数 学 年 刊
3 (1) 1982

数论函数的逆函数(I)

莫绍揆　沈百英
(南京大学)

前　言

在递归算术中，我们讨论的是数论函数，即以自然数(包括零)为定义域及值域的函数，而且只讨论全函数(即处处有定义的)。

关于数论函数的求逆运算，在[1, 2]中都有讨论，并证明了求逆算子与摹状算子(在初等系统中)是相互等价的。研究这种求逆运算，却有着各种形式。我们可仿照抽象代数中求一个元素的逆元那样，对一个数论函数也可求它的左逆，亦可求它的右逆；但由于这种左逆或右逆(若存在的话)往往是不唯一的，故又有求某种特殊形式的左逆或右逆。这里最重要的是求一个函数的强、弱左逆函数和强、弱右逆函数。在[1, 2]中所讨论的求逆运算实为求弱右逆运算。在迄今为止的递归函数理论中虽还未明确提到左逆运算，但已使用了很多弱左逆函数(在[1]中也出现了个别强左逆函数)。例 Dx 为 sx 的强、弱左逆函数，$[\sqrt{x}]$ 为 x^2 的弱左逆函数，$x \dot{-} y$ 为 $x+y$(对 x)的强、弱左逆函数，$\left[\frac{x}{Sa}\right]$为 $x \cdot Sa$ (对 x) 的弱左逆函数，而 $\left[\frac{x+a}{Sa}\right]$ 为 $x \cdot Sa$(对 x) 的强左逆函数等等。

本文将对某类数论函数的各种逆函数作一些性质上的刻划。在另文中，我们再探讨一些有关逆函数(特别是强、弱左逆函数)的表示方法与显式的求法。

§1. 一般函数的逆函数

定义　设有两个一元函数 f 与 g，如果对于一切 x 均有

$$gf(x)=x$$

则说 g 为 f 的左逆函数，而 f 为 g 的右逆函数；如果 f 既是 g 的右逆函数又是 g 的左逆函数，则说 f 为 g 的逆函数。这时，必然地 g 既是 f 的左逆函数又是 f 的右逆函数，从而 g 也是 f 的逆函数。换言之，这时 f 与 g 互为逆函数。

由这个定义我们立得：

定理 1　f 具有左逆函数的必要充分条件是：f 为单叶函数，即由 $f(x_1)=f(x_2)$ 可推得 $x_1=x_2$。

证　设 f 具有左逆函数 g，且设 $f(x_1)=f(x_2)$，则

本文 1980 年 7 月 1 日收到。

$$x_1=gf(x_1)=gf(x_2)=x_2.$$

故必要性得证，再证充分性如下，设给出单叶函数 $f(x)$，今定义函数 g 如下

$$g(x)=\begin{cases} t, & \text{当 } x=f(t) \text{ 时}, \\ \text{任意}, & \text{此外}. \end{cases}$$

由于 f 是单叶函数，这个定义是合法的，这时显有

$$gf(t)=t \quad (\text{一切 } t),$$

故 g 为 f 的左逆函数．于是充分性得证． 证毕．

定义 如果 f 具有左逆函数，则 f 叫做右伴函数，如果 g 具有右逆函数，则 g 叫做左伴函数．

依据本定义，上定理又可叙述为：f 为右伴函数当且仅当 f 为单叶函数．

定理 2 g 为左伴函数（亦即 g 具有右逆函数）的必要充分条件是：g 为穷尽函数，即 g 取得一切自然数以为值．

证 设 g 具有右逆函数 f，则任取自然数 x，必有

$$gf(x)=x,$$

即 g 在 $f(x)$ 处取得值 x，故 g 为穷尽函数，必要性得证．

再讨论充分性，设 g 取得一切自然数以为值．任取自然数 x，$g(t)=x$ 必有解，任取其一解（比如说，取它的最小解）作为 f 在 x 处的值．即作定义

$$f(x)=\text{“}g(t)=x\text{”} \quad \text{的最小 } t \text{ 根}.$$

显然函数 f 即已确定．这时有

$$gf(x)=g(t)=x,$$

故 f 为 g 的右逆函数，充分性得证． 证毕．

定义 如果 f 既是穷尽的，又是单叶的，则 f 叫做置换函数．

就置换函数而言，它取得每一自然数为值（穷尽性）而且只取得一次，不能多次取得（单叶性）．结合定理 1，2 立得：

定理 3 f 具有逆函数当且仅当 f 为置换函数．

定理 4 如果一函数 f 既有左逆函数 g_1，又有右逆函数 g_2，则必 $g_1=g_2(=g)$，而且 f 与 g 互为逆函数．

证 因 g_1 为 f 的左逆函数，g_2 为 f 的右逆函数，故有

$$g_1f(x)=x \tag{1}$$

$$fg_2(x)=x \tag{2}$$

故 $$g_1(x)=\langle(2)\rangle g_1(f(g_2(x)))=g_1f(g_2(x))=\langle(1)\rangle g_2(x).$$

这便表明了 f 的任何左逆函数都和 f 的任何右逆函数相等，从而左逆函数只有一个，右逆函数也只有一个，并且左逆与右逆也是相同的（同为 g），且 f 与 g 互为逆函数． 证毕．

根据定理 3，置换函数必有唯一的逆函数，除掉置换函数以外，别的函数不可能兼有左逆与右逆函数，它们只能或有左逆函数，或有右逆函数，可能两者都没有，而决不可能兼有两者．在这种情况之下，左逆函数、右逆函数是否唯一？有没有唯一的可能？

定理 5 对于只具有左逆函数或只具有右逆函数的函数而言，其左逆函数决不唯一，其右逆函数也决不唯一．

证　设函数 f 只具左逆函数而没有右逆函数，则 f 只具单叶性没有穷尽性，故至少有一值 a 不被 f 取得，即对任何 x 均有 $f(x)\neq a$. 这时其左逆函数 g 在 a 处的值可任意定义，故左逆函数 g 决不唯一.

