数 学 年 刊
3 (1) 1982

微分方程 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$, $\dot{y}=-g(x)$ 的极限环的存在唯一性和唯二性

周 毓 荣
(山东矿业学院)

本文§1讨论方程组

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\quad \dot{y}=-g(x) \tag{E}$$

极限环的存在性,推广了作者[4]的结果和方法.

§2建立了各种类型的极限环存在唯一性定理. 包括 (E) 的一切轨线是否绕原点打转,积分 $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx$ 和 $\int_0^{\pm\infty} F'(x)dx$ 是否发散, 奇点为一个及两个等情况; 包括 (E) 的一切异于零的轨线当 $t\to+\infty$ 时都趋于此唯一的极限环[1],以及可用以确定极限环的位置和个数的结果. 与张芷芬[2]的著名结果不同,我们采用比较法,放弃了 $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx$ 发散, $\dfrac{F'(x)}{g(x)}$ 不减及 $F[x(-u)]\neq F[x(u)]$ $(u=\sqrt{2G(x)}\operatorname{sgn}x)$ 等限制, 另外补充了诸如定理2.1那样简单的条件.

§3讨论极限环的存在唯二性, 使[5]的方法得到推广. 以推论3.1或3.2与文[3]比,我们放弃了 $F(x)$ 和 $g(x)$ 为奇函数和 $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx$ 发散等要求.

结合§2和§3, 实际上可给出(E)有且只有 n 个极限环的结果.

本文假设(E)中函数在 $|x|<+\infty$, $|y|<+\infty$ 中连续,且满足解的存在唯一性条件,此外设

A_0. $\varphi(0)=0$, $\varphi(y)$ 为 y 的递增函数, $|\varphi(\pm\infty)|=+\infty$;

B_0. 对充分小的 $|x|$, $xF(x)<0$.

记 $G(x)=\int_0^x g(x)dx$, $\Phi(y)=\int_0^y \varphi(y)dy$, L: $x=x(t)$, $y=y(t)$ 为(E)过点$(x(t_0), y(t_0))$的轨线.

§1. 存 在 性

首先我们指出,若(E)满足条件

A a) $xg(x)>0$ $(x\neq 0)$;

b) $\varlimsup\limits_{x\to\pm\infty}[G(x)+F(x)\operatorname{sgn}x]=+\infty$;

本文1980年5月15日收到,1981年9月8日修改.

B a) 当 $\overline{\lim_{x\to+\infty}} F(x)<+\infty$ 时，$F(x)\,(x>0)$ 有下界；

b) 当 $\underline{\lim_{x\to-\infty}} F(x)>-\infty$ 时，$F(x)\,(x<0)$ 有上界，

则用作者[4]的方法易证

引理 1 $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, y(t)=+\infty \Rightarrow \underline{\lim_{t\to+\infty}}\, x(t)=-\infty$,

$\underline{\lim_{t\to+\infty}}\, y(t)=-\infty \Rightarrow \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, x(t)=+\infty$.

引理 2 $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, x(t)=+\infty \Rightarrow \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, y(t)=+\infty$,

$\underline{\lim_{t\to+\infty}}\, x(t)=-\infty \Rightarrow \underline{\lim_{t\to+\infty}}\, y(t)=-\infty$.

注 1.1 由此不难证明，在上述条件下，(E) 的一切轨线 $(t\geqslant0)$ 皆绕坐标原点打转。

推论 1.1 若 $x(t)$ 或 $y(t)$ $(t\geqslant0)$ 一方有界，则 $L(t\geqslant0)$ 有界。

由此可以简单地证明极限环的存在性，而无须按传统的方法作 Bendixson 环域。

定理 1.1 若条件 A 和 $Ba)$ 成立，此外存在 $C>0$, $M>0$ 和 $0\leqslant y^*\leqslant M$，使得

1) $CG(x)+F(x)<M\,(x\leqslant0)$;

2) $\int_0^{-\infty}\dfrac{g(x)}{M-F(x)}dx\leqslant\mu<+\infty$;

3) $\varphi(y)>y$，当 $y\geqslant y^*$，

则 (E) 必存在极限环。

证 先证方程组

$$\frac{dx}{d\tau}=F(x)-\varphi(y),\quad \frac{dy}{d\tau}=g(x) \tag{1.1}$$

当 $\tau=0$ 时，过点 $A(0,\ y_0)$ 的轨线 L^-: $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$ 具有性质

$$\lim_{\tau\to+\infty}x(\tau)=-\infty \tag{1.2}$$

其中 $y_0=M+\frac{1}{C}+\mu+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ 为常数。

根据条件 1) 和 3)，当 $y>M+\dfrac{1}{C}$ 时，$F(x)-\varphi(y)<-\dfrac{1}{C}$ $(x\leqslant0)$ 于是，τ 从 0 稍增大时，$x(\tau)$, $y(\tau)$ 都减小，且有

$$y(\tau)>M,\quad F[x(\tau)]-\varphi[y(\tau)]<-\frac{1}{C} \tag{1.3}$$

现在证明对一切 $\tau>0$, (1.3) 的第一式成立，若不然，设首先破坏此不等式的时刻为 τ': $y(\tau')=M$. 则由假设和(1.1). 沿此轨线 L^- 有

$$\begin{aligned} y(\tau')&=y_0+\int_0^{x(\tau')}\frac{g(x)}{F(x)-\varphi(y)}dx\geqslant y_0+\int_0^{x(\tau')}\frac{g(x)}{F(x)-M}dx\\ &\geqslant y_0+\int_0^{-\infty}\frac{g(x)}{F(x)-M}dx\geqslant M+\frac{1}{C}+\mu+\varepsilon-\mu>M \end{aligned}$$

这与 τ' 的假设矛盾. 故 (1.3) 的第一式成立.

下面证明对一切 $\tau>0$, (1.3)的第二式也成立. 若不然，设首先破坏此不等式的时刻为 t'': $F[x(t'')]-\varphi[y(t'')]=-\dfrac{1}{C}$. 则由条件 1) 和 3)，沿 L^- 有

$$\varphi[y(\tau'')]\geqslant y(\tau'')=y_0+\int_0^{x(\tau'')}\frac{g(x)}{F(x)-\varphi(y)}dx\geqslant y_0-\int_0^{x(\tau'')}Cg(x)dx$$
$$\geqslant M+\frac{1}{C}+\varepsilon+F[x(\tau'')]-M>\frac{1}{C}+F[x(\tau'')]$$

这与 τ'' 的假设抵触，因此对一切 $\tau>0$, (1.3)的第二式成立，从而(1.2)成立.

