9^{-4} &= 4B_4 + 20B_1B_2, \\
 B_9^{-5} &= 5B_3 + 15B_1^2, \\
 B_9^{-6} &= 6B_2, \\
 B_9^{-7} &= 7B_1.
 \end{aligned} \tag{6}$$

我们再算出

$$\begin{aligned}
 B_1 &= b_1, \quad B_2 = b_2, \quad B_3 = b_3 + b_1^2, \quad B_4 = b_4 + 3b_1b_2, \\
 B_5 &= b_5 + 2b_1^3 + 4b_1b_3 + 2b_2^2, \\
 B_6 &= b_6 + 5b_1b_4 + 10b_1^2b_2 + 5b_2b_3, \\
 B_7 &= b_7 + 6b_1b_5 + 5b_1^4 + 15b_1^2b_3 + 15b_1b_2^2 + 6b_2b_4 + 3b_3^2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

将(7)中各式代入(6)中各式的平方,同时对 $(B_9^{-1})^2$, $(B_9^{-3})^2$ 及 $(B_9^{-5})^2$ 的右端用 $B_1(=b_1)$, B_3 , B_5 , B_7 及 K 的多项式来逼近,使余下的项都含有因子 $b_ib_j (i \geq j \geq 2)$,如此得到

$$\begin{aligned}
 (B_9^{-1})^2 &= 2.8B_7^2 + 14b_1^2B_5^2 + 70b_1^6K - 4b_1^4b_3^2 + 28b_1^2b_3^2B_3 \\
 &\quad - 19.2b_1^2b_3b_7 + 8.8b_3b_7B_3 - 131.2b_1^3b_3b_5 + 36.8b_1b_3b_5B_3 \\
 &\quad + 168b_1^5b_2^2 - 84b_1^3b_2^2B_3 - 19.2b_1^2b_2b_3b_4 + 36.8b_2b_3b_4B_3 \\
 &\quad - 1.8b_7^2 - 50.8b_1^2b_5^2 + 98b_1^2b_4^2 - 36.8b_2^2b_4^2 - 9.2b_4^4 \\
 &\quad - 17.6b_1b_5b_7 - 28b_1b_2^2b_7 - 17.6b_2b_4b_7 - 112b_1^2b_2^2b_5 \\
 &\quad - 73.6b_1b_2b_4b_5 + 56b_1^4b_2b_4 - 56b_1b_2^2b_4 - 28b_1b_2^2b_3^2, \\
 (B_9^{-2})^2 &= 4b_6^2 + 256b_1^2b_4^2 + 1600b_1^4b_2^2 + 256b_2^2B_3^2 + 64b_1b_4b_6 + 160b_1^2b_2b_6 \\
 &\quad - 64b_2b_6B_3 + 1280b_1^3b_2b_4 - 512b_1b_2b_4B_3 - 1280b_1^2b_2^2B_3, \\
 (B_9^{-3})^2 &= 42B_5^2 + 336b_1^4K + 280b_1^6 - 33b_5^2 - 96b_1^2b_3^2 - 24b_4^2 - 192b_1b_3b_5 \\
 &\quad - 96b_2^2b_5 + 336b_1^2b_2^2 - 96b_1b_2^2b_3, \\
 (B_9^{-4})^2 &= 16b_4^2 + 1024b_1^2b_2^2 + 256b_1b_2b_4, \\
 (B_9^{-5})^2 &= 300b_1^4 + 100b_1^2K + 25b_3^2, \\
 (B_9^{-6})^2 &= 36b_2^2, \\
 (B_9^{-7})^2 &= 49b_1^2.
 \end{aligned}$$

将以上各式代入(5),利用 $|B_3| \leq 1$, $|B_5| \leq 2$, $|B_7| \leq 5$, $|K| \leq 1$ 以及面积原理

$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ 可得

$$\begin{aligned}
 |B_{17}| &\leq 239 + 1191|b_1|^2 + 2112|b_2|^2 + 153|b_3|^2 + 272|b_4|^2 \\
 &\quad + 84|b_5|^2 + 4|b_6|^2 + 2|b_7|^2 + 96|b_2b_3| + 2104|b_2b_4| \\
 &\quad + 208|b_2b_5| + 224|b_2b_6| + 28|b_2b_7| + 56|b_3b_4| + 360|b_3b_5| \\
 &\quad + 28|b_3b_7| + 74|b_4b_5| + 64|b_4b_6| + 18|b_4b_7| + 18|b_5b_7|.
 \end{aligned}$$

在最后的式子中利用不等式 $2ab \leq a^2 + b^2$ 以及面积原理遂得

$$|B_{17}| \leq 1430.$$

显然, 对 $F(z) = z + \eta/z (|\eta| = 1)$ 的逆函数有 $|B_{17}| = 1430$.

注 本文曾在 1979 年 8 月全国单复变函数论会议上宣读.

参 考 文 献

- [1] Springer, G., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70**(1951), 421—450.
- [2] Kubota, Y., *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **28**(1977), 253—261.
- [3] Schober, G., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **67**(1977), 111—116.
- [4] 任福尧, 复旦大学学报(自然科学版), **4**(1978), 93—96.
- [5] 任福尧, 科学通报, **5**(1980), 193—195.

ON THE SPRINGER'S CONJECTURE OF THE COEFFICIENTS OF UNIVALENT MEROMORPHIC FUNCTIONS

YAO BIYUN

(Hangzhou University)

ABSTRACT

Let Σ' denote the family of univalent functions

$$F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

in $1 < |z| < \infty$. If $G(w)$ is the inverse of a function $F(z) \in \Sigma'$, the expansion of $G(w)$ in some neighborhood of $w = \infty$ is

$$G(w) = w - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{w^n}.$$

It is well known that $|B_1| \leq 1$ for any $F(z) \in \Sigma'$. Springer^[1] proved that $|B_3| \leq 1$ and conjectured that

$$|B_{2n-1}| \leq \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \quad (n=3, 4, \dots). \quad (1)$$

Kubota^[2] proved (1) for $n=3, 4, 5$. Schober^[3] proved (1) for $n=6, 7$. Ren Fuyao^[4,5] has verified (1) for $n=6, 7, 8$. In this article we are going to verify (1) for $n=9$.