设 g 只有右逆函数而没有左逆函数，则 g 只具穷尽性不具单叶性，故至少有两数 a, b 使得 $g(a)=g(b)(=c)$，这时 g 的右逆函数 f_1, f_2 可分别定为：$f_1(c)=a$ 而 $f_2(c)=b$（在其余地方两函数可以同值），故 g 至少有两个右逆函数.　　证毕.

但是在众多的左逆函数与众多的右逆函数之间，必有最小的左逆函数和右逆函数. 这最小的左逆函数、最小的右逆函数十分重要，是我们下文研究的主要内容. 如果把讨论范围限于不减函数，那末最大的左、右逆函数亦是存在的，它们也很重要.

下文我们把研究范围限于不减的数论函数，至于不增的数论函数是不必讨论的，因为我们有下列定理：

定理 6　如果 f 具有左逆函数或具有右逆函数，则 f 必是无界函数.

证　不论单叶函数或穷尽函数，都取得无穷多个不同的值，从而它必无界.

不增函数 f 必以 $f(0)$ 为界，从而不增函数既没有左逆函数也没有右逆函数，自然不在我们的讨论范围之内了.

§2. 不减函数的逆函数

我们用 S 表示后继函数（即 Sx 指 $x+1$），而用 $\dot{-}$ 表示算术减（当 $a\geqslant b$ 时 $a\dot{-}b$ 即 $a-b$，但当 $a<b$ 时 $a\dot{-}b=0$）. 又用 $\ddot{-}$ 表示差的绝对值，即 $a\ddot{-}b=|a-b|(=(a\dot{-}b)+(b\dot{-}a))$. 此外 $x\dot{-}1$ 又写为 Dx，而 $1\dot{-}x$ 又写为 Nx.

定义　如果 $f(x)\dot{-}f(Sx)=0$（对一切 x），则说 f 为不减函数，如果 $Sf(x)\dot{-}f(Sx)=0$（对一切 x），则说 f 为递增函数.

定义　如果 $f(Sx)\dot{-}f(x)=0$（对一切 x），则说 f 为不增函数，如果 $f(Sx)\dot{-}Sf(x)=0$（对一切 x），则说 f 为难增函数.

注意. 对难增函数而言，$f(Sx)$ 可小于 $f(x)$，可等于 $f(x)$，至多为 $f(x)+1$，不能更大，故叫做"难增".

定理 7　f 为难增的不减函数当且仅当

$$f(x)\dot{-}f(Sx)=f(Sx)\dot{-}Sf(x) \tag{*}$$

证　如果 f 难增，则 $f(Sx)\dot{-}Sf(x)=0$，如果 f 不减则 $f(x)\dot{-}f(Sx)=0$，故两者相等，而必要性得证.

反之，如果(*)成立而设右左两边之值非 0，则应有

$$f(x)\dot{-}f(Sx)=f(Sx)\dot{-}Sf(x)\geqslant 1,$$

这时必是通常的减法，故得

$$f(x)\geqslant f(Sx)+1 \quad 与 \quad f(Sx)\geqslant Sf(x)+1=f(x)+2,$$

这两式是互相矛盾的，不可能. 故得 $f(x)\dot{-}f(Sx)=f(Sx)\dot{-}Sf(x)=0$，从而 f 必不减且难增，充分性得证.　　证毕.

定义　难增的不减函数又叫做缓增函数.

在下文我们将限于讨论不减函数，即原给函数以及求出的左、右逆函数都要求为不减函数．因此，除为了强调外，我们不再声明"不减函数"的字样了．

将具左、右逆的充分必要条件应用到不减函数去，我们得出：

定理 8　不减函数 f 具左逆函数当且仅当 f 为递增；不减函数 g 具右逆函数当且仅当它为穷尽缓增函数．

读者自证．

根据定理 8，在下文凡讨论到 f 的左逆函数时，永假定 f 为递增函数，凡讨论到 g 的右逆函数时，永假定 g 为穷尽缓增函数(亦即穷尽不减函数)，除为了强调以外，不再一一注明．另外，由于一个穷尽缓增函数必是初值为 0 的难增函数，故 $g(0)$ 必为 0．

对于穷尽缓增函数，我们使用一个简便而又醒目的表示方法，即使用数列的方法．

设 g 为穷尽缓增函数(这时 g 取得每一值)，而 g 在 d_x 处第一次取得值 x，则用数列 $\{d_0, d_1, d_2, \cdots\}$ 表示函数 g．显然，对于满足 $d_x \leqslant t < d_{x+1}$ 的 t 而言必有 $g(t)=x$．$[d_x, d_{x+1} \dot{-} 1]$ 叫做 g 的常值区间(更明确些是常值 x 的区间)．