由于 L^- 即方程组 (E) 过点 A 的负半轨，由条件 $Aa)$, L^- 关于 y 有上界. 而 (E) 过点 A 的正半轨 L^+ 只在左半平面 $y(t)$ 增加，它不能与 L^- 相交，故 L^+ 关于 y 有上界. 由推论 1.1, L^+ 有界. 显然 $(0, 0)$ 为 (E) 的唯一奇点而且是不稳定的，故 L^+ 的 ω 极限点集必为一极限环. 证毕. 同样可证

定理 1.2 若条件 A 和 $Bb)$ 成立，此外，存在 $C>0$, $M>0$ 和 $-M\leqslant\bar{y}\leqslant 0$, 使得

1) $CG(x)-F(x)\leqslant M$ $(x\geqslant 0)$;

2) $\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{M+F(x)}dx<+\infty$;

3) $\varphi(y)\leqslant y$, 当 $y\leqslant\bar{y}$,

则 (E) 必存在极限环.

注 1.2　从定理 1.1 的证明可见，当 $\varphi(y)\equiv y$ 时，无须要求 $y(\tau)>M$. 因此条件 2) 可以取消.

定理 1.1 的条件 1), 2), 3) 保证了存在负半轨跑向 x 负无穷的轨道. 此时亦易作出 Bendixson 区域的外境界线. 下面减弱这些条件并用更简单的方法证明

定理 1.3 若条件 A 和 $Ba)$ 成立，此外

1) 存在常数 k, 使 $F(x)<k$ $(x\leqslant 0)$;

2) 存在 $M>|k|$, 使 $\int_0^{-\infty}\frac{g(x)}{M-F(x)}dx<+\infty$,

则 (E) 必存在极限环.

证　因 $(0, 0)$ 为 (E) 的唯一奇点且是不稳定的. 故只需证明 $L(t\geqslant 0)$ 有界. 根据推论 1.1 又只需证明 $y(t)$ 有上界. 若不然，设 $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, y(t)=+\infty$. 由于仅在左半平面 $y(t)$ 增加，因此必存在 t', $t''>t_0$, 使

$$y(t')=\bar{y},\quad y(t'')>\bar{y}+\int_0^{-\infty}\frac{g(x)}{M-F(x)}dx,\quad x(t)\leqslant 0\quad (t'\leqslant t\leqslant t'')$$

其中 $\bar{y}>0$ 充分大，使得当 $y>\bar{y}$ 时，$\varphi(y)>M$.

在 $[t', t'']$ 中，$x(t)$, $y(t)$ 都增加，故

$$y(t'')=y(t')+\int_{x(t')}^{x(t'')}\frac{-g(x)}{\varphi(y)-F(x)}dx\leqslant\bar{y}+\int_0^{-\infty}\frac{g(x)}{M-F(x)}dx$$

这与 t'' 的假设矛盾. 这个矛盾证明 $y(t)$ 有上界.　　证毕.

同理可证

定理 1.4 若条件 A 和 $Bb)$ 成立，此外

1) 存在常数 k', 使 $F(x)>k'$ $(x\geqslant 0)$;

2) 存在 $M>|k'|$, 使 $\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{M+F(x)}dx<+\infty$,

则 (E) 必存在极限环.

推论 1.2 若在定理 1.3(或 1.4)中，以 $G(-\infty)<+\infty$ $(G(+\infty)<+\infty)$ 代替条件

2)，则(E)必存在极限环.

定理 1.5 若条件 $A\alpha$) 和定理 1.1 的条件 1)，2)，3) 成立，此外

1° 存在 $x_1>0$，使 $F(x_1)\geqslant Y^*=\max\limits_{y<M+\frac{1}{C}+\mu+\varepsilon}\varphi(y)$，$\varepsilon>0$ 为常数；

2° $\underline{\lim}\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$

则(E)必存在极限环

证 考虑定理 1.1 证明中的正负半轨 L^+ 和 L^-. 注意到 L^- 的性质及 $(0, 0)$ 的不稳定性，只要证明 L^+ 必定回到 y 轴上来就可以了. 事实上，曲线

$$\varphi(y)-F(x)=0. \tag{1.4}$$

和 y 轴将 $x\circ y$ 平面分成图 1 所示的四个区域. 当 t 增大时，L^+ 进入区域 I. 在区域 I 中，$x(t)$ 增大，$y(t)$ 减小，若直线 $x=x_1$ 与曲线 (1.4) 的交点为 (x_1, y_1)，则由条件 1°，$\varphi(y_1)=F(x_1)\geqslant Y^*$. 根据 Y^* 的定义知，$y_1>M+\frac{1}{C}+\mu+C$. 故 L^+ 进入区域 I 后必与曲线 (1.4) 相交而进入区域 IV. 在区域 IV 中，$x(t)$，$y(t)$ 都减小，

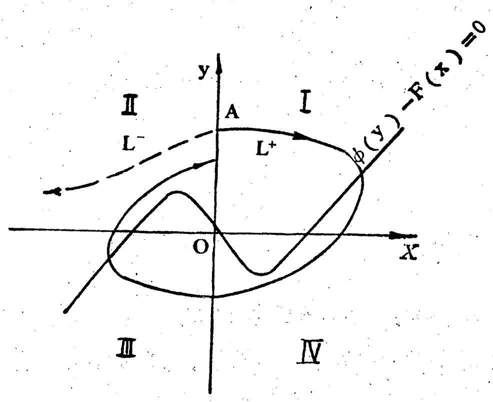

图 1

由 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$ 和条件 A_0，显然 L^+ 不可能保持在区域 IV 而趋向 y 的负无穷，L^+ 也不能趋向不稳定奇点 $(0, 0)$，故必与负 y 轴相交而进入区域 III. 在区域 III 中，$x(t)$ 减小，$y(t)$ 增加，根据条件 2°，L^+ 还须与曲线(1.4)相交而进入区域 II，然后 L^+ 必与正 y 轴相交. 证毕. 同理可证

定理 1.6 若条件 $A\alpha$) 和定理 1.2 的条件 1)，2)，3) 成立，此外

1° 存在 $x_2<0$，使 $F(x_2)\leqslant Y^{**}=\min\limits_{y>-(M+\frac{1}{C}+\mu+\varepsilon)}\varphi(y)$，$\varepsilon>0$ 为常数；

2° $\overline{\lim}\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$，

则(E)必存在极限环.

下面证明(E)具有一个鞍点及其它奇点的

定理 1.7 设定理 1.1 的条件 1)，2)，3) 成立，此外

1° $F'(x)=f(x)$ 连续；存在 $a_2<0<a_1$，使 $f(x)<0$，当 $x\in(a_2, a_1)$；$f(x)>0$，当 $x>a_1$ 及 $x<a_2$；

2° 存在 $\lambda<\lambda'\leqslant+\infty$，$\lambda>a_1$，使 $g(x)<0$，当 $x\in(\lambda, \lambda')$；$xg(x)>0$，当 $x\in(0, \lambda)$，及 $x<0$，$g'(\lambda)<0$；

3° $\underline{\lim}\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$；$F(\lambda)>Y^*=\max\limits_{y<M+\frac{1}{C}+\mu+\varepsilon}\varphi(y)$；

4° $\varphi'(y)$ 连续且 $\varphi'(\gamma)>0$，其中 $\varphi(\gamma)=F(\lambda)$，

则(E)必存在极限环.