定义　上述的数列叫做函数 g 的代表数列．

定理 9　设 f，g 均为不减函数而 g 为 f 的左逆函数(亦即 f 为 g 的右逆函数)，而 g 的代表数列为 $\{d_x\}$，则必有：

$$d_0=0, \quad 而 \quad f(c)<d_{c+1}\leqslant f(c+1)$$

及

$$d_c\leqslant f(c)<d_{c+1}.$$

后两式亦可表示为：$f(c)+1\leqslant d_{c+1}\leqslant f(c+1)$，$d_c\leqslant f(c)\leqslant d_{c+1}\dot{-}1$．

证　根据左逆性我们有 $gf(c)=c$ 而 $gf(c+1)=c+1$．由于 g 的穷尽不减性，显然 g 第一次取 0 值必在 $x=0$ 处(故 $d_0=0$)，而第一次取值 $c+1$ 必在 $x=f(c)$ 之后而在 $x=f(c+1)$ 之前(亦可在 $x=f(c+1)$ 处)，故得 $d_{c+1}>f(c)$ 而 $d_{c+1}\leqslant f(c+1)$．　　证毕．

定义　如果 f_1，f_2 都以 g 为它的左逆函数，则 f_1，f_2 叫做右同伴；如果 g_1，g_2 都以 f 为它的右逆函数，则 g_1，g_2 叫做左同伴．

定理 10　如果 f_1，f_2 为右同伴，则有 $f_2(c\dot{-}1)+1\leqslant f_1(c)\leqslant f_2(c+1)\dot{-}1$；如果 g_1，g_2 为左同伴，则有 $d_2(c)+1\leqslant d_1(Sc)\leqslant d_2(c+2)\dot{-}1$．

证　根据定理 9 有(设相应的左右逆函数分别为 g，f)

$$f_2(c\dot{-}1)+1\leqslant d(c)\leqslant f_1(c)\leqslant d(Sc)\dot{-}1\leqslant f_2(c+1)\dot{-}1,$$

$$d_2(c)+1\leqslant f(c)+1\leqslant d_1(Sc)\leqslant f(c+1)\leqslant d_2(c+2)\dot{-}1.$$

从而定理得证．

本定理刻划了互为同伴的函数之间的关系．

下面两个定理将述及左逆函数与右逆函数本身的性质．

定理 11　对任何递增函数 $f(x)$，它的左逆函数 $g(x)$ 必为穷尽缓增函数．

证　因 $f(0)\geqslant 0$，且恒假设 $g(x)$ 为不减函数，故 $0=gf(0)\geqslant g(0)$，从而 $g(0)=0$．

下面证 $g(x)$ 为难增函数，即 $g(Sx)\dot{-}Sg(x)=0$．

首先设存在 c，使 $f(c)=x$，按 $f(c)$ 的递增性，有 $f(Sc)\geqslant Sf(c)=sx$，从而

$$g(Sx)\leqslant gf(Sc)=Sc=Sgf(c)=Sg(x), \quad 即 \quad g(Sx)\dot{-}Sg(x)=0.$$

再设不存在 c，使 $f(c)=x$，这时或者 $x<f(0)$，这时 $sx\leqslant f(0)$，$g(Sx)\leqslant gf(0)=0$，从

而 $g(Sx)=0$, 即 $g(Sx)\dot{-}Sg(x)=0$; 或者 $x>f(0)$, 这时存在 c, 使 $f(c)<x$ 且 $x<f(Sc)$, 即 $sx\leqslant f(Sc)$. 由于 g 的不减性, 即有 $g(Sx)\leqslant gf(Sc)=Sc=Sgf(c)\leqslant Sg(x)$或 $g(Sx)\dot{-}Sg(x)=0$, 从而 $g(x)$ 为难增函数. 由于 $g(x)$ 可取得一切值(对任意一个 c, $g(x)$ 在 $f(c)$ 处取得 c), 故 $g(x)$ 是初值为 0 的无界难增函数, 亦即为穷尽缓增函数.

定理 12　对任何穷尽缓增函数 $g(x)$, 它的右逆函数 $f(x)$ 必为递增函数.

证　设 $x_1<x_2$, $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. 需证 $y_1<y_2$. 试设 $y_2\leqslant y_1$. 由于 $g(x)$ 的不减性, 有 $g(y_2)\leqslant g(y_1)$, 或 $gf(x_2)\leqslant gf(x_1)$, 即 $x_2\leqslant x_1$, 这与原设 $x_1<x_2$ 矛盾, 从而知 $y_1<y_2$. 这就证明了 $f(x)$ 为递增函数.

定义　设 g_1, g_2 为 f 的左逆函数, 如果对 f 的任何左逆函数 g 均有

$$g_1(x)\leqslant g(x)\leqslant g_2(x)\quad (\text{一切 } x),$$

则 g_1 叫做 f 的弱左逆函数, 而 g_2 叫做 f 的强左逆函数.

定义　设 f_1, f_2 为 g 的右逆函数, 如果对 g 的任何右逆函数 f 均有

$$f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)\quad (\text{一切 } x),$$

则 f_1 叫做 g 的弱右逆函数, 而 f_2 叫做 g 的强右逆函数.