证 易见在区域 $x<\lambda'$ 中，(E) 有两个奇点：$(0, 0)$ 为不稳定奇点，$P(\lambda, \gamma)$ 为鞍点，过鞍点 P 的分界线斜率

$$k_1=\frac{1}{2\varphi'(\gamma)}[f(\lambda)+\sqrt{f^2(\lambda)-4g'(\lambda)\varphi'(\gamma)}]>0$$

$$k_2=\frac{1}{2\varphi'(\gamma)}[f(\lambda)-\sqrt{f^2(\lambda)-4g'(\lambda)\varphi'(\gamma)}]<0$$

以 L_1 和 L_2 分别表示斜率为 k_1 和 k_2 且位于直线 $x=\lambda$ 左侧的分界线(图 2)．当 t 减小时，L_2 之纵坐标 $y(t)$ 增加，且 L_2 必与正 y 轴相交于某点 Q，则 $y_Q>\gamma$．根据条件 3°，$\gamma\geqslant M+\frac{1}{C}+\mu+\varepsilon$，故 $y_Q>M+\frac{1}{C}+\mu+\varepsilon$．于是从定理1.1的证明可见，$L_2(t<0)$ 跑向 x 的负无穷且关于 y 有上界.

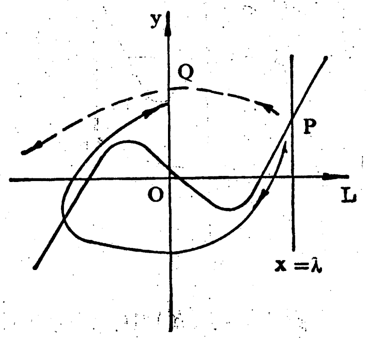

图 2

另一方面，$L_1(t>0)$将先后与负 y 轴和正 y 轴相交．后一交点必在 Q 点下方．从而 $L_1(t>0)$ 有界，其 ω 极限点集必为一极限环.　　证毕.

本定理允许 $x>\lambda'(\lambda'<+\infty)$ 有其它奇点，下面的定理允许左、右半平面同时存在其它奇点，且对 $\int_0^{\pm\infty}g(x)dx$ 和 $\int_0^{\pm\infty}F'(x)dx$ 是否发散并无要求.

定理 1.8　假设

I　存在 $x_1'<0<x_1$，使 $xg(x)>0$，$x\in[x_1', x_1]$，$x\neq0$;

II　$F(x_1')<m=\min\limits_{0<x<x_1}F(x)$，$F(x_1)>M=\max\limits_{x_1'<x<0}F(x)$，$F(x_1)<-F(x_1')$;

III　1) $\varphi^{-1}(F(x_1))\geqslant\varphi^{-1}\left(\frac{F(x_1)+M}{2}\right)+\frac{2}{F(x_1)-M}G(x_1')$;

2) $\varphi^{-1}(F(x_1'))\leqslant\varphi^{-1}\left(\frac{F(x_1')+m}{2}\right)+\frac{2}{F(x_1')-m}G(x_1)$,

则(E)必存在极限环.

证　显然在带域 $x_1'\leqslant x\leqslant x_1$ 中，(E)只有一个奇点 $(0, 0)$，为不稳定奇点，故只需在此带域中作出 Bendixson 区域的外境界线，为此设

$$\varphi(y_1')=F(x_1'),\qquad \varphi(y_1)=F(x_1)$$

$$\varphi(y_A)=\frac{1}{2}[F(x_1)+M],\qquad \varphi(y_B)=\frac{1}{2}[F(x_1')+m]$$

则由条件 A_0, B_0 和 II 知，$0<y_A<y_1$，$y_1'<y_B<0$．现在取

$$A(x_1', y_A)、B(x_1, y_B),\ A_1(x_1', y_1'),\ B_1(x_1, y_1)$$

考虑(E)过点 A 的轨线，当 t 增大时，它将与正 y 轴交于某点 A'，沿$\widehat{AA'}$有

$$\varphi(y)-F(x)\geqslant\varphi(y_A)-M=\frac{1}{2}(F(x_1)-M)>0$$

于是由条件 III 得

$$y_{A'}=y_A+\int_{x_1'}^0\frac{-g(x)}{\varphi(y)-F(x)}dx\leqslant y_A+\int_0^{x_1'}\frac{2g(x)}{F(x_1)-M}dx$$
$$=\varphi^{-1}\left(\frac{F(x_1)+M}{2}\right)+\frac{2G(x_1')}{F(x_1)-M}\leqslant\varphi^{-1}(F(x_1))=y_1$$

另一方面,(E)过点 B_1 的轨线当 t 减小时,将与正 y 轴交于某点 B_1',此时 $y(t)$ 增加,故

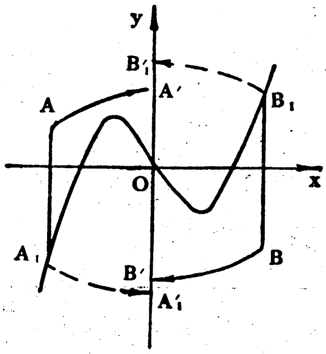

图 3

$$y_{B'}>y_1\geqslant y_{A'}.$$

同样.(E) 过点 B 的轨线当 t 增大时,将与负轴交于某点 B'. 过 A_1 的轨线当 t 减小时将与负 y 轴交于某点 A_1'. 同样可证 $y_{B'}>y_{A_1'}$.

显然,(E)的轨线与直线段 A_1A 和 $A'B_1'$(B_1B 和 $A_1'B'$)相交者从左(右)向右(左)地穿过它,故

$$l_1=\overline{AA'B_1'B_1BB'A_1'A_1A}$$

可作为 Bendixson 区域的外境界线. 证毕.

例1 在(E)中, $g(x)=\frac{1}{k}x(x-12)(x+12)(x-11)(x+11)$, $(k\geqslant 1490)$

$$\varphi(y)=y^3,\ F(x)=\begin{cases}x^3-48x & 当\ x\geqslant 0,\\ x^3-12x & 当\ x<0.\end{cases}$$

此时,(E) 有五个奇点. 利用定理 1.8 可知存在稳定的极限. 事实上, 取 $x_1'=-10$, $x_1=10$, 计得

$$m=F(4)=-128,\ M=F(-2)=16,\ F(x_1)=520,\ F(x_1')=-880.$$

条件 A_0、B_0、I、II 易见成立. 此外 $\varphi^{-1}(F(x_1))=\sqrt[3]{520}>\sqrt[3]{512}=8$, $\varphi^{-1}\left(\frac{F(x_1)+M}{2}\right)=\sqrt[3]{268}<\sqrt[3]{343}=7$, $\frac{2}{F(x_1)-M}G(x_1')<\frac{1}{k}\cdot 1490\leqslant 1$. 故条件 $III_{1)}$ 成立. 容易验证条件 $III_{2)}$ 也成立.

§2. 存在唯一性

在本节, 假设(E)满足条件 A_0 和 B_0'. 存在 $\delta_1'<0<\delta_1$, $xF(x)<0$, 当 $x\in(\delta_1',\ \delta_1)$, $x\neq 0$; $xF(x)>0$ 且 $F(x)$ 为增函数, 当 $x\in(-\delta,\ \delta_1')$ 及 $x\in(\delta_1,\ \delta)$, $\delta>0$ 足够大.

定理 2.1 若定理 1.1—1.6 这六个定理之一的条件满足,此外下列条件之一成立:

I $G(\delta_1)=G(\delta_1')$;

II $G(\delta_1)>G(\delta_1')$,且存在 $a'\in(\delta_1',\ 0)$ 和 $b'>0$,使得 $\varphi(b')\leqslant F(a')$, $\Phi(b')\geqslant G(\delta_1)$;

III $G(\delta_1)<G(\delta_1')$,且存在 $a\in(0,\ \delta_1)$ 和 $b<0$,使得 $\varphi(b)\geqslant F(a)$, $\Phi(b)\geqslant G(\delta_1')$;

IV 存在 $a'\in(\delta_1',\ 0)$ 和 $b'>0$, 使 $\varphi(b')\leqslant F(a')$, $\Phi(b')\geqslant G(\delta_1)$,存在 $a\in(0,\ \delta_1)$和 $b<0$, 使 $\varphi(b)\geqslant F(a)$, $\Phi(b)\geqslant G(\delta_1')$,

则(E)必存在唯一的极限环,为稳定环.

证 (一)存在性已见于§1. 设 Γ 为 (E) 的一个极限环. 先证它的最左点在直线 $x=\delta_1'$ 的左边,最右点在直线 $x=\delta_1$ 的右边,下面分别讨论:

情形1 Γ 整个位于 $\delta_1'<x<\delta_1$ 中,沿组(E)对函数

$$\lambda(x,\ y)=G(x)+\Phi(y) \tag{2.1}$$

微分得，$d\lambda=F(x)dy$. 易见沿着 Γ 逆时针跑时，恒有 $d\lambda<0$. 故 $\oint_\Gamma d\lambda<0$. 由于 Γ 为闭曲线，这是不可能的.

情形 2　Γ 的最右点在直线 $x=\delta_1$ 左边，最右点在直线 $x=\delta_1'$ 左边. 此时 Γ 交正 x 轴于一点 $P(0<x_P<\delta_1)$ 交直线 $x=\delta_1'$ 于 x 轴上方的一点 Q, 沿 Γ 逆时针从 P 到 Q 时，$\int_P^Q d\lambda<0$, 故 $\lambda(Q)<\lambda(P)$, 即

$$\Phi(y_Q)+G(\delta_1')<G(x_P)<G(\delta_1)$$

这与条件 I 或条件 III 都矛盾，因此在条件 I 或 III 下，情形 2 不可能发生. 下面证明在条件 II 或 IV 下，情形 2 也不可能发生. 为此考虑过点 $A(\delta_1, 0)$ 的轨线 L^-. 当 t 减小时，将与正 y 轴交于某点 $A'(0, y_{A'})$. 由于沿 L^- 从 A 到 A' 有 $d\lambda<0$, 故

$$\lambda(A')<\lambda(A),\quad 即\quad \Phi(y_{A'})<G(\delta_1) \qquad (2.2)$$

另一方面，(E) 过点 $B(a', b')$ 的轨线 L^+ 当 t 增大时将与正 y 轴交于某点 B'(图 4). 此时由于 $y(t)$ 增大，有 $y_{B'}>b'$. 故由条件 A_0 和 II 的后半部得

$$\Phi(y_{B'})>\Phi(b')\geqslant G(\delta_1)$$

注意到 (2.2) 式知，$y_{B'}>y_{A'}$. 于是 L^+ 必与直线 $x=\delta_1$ 相交，从而 Γ 亦必与直线 $x=\delta_1$ 相交. 这与情形 2 的假设矛盾. 这个矛盾证明在条件 II 或 IV 下，情形 2 不可能发生.

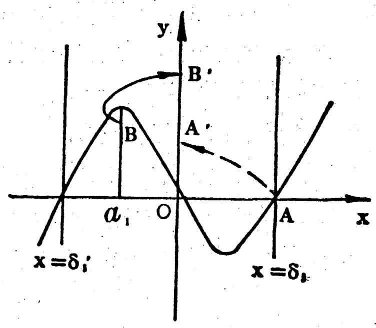

图 4

情形 3　Γ 的最左点在直线 $x=\delta_1'$ 右边，最右点在直线 $x=\delta_1$ 右边，此时 Γ 交负 x 轴于点 $R(\delta_1'<x_R<0)$ 交直线 $x=\delta_1$ 于 x 轴下方的点 S. 沿 Γ 逆时针从 R 到 S 有 $d\lambda<0$, 故 $\lambda(S)<\lambda(R)$, 即

$$\Phi(y_S)+G(\delta_1)<G(x_R)<G(\delta_1')$$

这与条件 I 或 II 矛盾，同上面一样易证在条件 III 或 IV 下，情形 3 不可能发生.

(二) 现在设有两个极限环 $\Gamma\subset\Gamma'$(图 5). 下面来估计 $\oint_\Gamma d\lambda$ 和 $\oint_{\Gamma_1} d\lambda$, 依逆时计算

$$\int_{E_2'E_1''} d\lambda=\int_{E_2'E_1''} F(x)dy>\int_{E_2E_1}(Fx)dy$$

$$=\int_{E_2E_1} d\lambda. \qquad (2.3)$$

这是因为沿着这两段弧，$F(x)>0$, $dy>0$, 且对同一个 y, $E_2'E_1''$ 上点的横坐标大于 E_2E_1 上点的横坐标，而 $F(x)$ 是 x 的增函数.