求逆运算是作用于函数之上的, 故它为算子而非函数. 我们用"iv"表示求逆算子, 它作用于一元函数之上, 如果用约束变元的说法, 则它约束一个空位, 并引进一个新添变元, 该约束空位在下文永用 i 表示. 我们用 l, r 表示左、右, 用 s, w 表示强、弱. 因此(x 为新添变元, 表示在 x 处求逆):

f 的任一个左逆函数记为 $ivl_x f(i)$,

f 的强左逆函数记为 $ivls_x f(i)$,

f 的弱左逆函数记为 $ivlw_x f(i)$,

右逆函数的记号仿此(须把"l"写为"r").

当求逆的函数不是复杂的式子而是函数符号 f, g 时, 可用更简单的记号如下:

f 的强左逆函数记为 $f^{\ulcorner}$,

f 的弱左逆函数记为 $f^{(}$,

g 的强右逆函数记为 $g^{\urcorner}$,

g 的弱右逆函数记为 $g^{)}$.

例如

$$f^{(}(x)=ivlw_x f(i),$$

$$g^{\urcorner}(x)=ivrs_x f(i).$$

等等, 但对用复杂表达式表示的函数, 如 $3i^2+8i+5$(作为 i 的函数), 其逆函数只用第一种方法表示为 $ivlw_x(3i^2+8i+5)$ 等等, 而不表示为 $(3i^2+8i+5)^{(}(x)$.

根据定义容易看出, 强、弱左、右逆函数, 如果存在的话必是唯一的. 我们有:

定理 13　递增函数的强、弱左逆函数必存在(从而唯一), 穷尽缓增函数的强、弱右逆函数也必存在(从而唯一).

证　设给出递增函数 f, 命其强、弱左逆函数为 g_1, g_2. 由定理 9 (命其代表数列分别为 $d_1(x)$, $d_2(x)$)知应有:

$$d_1(0)=0,\ d_1(Sx)=f(x)+1\quad (\text{强左逆函数}),$$

$$d_2(0)=0,\ d_2(Sx)=f(x+1)\quad (\text{弱左逆函数}),$$

代表数列既定，函数也就确定了．容易验证，由 $d_1(x)$ 与 $d_2(x)$ 所确定的函数 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 便分别是 f 的强、弱左逆函数．

设给出穷尽不减函数 g(其代表数列为 d_x)，命其强、弱右逆函数为 f_1，f_2，由定理 9 知道，由

$$f_1(x)=d_{x+1}\dot{-}1 \quad (\text{一切 } x),$$
$$f_2(x)=d_x \quad (\text{一切 } x)$$

所定义的 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 便分别是 g 的强、弱右逆函数． 证毕．

由上面的证明可得

推论 1 f 的强、弱左逆函数 g_1，g_2 可如下刻划

$$g_1f(x)=x,\ \ g_1(f(x)+1)=x+1 \quad (\text{从而 } d_{x+1}=f(x)+1),$$
$$g_2f(x)=x,\ \ g_2(f(x)\dot{-}1)=x\dot{-}1 \quad (\text{从而 } d_{x+1}=f(x+1)).$$

推论 2 g 的强、弱右逆函数 f_1，f_2 可如下刻划

$$f_1(x)=d_{x+1}\dot{-}1,$$
$$f_2(x)=d_x.$$

推论 3 f 的强、弱左逆函数 g_1，g_2 可互相表示如下

$$g_2(x)=g_1(x+1)\dot{-}1,$$
$$g_1(0)=0,\ \ g_1(Sx)=g_2(x)+(1\dot{-}(f(0)\dot{-}x)),$$

这里，当 $x<f(0)$ 时，$1\dot{-}(f(0)\dot{-}x)=0$，而当 $x\geqslant f(0)$ 时 $1\dot{-}(f(0)\dot{-}x)=1$．

推论 4 g 的强、弱右逆函数 f_1，f_2 可互相表示如下

$$f_1(x)=f_2(Sx)\dot{-}1,$$
$$f_2(0)=0,\ \ f_2(Sx)=f_1(x)+1.$$

以上四个推论，读者极易验证，今不赘．

对于 $f(x)$ 的强左逆函数 $g_1(x)$ 与弱左逆函数 $g_2(x)$，我们还可推得重要性质如下：

设 $x\geqslant f(0)$，则对任一 x，恒有 c，使 $f(c)\leqslant x<f(c+1)$，或 $f(c)<Sx\leqslant f(c+1)$，这时有 $g_2f(c)=c$，$g_2(x)=c$，故 $f(g_2(x))=f(c)\leqslant x$． 且 $f(Sg_2(x))=f(Sc)\geqslant Sx$． 另外又有 $g_1(Sx)=c+1$，$g_1f(c)=c$，故 $f(g_1(Sx))=f(Sc)\geqslant Sx$，$f(Dg_1(Sx))=f(c)\leqslant x$．

其次设 $x<f(0)$ 或 $Sx\leqslant f(0)$，这时 $g_2(x)=0$，$g_1(Sx)=0$，故 $f(Sg_2(x))=f(1)>f(0)\geqslant Sx$，又 $f(g_1(Sx))=f(0)\geqslant Sx$，由此可得

定理 14 对 $f(x)$ 的强、弱左逆函数 $f^{\complement}(x)$ 与 $f^{\langle}(x)$ 有性质

$$Sx\leqslant f(Sf^{\langle}(x)),\quad Sx\leqslant ff^{\complement}(Sx).$$

当 $x\geqslant f(0)$ 时，有 $\quad f(f^{\langle}(x))\leqslant x,\quad f(Df^{\complement}(Sx))\leqslant x.$

§3. 逆函数的原函数

已知某函数 f 的左逆函数 g，要去求 g 的"原函数" f 是不可能的，因为 f 实为 g 的某个右逆函数，但 g 的右逆很多，故不知道 g 的哪一个右逆是 g 的原函数．要去求右逆函数的"原函数"同样有类似的情况．不过，在强、弱左逆或右逆的情况却有着确定的结论．

定理 15 若 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都以 $g(x)$ 为它的强左逆函数．则 $f_1(x)=f_2(x)$．

证　试设在 a 处有 $f_1(a)\neq f_2(a)$，不妨令 $f_1(a)=b$，$f_2(a)=c$，且 $b<c$. 由于 g 为 f_1 的强左逆，故有 $g(b)=gf_1(a)=a$，$g(b+1)=a+1$；再由 $b+1\leqslant c$ 与 g 的不减性得 $g(b+1)\leqslant g(c)=gf_2(a)=a$. 从而得矛盾式子"$a+1\leqslant a$"！　证毕.

定理 16　若 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都以 $g(x)$ 为它的弱左逆函数，则 $f_1(Sx)=f_2(Sx)$.

证　试设在 Sa 处 $f_1(Sa)\neq f_2(Sa)$. 不妨令 $f_1(Sa)=b$，$f_2(Sa)=c$，且 $b<c$. 由于 g 为 f_2 的弱左逆，故有 $g(c)=gf_2(Sa)=Sa$，$g(Dc)=a$；再由 $b\leqslant Dc$（因 $b<c$）与 g 的不减性得 $g(b)\leqslant g(Dc)=a$，但 $g(b)=gf_1(Sa)=Sa$，从而得矛盾式子"$Sa\leqslant a$".　证毕.

定理 17　若 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 都以 $f(x)$ 为它的强右逆函数，则 $g_1(x)=g_2(x)$.

证　试设在 a 处 $g_1(a)\neq g_2(a)$. 不妨令 $g_1(a)=b$，$g_2(a)=c$，且 $b<c$. 因 $g_1(a)=b$，$g_1f(b)=b$，由 f 的强右逆性得 $f(b)\geqslant a$. 由 g_2 的不减性得 $g_2f(b)\geqslant g_2(a)$，即 $b\geqslant c$，与原假设 $b<c$ 矛盾.　证毕.

定理 18　若 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 都以 $f(x)$ 为它的弱右逆函数，则 $g_1(x)=g_2(x)$.

证　试设在 a 处 $g_1(a)\neq g_2(a)$. 不妨令 $g_1(a)=b$，$g_2(a)=c$，且 $b<c$. 这时，由于 $g_2f(c)=c$，$g_2(a)=c$，按 $f(x)$ 的弱右逆性，得 $f(c)\leqslant a$，再按 g_1 的不减性得 $g_1f(c)\leqslant g_1(a)$，即 $c\leqslant b$，与原假设 $b<c$ 矛盾.　证毕.

由上述四个定理知，当一个函数的强左逆函数已知为 $g(x)$，则 $g(x)$ 的原函数是唯一确定的；当一个函数的弱左逆函数已知为 $g(x)$，且已知 $g(x)$ 的原函数的初值，则 $g(x)$ 的原函数是唯一确定的；当一个函数的强或弱右逆函数已知为 $f(x)$，则 $f(x)$ 的原函数是唯一确定的.

事实上，从强、弱左逆与强、弱右逆的组成很易得：

定理 19　一个强左逆函数的原函数是此强左逆的强右逆函数；一个弱左逆函数的原函数，当此原函数的初值为 0 时是此弱左逆的弱右逆函数. 即

$$(f^{[})^{]}(x)=f(x);$$

当 $f(0)=0$ 时有

$$(f^{(})^{)}(x)=f(x).$$

定理 20　一个强(弱)右逆函数的原函数是此强(弱)右逆函数的强(弱)左逆函数. 即

$$(g^{)})^{(}(x)=g(x);\quad (g^{]})^{[}(x)=g(x).$$

利用定理 17 与定理 18，再注意到强、弱左(右)逆函数之间的关系(见 §2 推论 3 与推论 4)，我们还可得

定理 21

$$(f^{[})^{)}(x)=[Sf(Dx)]N^2x,$$
$$(f^{(})^{]}(x)=Df(Sx),$$
$$(g^{]})^{(}(x)=Dg(Sx),$$
$$(g^{)})^{[}(x)=g(Dx)+N^2x.$$

§4. 剩 余 函 数

当 f 与 g 互为逆函数时，$gf(x)\mathbin{\dot{-}}x$ 与 $fg(x)\mathbin{\dot{-}}x$ 均为 0. 但当 f 只为 g 的右逆函数而 g 只为 f 的左逆函数时，我们只有 $gf(x)\mathbin{\dot{-}}x=0$. 这时 $fg(x)\mathbin{\dot{-}}x$ 便是测量 f 与 g 的互逆性的测度. 如果该值为 0，便表示 f 与 g 互逆，如果其值非 0，则 f 与 g 决非互逆. 该值