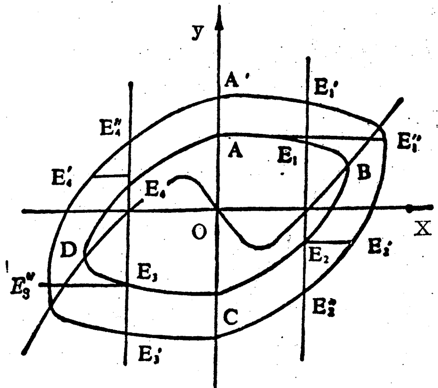

图 5

同理

$$\int_{E_4'E_3''} d\lambda>\int_{E_4E_3} d\lambda \qquad (2.4)$$

此外 $$\int_{E_1'E_4'} d\lambda=\int_{E_1'E_4'}\frac{-F(x)g(x)}{\varphi(y)-F(x)}dx>\int_{E_1E_4}\frac{-F(x)g(x)}{\varphi(y)-F(x)}dx=\int_{E_1E_4} d\lambda. \qquad (2.5)$$

这是因为沿着这两段弧有 $F(x)\,g(x)<0$, $dx<0$, $\varphi(y)-F(x)>0$. 且对同一个 x, $E_1'E_4''$ 上点的纵坐标大于 E_1E_4 上点的纵坐标，又 $\varphi(y)$ 为 y 的增函数. 同理

$$\int_{E_3'E_2'} d\lambda > \int_{E_3E_2} d\lambda \tag{2.6}$$

此外

$$\int_{E_i'E_i''} d\lambda = \int_{E_i'E_i''} F(x)dy > 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{2.7}$$

由(2.3)—(2.7)式得 $\oint_{\Gamma'} d\lambda > \oint_{\Gamma} d\lambda$. 这是不可能的，因为 Γ' 和 Γ 都是闭曲线，这个矛盾证明 Γ' 和 Γ 不能同时存在. 定理证毕. 同理可证:

定理 2.2 若定理 1.7 的条件满足 ($\lambda'=+\infty$), 又定理 2.1 的条件 I, II, III, IV 之一成立，则(E)必存在唯一的极限环，为稳定环.

这是一个在平面上有两个奇点的极限环存在唯一性定理. 下面的定理解决了在某个区域中极限环的存在唯一性. 利用它可以估计极限环的位置，并且确定在整个平面上极限环的个数，证明和定理 2.1 完全相同.

定理 2.3 若定理 1.8 的条件满足，其中 $x_1'<\delta_1'$, $x_1>\delta_1$. 此外定理 2.1 的条件 I, II, III, IV 之一成立. 则(E)在带域 $x_1'\leqslant x\leqslant x_1$ 中存在唯一的极限环，为稳定环.

本节给出的组(E)极限环存在唯一的各类结果不少，作为推论，下面对 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{2.8}$$

给出其一部分结果，将它化为等价组

$$\dot{x}=y-F(x), \quad \dot{y}=-g(x) \tag{2.9}$$

注意到注 1.2 可得:

推论 2.1 假设条件 B_0' 成立，此外

I $xg(x)>0$ $(x\neq 0)$;

II 下列条件之一成立:

1) $\overline{\lim\limits_{x\to\pm\infty}}\,[G(x)+F(x)\,\mathrm{sgn}\,x]=+\infty$, 存在 $C>0$, $M>0$ 使

$$CG(x)+F(x)<M \quad (x\leqslant 0);$$

2) $\overline{\lim\limits_{x\to\pm\infty}}\,[G(x)+F(x)\,\mathrm{sgn}\,x]=+\infty$, 存在正数 $M>F(x)$ $(x\leqslant 0)$, 使

$$\int_0^{-\infty}\frac{g(x)}{M-F(x)}\,dx<+\infty;$$

3) $\overline{\lim\limits_{x\to\pm\infty}}\,[G(x)+F(x)\,\mathrm{sgn}\,x]=+\infty$, $G(-\infty)<+\infty$(或 $G(+\infty)<+\infty$);

4) $\underline{\lim\limits_{x\to-\infty}}\,F(x)=-\infty$, 存在 $C>0$, $M>0$, $x_1>0$, 使

$$CG(x)+F(x)<M \quad (x\leqslant 0), \qquad F(x_1)\geqslant M+\frac{1}{C}+\varepsilon \quad (\varepsilon>0).$$

III 下列条件之一成立:

1) $G(\delta_1)=G(\delta_1')$;

2) $G(\delta_1)>G(\delta_1')$ 且存在 $a'\in(\delta_1',\ 0)$ 使 $F(a')\geqslant\sqrt{2G(\delta_1)}$;

3) $G(\delta_1)<G(\delta_1')$ 且存在 $a\in(0,\ \delta_1)$ 使 $F(a)\leqslant-\sqrt{2G(\delta_1')}$;

4) 存在 $a'\in(\delta_1',\ 0)$, $a\in(0,\ \delta_1)$ 使

$$F(a')\geqslant\sqrt{2G(\delta_1)},\quad F(a)\leqslant-\sqrt{2G(\delta_1')},$$

则(2.8)必存在唯一的极限环，为稳定环.

推论 2.2　若条件 B_0' 满足又推论 2.1 条件 III 的 1)—4) 之一成立. 此外

1°　$xg(x)>0\ (x\neq0)$;

2°　存在 $x_1'<\delta_1'$，$x_1>\delta_1$，使得

$$F(x_1)\geqslant M+2\sqrt{G(x_1')},\quad F(x_1')\leqslant m-2\sqrt{G(x_1)},\quad F(x_1)<-F(x_1'),$$

其中
$$M=\max_{x'\leqslant x\leqslant0}F(x),\quad m=\min_{0\leqslant x\leqslant x_1}F(x),$$

则(E)必存在唯一的极限环，为稳定环.

例 2　在(E)中，$\varphi(y)=y$，$g(x)=4x^3$，$F(x)=\begin{cases}x^2(x-1), & 当\ x\geqslant0;\\ x^4(x+1), & 当\ x<0.\end{cases}$

例 3　在(E)中，$\varphi(y)=y^3+y+\sin y+\operatorname{arc\,tg} y$

$$F(x)=x(x-k)(x+k)\quad(k\neq0),\qquad g(x)=\frac{2x}{1+x^4}.$$

例 4　在(E)中，$\varphi(y)=6y-\dfrac{2y}{1+y^2}$，

$$F(x)=64x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1),\quad g(x)=\frac{2x}{1+x^4}.$$

容易验证例 2 满足推论 2.1 条件 I、$III_{1)}$ 和 $II_{1)}$ $(C=1,\ M=3)$，例 3 满足定理 1.3 及定理 2.1 条件 I；例 4 满足定理 1.3 及定理 2.1 条件 II $\left(\delta_1'=-\dfrac{1}{2},\ \delta_1=1,\right.$ 取 $\left.a'=-\dfrac{1}{4},\ b'=1\right)$ 此外条件 A_0、B_0' 显然成立，故以上各例皆存在唯一的极限环，为稳定环.

在例 2 中，$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3x^2-2x}{4x^3}$ $\left(x>\dfrac{4}{3}\right)$ 减小，在例 3、例 4 中，$G(\pm\infty)<+\infty$，皆不满足文[2]的条件.