越大，便离互逆可能性越远。

即使知道了 $gf(x)=x$，但 $fg(x)$ 的值为何，它与 x 的差值为何？似乎是很难予先确定的。但当 f 与 g 均为不减函数时(这是我们所讨论的)，却很容易决定。

先设给定 f，而 g 为 f 的任一左逆函数。因 f 为递增函数，故对每个 x，当 $x\geqslant f(0)$ 时，均有唯一的 c 使得 $f(c)\leqslant x<f(c+1)$。因 f，g 均为不减函数，故 $f(g(x))$ 也为不减函数，故得 $fg(f(c))\leqslant fg(x)\leqslant fg(f(c+1))$，因 g 为 f 的左逆函数，有 $gf(c)=c$ 及 $g(f(c+1))=c+1$，故得 $f(c)\leqslant fg(x)\leqslant f(c+1)$。$fg(x)$ 为 f 值之一，但在 $f(c)$ 与 $f(c+1)$ 之间没有别的 f 值(由于 f 的递增性)，故必

$$fg(x)=f(c) \quad 或 \quad =f(c+1).$$

另外，当 $x<f(0)$ 时，由于这时 $g(x)=0$，故 $f(g(x))=f(0)$。因此我们得到下列定理：

定理 22 如果 g 为 f 的任一左逆函数，则当 $x\geqslant f(0)$ 时 $fg(x)$ 必为最接近于 x 的两个 f 值之一(其一小于或等于 x，另一大于 x)。而当 $x<f(0)$ 时 $fg(x)$ 即为 $f(0)$。

定义 如果 $f(c)\leqslant x<f(c+1)$，则 $x\dot{-}f(c)$ 叫做 x 的 f 剩余，而 $f(c+1)\dot{-}x$ 叫做 x 的 f 欠缺，如 $x<f(0)$，则 $f(0)\dot{-}x$ 亦叫做 x 的 f 欠缺。

由本定义，定理 22 可改写为

定理 23 如果 g 为 f 的任一左逆函数，则 $fg(x)\dot{-}x$ 或为 x 的 f 欠缺或为 x 的 f 剩余。

再设给定 g，而 f 为 g 的任一右逆函数。命 g 的代表数列为 $\{d_x\}_0$ 我们知道，当 $d_c\leqslant x<d_{c+1}$ 时必有 $g(x)\equiv c$，故区间 $[d_c,\ d_{c+1}\dot{-}1]$ 可以叫做 g 的常值区间，记为 I_c 即

$$I_c=区间[d_c,\ d_{c+1}\dot{-}1].$$

设 x 在区间 I_c 内，则 $g(x)=c$，而 $fg(x)=f(c)$。由于 f 为 g 的右逆函数，$f(c)$ 的值必须在区间 I_c 内，即必须

$$d_c\leqslant f(c)\leqslant d_{c+1}\dot{-}1.$$

从而

$$fg(x)\dot{-}x\leqslant \max(x\dot{-}d_c,\ d_{c+1}\dot{-}1\dot{-}x).$$

因得

定理 24 如果 f 为 g 的任一右逆函数，则 $fg(x)\dot{-}x$ 必不大于 $(x\dot{-}d_c,\ d_{c+1}\dot{-}1\dot{-}x)$ 中的大者，其中 $[d_c,\ d_{c+1}\dot{-}1]$ 为含有 x 的 g 的常值区间。在特例，当 f 为弱、强右逆函数时，$fg(x)\dot{-}x$ 便分别是 $x\dot{-}d_c$ 与 $d_{c+1}\dot{-}1\dot{-}x$。

我们还可进一步研究下列问题，设给定 f 后，求其一切左逆函数 g_i，对每个 g 又求其一切右逆函数 f_j(f 亦为 f_j 之一)，试求 $f_jg_i(x)\dot{-}x$ 的最大值及最小值(当 i, j 变化时)。

又设给定函数 g 后，求它的一切右逆函数 f_i，对每个 f_i 再求它的一切左逆函数 g_j(g 亦为 g_j 之一)，试求 $f_ig_j(x)\dot{-}x$ 的最大值及最小值(当 i, j 变化时)。

要求出这些值并不困难，今略。

试举一例，$f(x)=x\cdot(St)$ 有弱左逆函数 $g_2(x)=\left[\frac{x}{St}\right]$，有强左逆函数 $g_1(x)=\left[\frac{x+t}{St}\right]$，易见 $g_1f(x)=g_2f(x)=x$，而

$$fg_2(x)\dot{-}x=\left[\frac{x}{St}\right]\cdot St\dot{-}x \quad 便是通常剩余函数;$$

而 $fg_1(x)\dot{-}x=\left[\frac{x+t}{St}\right]\cdot St\dot{-}x$ 便是从略大于 x 的 St 倍数减去 x 的剩余. 依我们上文的名词, 那末 $fg_2(x)\dot{-}x$ 便是 x 的 St 倍剩余, 而 $fg_1(x)\dot{-}x$ 便是 x 的 St 倍欠缺.