注 2.1　从定理 1.1 和 1.3 的证明和轨线 L 的任意性知，在定理 2.1 中若限于定理 1.1—1.4 这四个定理之一的条件满足，则组(E)的一切异于零的轨线当 $t\to+\infty$ 时皆趋于此唯一的极限环. 例 3 便具有此性质，再如 Vol del pol 方程

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0\quad(\mu>0)$$

熟知具有此性质(见[1])这也可从本文上述结果得到.

§3. 存在唯二性

本节假设条件 A_0 成立，此外，$xg(x)>0(x\neq0)$；当 $x\in(\delta_1',\ \delta_1)$，$x\neq0$ 时，$xF(x)<0$；当 $x\in(\delta_2',\ \delta_1')$ 及 $x\in(\delta_1,\ \delta_2)$ 时 $xF(x)>0$；当 $x\in(-d,\ \delta_2')$ 及 $x\in(\delta_2,\ d)$ 时，$xF(x)<0$ 且 $F(x)$ 为减函数，这里 $\delta_2'<\delta_1'<0<\delta_1<\delta_2$，$d>0$ 充分大. 为简单计，记 $F_2'=\min\limits_{\delta_2'\leqslant x\leqslant\delta_1'}F(x)$，$F_1'=\max\limits_{\delta_1'\leqslant x\leqslant0}F(x)$，$F_1=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant\delta_1}F(x)$，$F_2=\max\limits_{\delta_1\leqslant x\leqslant\delta_2}F(x)$ 则 $F_1'>0$，$F_1<0$. 设 $F(a_k')=F_k'$，$F(a_k)=F_k$，这里 $a_k'\in(\delta_k',\ \delta_{k-1}')$，$a_k\in(\delta_{k-1},\ \delta_k)$ $(k=1,\ 2,\ \delta_0'=\delta_0=0)$ 再设

$$\varphi(y_i')-F(a_i')=0,\quad\varphi(y_i)-F(a_i)=0\quad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)\tag{3.1}$$

(a_3', a_4', a_3, a_4 由下文定义)根据条件 A_0, 存在 $\beta>|y_2'|$, 使

$$\varphi(y)+F_2'>0 \quad (y\geqslant\beta); \qquad \varphi(y)-F_2'<0 \quad (y\leqslant-\beta). \tag{3.2}$$

定理 3.1 假设

I $-F_2'>F_2>F_1'$, $F_2'<F_1$, 存在 $a_4'<\delta_2'$, $a_4>\delta_2$ 使

$$F(a_4')>\varphi(\beta), \quad F(a_4)<\varphi(-\beta); \tag{3.3}$$

II 1) $\varphi^{-1}(F_2)\leqslant\varphi^{-1}\left(\dfrac{F_2+F_1'}{2}\right)+\dfrac{2}{F_2-F_1'}G(a_3')$,

2) $\varphi^{-1}(F_2')\leqslant\varphi^{-1}\left(\dfrac{F_1+F_2'}{2}\right)+\dfrac{2}{F_2'-F_1}G(a_3)$,

其中 $a_3'\in(a_4', \delta_2')$, $a_3\in(\delta_2, a_4)$ 使

$$F(a_3')=F(a_1'), \quad F(a_3)=F(a_1). \tag{3.4}$$

III 存在 $\mu'\in(\beta, y_4']$, $\mu\in[y_4, -\beta)$, 使

$$C_1=\int_\beta^{\mu'}\varphi(y)dy+(\mu'-\beta)F_2'\geqslant G(a_4),$$

$$C_2=\int_{-\beta}^{\mu}\varphi(y)dy-(\beta+\mu)F_2'\geqslant G(a_4'),$$

则 (E) 至少存在两个极限环.

证 令 $a_2'=x_1'$, $a_2=x_1$, 可作出定理 1.8 证明中的闭曲线 l_1, (E) 的轨线与之相交者从外向里穿过它. 因而在 l_1 所围区域 Ω 之内存在极限环, 下面证明在 Ω 之外仍有极限环, 为此只需作出包围 l_1 的闭曲线 l_2, 使得 (E) 的轨线与之相交者从里向外穿过它.

首先易见存在 $\alpha'\in(a_4', a_3')$, $\alpha\in(a_3, a_4)$, 使 $F(\alpha')>\varphi(\beta)$, $F(\alpha)<\varphi(-\beta)$. 现在取 $l_2=\overline{E_1E_2E_3E_4E_5E_6E_1}$, 其中

$$E_1(\alpha', \mu'), \ E_2(0, \mu'), \ E_4(\alpha, \mu), \ E_5(0, \mu),$$

E_1E_2, E_3E_4, E_4E_5, E_6E_1 为直线段, 而 $\widehat{E_2E_3}$ 和 $\widehat{E_5E_6}$ 分别为曲线

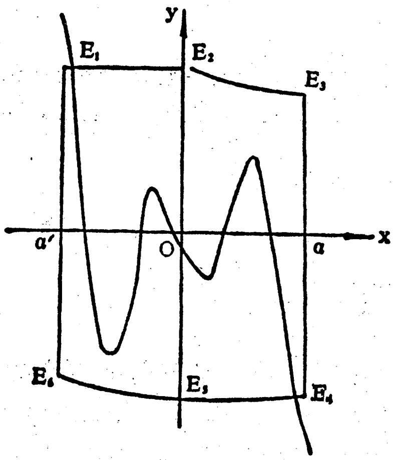

图 6

$$k_1:\quad \int_\beta^y\varphi(y)dy+(y-\beta)F_2'+G(x)=C_1;$$

$$k_2:\quad \int_{-\beta}^y\varphi(y)dy-(y+\beta)F_2'+G(x)=C_2.$$

显然, 曲线 $k_1(k_2)$ 与正(负) y 轴相交于点 $E_2(E_5)$. 令 $y=\beta$ 得 $G(x)=C_1\geqslant G(a_4)$. 因此曲线 k_1 与直线 $y=\beta$ 交点的横坐标 $x\geqslant a_4$. 于是曲线 k_1 必与直线 $x=\alpha<a_4$ 相交于某点 E_3. 且在 $\widehat{E_2E_3}$ 上有 $y>\beta$.

现在来比较曲线 k_1 和 (E) 的轨线在点 $(x, y)\in\widehat{E_2E_3}$ 上的斜率. 由于在 $\widehat{E_2E_3}$ 上有

$$\varphi(y)-F(x)\geqslant\varphi(y)+F_2'>0$$

故

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{k_1}=\frac{-g(x)}{\varphi(y)+F_2'}\leqslant\frac{-g(x)}{\varphi(y)-F(x)}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(E)}$$

于是 (E) 的轨线与 $\widehat{E_2E_3}$ 相交者从下向上地穿过它. 同理, 曲线 k_2 必与直线 $x=\alpha'$ 相交于某点 E_6. (E) 的轨线与 $\widehat{E_5E_6}$ 相交者从上向下地穿过它. 易见 (E) 的轨线与直线段 $E_3E_4(E_1E_6)$ 相交者从左(右)向右(左)地穿过它, 与直线段 $E_1E_2(E_4E_5)$ 相交者从下(上)

向上(下)地穿过它,故 l_2 符合我们的要求.　　证毕.

定理 3.2　假设定理 3.1 的条件满足,此外定理 2.1 的条件 I, II, III, IV 之一成立,则(E)有且只有两个极限环.

证　定理 3.1 保证在 Ω 内外分别存在极限环,再由定理 2.3 知,在 Ω 内只有一个极限环,余下要证在 Ω 外也只有一个极限环.

先证 Ω 外面的极限环 $\bar{\Gamma}$ 最左点在直线 $x=a_3'$ 左边,最右点在直线 $x=a_3$ 右边.考虑过点 $\bar{A}(a_3', y^*)$ 的轨线 L,其中 $\varphi(y^*)=\frac{1}{2}(F_2+F_1')$.由(3.1)式和定理 3.1 的条件 I 知,$y_1'<y^*<y_2$.当 t 增大时,L 将与正 y 轴交于某点 $\bar{A}'$,沿 $\widehat{\bar{A}\bar{A}'}$ 有

$$\varphi(y)-F(x)\geqslant\varphi(y^*)-F_1'=\frac{1}{2}(F_2-F_1')>0$$

于是由定理 3.1 的条件 $II_{1)}$

$$y_{\bar{A}'}=y^*+\int_{a_3'}^{0}\frac{-g(x)}{\varphi(y)-F(x)}dx\leqslant y^*+\int_0^{a_3'}\frac{2g(x)}{F_2-F_1'}dx$$

$$=\varphi^{-1}\left(\frac{F_2+F_1'}{2}\right)+\frac{2}{F_2-F_1'}G(a_3')\leqslant\varphi^{-1}(F_2)=y_2$$

另一方面,过点 $\bar{B}(a_2, y_2)$ 的轨线当 t 减小时将与正 y 轴交于某点 $\bar{B}'$.此时 $y(t)$ 增加,故

$$y_{\bar{B}'}>y_2>y_{\bar{A}'}.$$

即点 $\bar{A}'$ 在点 $\bar{B}'$ 下方,注意到区域 Ω 的作法知.$\bar{\Gamma}$ 的最左点必在直线 $x=a_3'$ 的左边(图 7).同样可证 $\bar{\Gamma}$ 的最右点必在直线 $x=a_3$ 的右边.

现在设在 Ω 外有两个极限环 $\Gamma\supset\Gamma'$,并设 Γ' 的最右点为 $P_1(\alpha_1, \beta_1)$,最左点为 $P_2(\alpha_2, \beta_2)$,则 $\alpha_1>a_3$, $\alpha_2<a_3'$.设 Γ 与直线 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$ 分别交于 B、C 和 E、F.考虑

$$\lambda_i(x, y)=\Phi(y)-F(\alpha_i)y+G(x)$$

$(i=1, 2)$.它沿(E)的导数

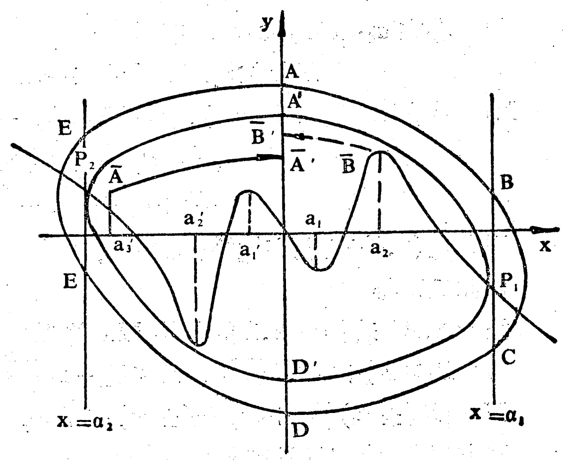

图 7

$$\frac{d\lambda_i}{dt}=g(x)[F(\alpha_i)-F(x)]\quad(i=1, 2)$$

依逆时针计算

$$\int_{\widehat{BA}}d\lambda_1=\int_{\widehat{BA}}\frac{g(x)[F(\alpha_1)-F(x)]}{\varphi(y)-F(x)}dx<\int_{\widehat{P_1A'}}\frac{g(x)[F(\alpha_1)-F(x)]}{\varphi(y)-F(x)}dx$$

$$=\int_{\widehat{P_1A'}}d\lambda_1\tag{3.5}$$

这是因为沿着这两段弧,$g(x)>0$, $F(\alpha_1)-F(x)\leqslant 0$, $dx<0$, $\varphi(y)-F(x)\geqslant 0$.且对同一个 x, $\widehat{BA}$ 上的纵坐标大于 $\widehat{P_1A'}$ 上的纵坐标,又 $\varphi(y)$ 为增函数.

同理

$$\int_{\widehat{DC}} d\lambda_1 < \int_{\widehat{P_1D'}} d\lambda_1 \tag{3.6}$$

此外在 $\widehat{CB}$ 上, $F(x)-F(\alpha_1)\leqslant 0$, $dy>0$, 故

$$\int_{\widehat{CB}} d\lambda_1 = \int_{\widehat{CB}} [F(x)-F(\alpha_1)]dy < 0 \tag{3.7}$$

由(3.5)—(3.7)得

$$\int_{\widehat{DA}} d\lambda_1 < \int_{\widehat{D'A'}} d\lambda_1$$

故

$$\lambda_1(A)-\lambda_1(D) < \lambda_1(A')-\lambda_1(D'). \tag{3.8}$$

在左半平面,同理可得

$$\lambda_2(D)-\lambda_2(A) < \lambda_2(D')-\lambda_2(A'). \tag{3.9}$$

上两式相加,得

$$(y_D-y_{D'})[F(\alpha_1)-F(\alpha_2)] < (y_A-y_{A'})[F(\alpha_1)-F(\alpha_2)]$$

但因 $F(\alpha_1)-F(\alpha_2)<0$, $y_A>y_{A'}$, $y_{D'}>y_D$. 上式不可能成立. 因此 Γ 和 Γ' 不可能同时存在. 证毕.