又如, $f(x)=x^2$ 有弱左逆函数 $[\sqrt{x}]=g_2(x)$, 有强左逆函数 $g_1(x)=[\sqrt{x+2[\sqrt{x}]}]$, 易见有 $g_1f(x)=g_2f(x)=x$, 而 $fg_2(x)\dot{-}x=x\dot{-}[\sqrt{x}]^2$ 便是通常的平方剩余, 而 $fg_1(x)\dot{-}x=[\sqrt{x+2[\sqrt{x}]}]^2\dot{-}x$ 便是平方欠缺.

至于先给 g 而求其右逆函数的, 通常使用较少, 这里就不举例了.

对于强、弱左逆函数的情况, 我们还特别给出如下定义:

定义 $ff^{\mathrm{L}}(x)\dot{-}x$ 与 $ff^{\mathrm{l}}(x)\dot{-}x$ 分别叫做 f 的强、弱左剩余函数, 并分别记为 $rmls_xf(i)$ 与 $rmlw_xf(i)$.

我们将在另文中给出它们的原始递归定义.

§5. 多元函数的求逆

求逆算子是只对一元函数实施的, 要想对多元函数而求逆, 须作一些必要的澄清或推广. 一般说来, 目前有两种方法来研究多元函数的求逆.

第一种办法是带参数的逐元求逆. 例如, 设有三元函数 $f(x, y, z)$ (一般的 n 元函数仿此讨论). 我们可以把 y, z 看作参数而只对 x 求逆, 又可把 x, z 看作参数对 y 求逆, 可把 x, y 看作参数对 z 求逆, 从而共得三种逆函数如下

$$iv_xf(i, y, z);\quad iv_yf(x, i, z);\quad iv_zf(x, y, i).$$

一般来说, n 元函数共有 n 个逆函数.

当逆函数不存在时, 可改为讨论左逆函数, 右逆函数, 由于左逆右逆不唯一, 可讨论弱左、右逆, 强左、右逆函数等等. 其理论和一元函数的情况全同, 没有什么新异的地方. 唯一不同的是: 左右逆函数还依赖于参数(除依赖于新添变元外), 例如 $g_1(f(x, y, z), y, z)=x$, $f(g_1(x, y, z), y, z)=x$ 等等. 这是一元函数的情况所没有的.

要考察逆函数对参数的依赖关系, 这很困难也很重要. 我们在下文将举出一些例子.

第二种办法是不带参数的求逆, 仍以 $n=3$ (即三元函数)为例.

定义 设给出一个三元函数 $f(x, y, z)$, 如果对一切 x, y, z 均有 $g_1f(x, y, z)=x$, $g_2f(x, y, z)=y$, $g_3f(x, y, z)=z$, 则说 g_1, g_2, g_3 分别是 f 的第一、第二、第三左逆函数. 如果对一切 x 均有 $f(g_1(x), g_2(x), g_3(x))=x$ (不能要求 $f(g_1(x), y, z)=x$, $f(x, g_2(y), z)=y$, $f(x, y, g_3(z))=z$, 具这样性质的 f 是很少的), 则说 g_1, g_2, g_3 分别是 f 的第一、第二、第三右逆函数. 如果 g_1, g_2, g_3 既是 f 的左逆函数, 又是 f 的右逆函数, 便说 g_1, g_2, g_3 为 f 的第一、第二、第三逆函数.

这样做法, 实际上是讨论配对函数. 现在所讨论的配对函数, 一般要求(仍以 $n=3$ 为例)

$$g_1f(x, y, z)=x,\quad g_2f(x, y, z)=y,\quad g_3f(x, y, z)=z, \tag{甲}$$

这是配对函数的基本条件. 如果又有

$$f(g_1(x), g_2(x), g_3(x))=x, \tag{2}$$

这时便得一一对应的配对函数组．一般常用不是一一对应的配对函数组，即只要求满足(甲)的三个等式而不要求满足(乙)的等式，这实际上是只使用 f 的左逆函数而不要求同时又为 f 的右逆函数．

在递归函数论中，配对函数非常重要，一一对应的配对函数组固然很重要，不是一一对应的配对函数组也很重要，需对它作深入的研究，我们这里就不多谈了(见文[1])．

以上两种推广都是很重要的，很有用处的．对第一种的推广方法说来，要研究左右逆函数对新添变元的依赖关系，这与一元函数情况相同，没有新意．但是我们还必须研究左右逆函数对参数的依赖关系．这一般说来是比较困难的，但是我们仍然获得下列的结果．

设 $\mu(i, y)$ 对 i 穷尽缓增，从而可求其右逆函数，任取其一记为

$$ivr_x\mu(i, y)=g(x, y).$$

定理 25　设 μ, g 如上所定，则当 μ 对 y 递增时，g 对 y 递减；反之，μ 对 y 递减时，g 对 y 递增．

证　命

$$ivr_x\mu(i, y_1)=t_1(=g(x, y_1)),$$
$$ivr_x\mu(i, y_2)=t_2(=g(x, y_2)),$$

其中 $y_1<y_2$．根据右逆性我们有

$$\mu(g(x, y_1), y_1)=x, \quad \mu(g(x, y_2), y_2)=x.$$

作代入得

$$\mu(t_1, y_1)=x=\mu(t_2, y_2).$$

设 μ 对 y 递增，再设 $t_1\leqslant t_2$，则有

$$x=\mu(t_1, y_1)\leqslant\mu(t_2, y_1)\quad (\text{因 } \mu \text{ 对第一变元不减})$$
$$<\mu(t_2, y_2)=x,\quad (\text{因 } \mu \text{ 对第二变元递增})$$