推论 3.1 若推论 2.1 的条件 III 的 1), 2), 3), 4) 之一成立. 此外

I $F_2\geqslant F_1'+2\sqrt{G(a_3')}$, $F_2'\leqslant F_1-2\sqrt{G(a_3)}$, $-F_2'>F_2$;

II 存在 $a_4'<\delta_2'$, $a_4>\delta_2$, 使得

$$F(a_4')>\beta,\quad F(a_4)<-\beta,\quad (\beta>|F_2'|, \text{为常数})$$

III 存在 $\mu'\in(\beta, F(a_4')]$, $\mu\in[F(a_4), -\beta)$, 使

$$(\mu'-\beta)(\mu'+\beta+2F_2')\geqslant 2G(a_4),$$
$$(\mu+\beta)(\mu-\beta-2F_2')\geqslant 2G(a_4'),$$

则方程(2.8)有且只有两个极限环.

由此又可得

推论 3.2 若推论 2.1 的条件 III 的 1)、2)、3)、4) 之一成立, 此外

I $F_2\geqslant F_1'+2\sqrt{G(a_3')}$, $F_2'\leqslant F_1-2\sqrt{G(a_3)}$, $-F_2'>F_2$,

II $|F(\pm\infty)|=+\infty$, $G(\pm\infty)<+\infty$,

则方程(2.8)有且只有两个极限环

这是因为 β 为常数, 在推论 3.2 的条件 II 下, 总可选取 a_4, $|a_4'|$ 及 $|\mu|$ 和 μ' 充分大, 使推论 3.1 的条件 II 和 III 成立.

注 3.1 从证明中可见, 本节所有结果, 允许 $F(x)$ 的零点为五个也可以多于五个, 且 $F(x)$ 在 $[\delta_2', \delta_2]$ 中允许反复升降.

例 5 在 (E) 中, $F(x)=10^5(-40x^5+5x^4+68x^3-10x^2-4x)$

$$\varphi(y)=y^3,\quad g(x)=\begin{cases} x(1+x^2), & \text{当 } x\geqslant 0 \\ \frac{1}{2}x(1+x^2), & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

我们来验证定理 3.2 的条件. 由

$$F'(x)=-4\times 10^5(5x-1)(10x+1)(x-1)(x+1)$$

知 $a_2'=-1$, $a_1'=-\frac{1}{10}$, $a_1=\frac{1}{5}$, $a_2=1$, 计得 $F_2'=F(-1)=-29\times10^5$. $F_1'=F\left(-\frac{1}{10}\right)=23290$, $F_1=F\left(\frac{1}{5}\right)=-66080$, $F_2=F(1)=19\times10^5$, $F(-2)=784\times10^5$. $F(2)=-704\times10^5$, $\varphi(150)=3375\times10^3$, $\varphi(\pm160)=\pm4096\times10^3$.

1) 取 $\beta=150$, 则 (3.2) 式成立. 再由 $|F(\pm\infty)|=+\infty$ 知定理 3.1 的条件 I 成立.

2) 由 (3.4) 和 $F(-2)>F\left(-\frac{1}{10}\right)$ 知 $-2<a_3'<-1$, 故 $G(a_3')<G(-2)=3$, $\frac{2}{F_2-F_1'}\times G(a_3')<1$, 又 $\varphi^{-1}(F_2)=\sqrt[3]{19\times10^5}>120$, $\varphi^{-1}\left(\frac{F_2+F_1'}{2}\right)=\sqrt[3]{961645}<100$ 从而定理 3.1 的条件 $II_{1)}$ 成立, 同样可验证条件 $II_{2)}$ 成立 $(1<a_3<2)$

3) 由 $\varphi(160)<F(-2)$, $\varphi(-160)>F(2)$ 知, 若取 $y_4'=160$, $y_4=-160$, 则 $-2<a_4'<-1$, $1<a_4<2$, 有 $G(a_4')<G(-2)=3$, $G(a_4)<G(2)=6$, 于是取 $\mu'=y_4'$, $\mu=y_4$, 则定理 3.1 的条件 III 成立.

4) 显然在 $-1<x<0$ 和 $0<x<1$ 中, $F(x)$ 各有一个零点, 分别设为 δ_1' 和 δ_1, 则 $G(\delta_1')<G(-1)=\frac{3}{8}$, $G(\delta_1)<G(1)=\frac{3}{4}$. 取 $b'=-b=2$, $a'=a_1=-\frac{1}{10}$, $a=a_1=\frac{1}{5}$, 则定理 2.1 的条件 IV 成立.

于是定理 3.2 的条件皆成立, 知有且只有两个极限环.

在例 5 中, 若 $g(x)$ 改为

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^4}, & 当\ x\geqslant0\\ \dfrac{x}{1+x^4}, & 当\ x<0\end{cases}$$

定理 3.2 的条件仍满足(因 $G(\pm\infty)<+\infty$, 验证更简单)若再改 $\varphi(y)\equiv y$, 上述结论也成立. 此时因 $F(x)$ 和 $g(x)$ 都不是奇函数, $\int_0^{\pm\infty}g(x)dx$ 也不发散, 故文[3]的条件不满足.

本文在"全国常微分方程定理理论会"(1981)上报告后, 张芷芬教授提出宝贵意见, 谨致谢意.

参 考 文 献

[1] 叶彦谦, 极限环论, 上海科学技术出版社, 1965 年.
[2] Чжан Чжи-фэн(张芷芳), ДАН. СССР. **119**(4) (1958), 659—662.
[3] 张芷芬, 关于 Liénard 方程极限环的唯二性问题, 数学学报, **24** (5) (1981), 710—716.
[4] 周毓荣, 非线性振动方程极限环的存在性, 应用数学学报, **3**(1) (1980), 49—56.
[5] 黄克成, Liénard 方程的极限环, 华东水利学院学报, 1 (1979), 116—123.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF LIMITING CYCLE OF EQUATIONS $\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$, $\dot{y}=-g(x)$, AND ITS EXISTENCE OF TWO AND ONLY TWO LIMITING CYCLE

ZHOU YURONG
(*Shangdong Minging Industry College*)

ABSTRACT

In this paper, we consider the existence of limiting cycle of the system of equations

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x), \quad \dot{y}=-g(x) \tag{E}$$

its existence and uniqueness, and its existence of two and only two limiting cycle.

The theorems of existence and of existence and uniquence include following conditions:

1° All orbits of system (E) rotate round origin and not all orbits rotate round origin;

2° All or some of integral $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx$ and $\int_0^{\pm\infty} F'(x)dx$ diverge or converge;

3° System (E) has one or two (one of them is saddle point) singular points.

These theorems include following results:

1° All orbits of system (E), if not zero, tend to the unique cycle as $t\to+\infty$;

2° The result allow us to decide the place and the number of cycle etc.

In the theorem of existence of two and only two limiting cycle, $F(x)$ and $g(x)$ needn't odd functions; number of zero point of $F(x)$ may be five or over five; $F(x)$ may ascend or descend repeatedly in certain finite interval.

Combining § 2 with § 3, in fact, we can give a result of the existence of n and only n limiting cycle of system (E).