这不可能，故必 $t_1>t_2$．即 g 对第二变元递减．

同法可证，如 μ 对第二变元递减，则 g 对第二变元递增．　　证毕．

对于左逆函数，我们只能就强或弱的左逆函数作出类似的结论．

定理 26　设 $u(x, y)$ 对 x 递增(从而存在对 x 的左逆函数)，则当 $u(x, y)$ 对 y 不减时，它(对 x)的弱左逆函数 $V_1(x, y)=ivlw_xu(i, y)$ 必对 y 不增．反之，若 $u(x, y)$ 对 y 不增时，$V_1(x, y)$ 对 y 递增．

证　首先考虑 $x\geqslant u(0, y)$ 的情况．设 $y_1<y_2$, $V_1(x, y_1)=t_1$, $V_1(x, y_2)=t_2$，需证 $t_1\geqslant t_2$．试令 $t_1<t_2$，即 $St_1\leqslant t_2$．因 $u(x, y)$ 对 x 不减，再根据弱左逆函数的性质(在一元的情况，它们是 $Sx\leqslant f(Sf^{(}(x))$，当 $x\geqslant f(0)$ 时 $f(f^{(}(x))\leqslant x$，见 § 2 定理 14)，应有

$$Sx\leqslant u(St_1, y_1)\leqslant u(t_2, y_1)\leqslant u(t_2, y_2)\leqslant x,$$

再考虑 $x<u(0, y)$ 的情况．这时根据 $V_1(x, y)$ 对 x 的不减性(对逆函数的基本要求)和左逆的定义，有

$$V_1(x, y)\leqslant V_1(u(0, y), y)=0, \quad \text{即}\ V_1(x, y)=0,$$

从而 $V_1(x, y)$ 亦可说对 y 不增．　　证毕．

同法可证当 $u(x, y)$ 对 y 不增时，$V_1(x, y)$ 对 y 递增．

定理 27　设 $u(x, y)$ 对 x 不减，则当 $u(x, y)$ 对 y 不减时它(对 x)的强左逆函数 $V_2(x, y)=ivls_xu(i, y)$ 必对 y 不增．反之，当 $u(x, y)$ 对 y 不增时，$V_2(x, y)$ 对 y 不减．

证　首先考虑 $x\geqslant u(0, y)$ 的情况．

i) 若 $u(0, y)>0$, 则 $x\geqslant 1$, 这时设 $y_1<y_2$, $V_2(Sx, y_1)=t_1$, $V_2(Sx, y_2)=t_2$, 需证 $t_1\geqslant t_2$. 试令 $t_1<t_2$, 即 $t_1\leqslant Dt_2$, 因 $u(x, y)$ 对 x 不减, 再根据强左逆函数的性质(在一元情况它们是 $Sx\leqslant ff^{\mathrm{L}}(Sx)$, 当 $x\geqslant f(0)$ 时 $f(Df^{\mathrm{L}}(Sx))<x$, 见 § 2 定理 14), 应有

$$x\geqslant u(Dt_2, y_2)\geqslant u(t_1, y_2)\geqslant u(t_1, y_1)\geqslant Sx,$$

矛盾.

ii) 若 $u(0, y)=0$, 则 $x=0$, $V_2(0, y)=V_2(u(0, y), y)=\langle$左逆定义$\rangle 0$, 从而 $V_2(0, y)$ 亦可说对 y 不增.

再考虑 $x<u(0, y)$ 的情况, 这时仿定理 26 中证明亦得 $V_2(x, y)=0$, 即 $V_2(x, y)$ 对 y 不增.

证毕.

同法可证, 当 $u(x, y)$ 对 y 不增时, $V_2(x, y)$ 对 y 不减.

例　$u(x, y)=x\cdot Sy$ 对第一变元递增, 故有左逆函数 $g_1(x, y)=\left[\dfrac{x+y}{Sy}\right]$ 及 $g_2(x, y)=\left[\dfrac{x}{Sy}\right]$, 它们都对新添变元 x 不减, 而对参数(y)不增. 又如 $u(x, y)=x^{sy}$, 它对第一变元 x 递增, 故有左逆函数 $g(x, y)=[\sqrt[sy]{x}]$, 它对新添变元 x 不减而对参数 (y) 不增, (把 $\sqrt[1]{x}$ 理介为 x)

值得指出, 一般人都或多或少地有一种看法, 以为原函数如果对 x, 对 y 不减, 则逆函数对 x 对 y 也不减, 这种看法是不对的, 应该明确地认为: 如果原函数对 x 对 y 均不减, 则当对 x 求逆时(新添变元仍为 x), 逆函数对新添变元 x 不减, 对参变元 y 不增; 如对 y 求逆时(新添变元仍为 y), 则逆函数对新添变元 y 不减, 对参变元 x 不增. 这是极易验证的.

参 考 文 献

[1] 莫绍揆, 递归函数论, 上海科学技术出版社, 1965.
[2] Péter, R., 递归函数论, 莫绍揆译, 科学出版社, 1958.

INVERSE FUNCTIONS OF NUMBER-THEORETIC FUNCTIONS (I)

Mo Shaokui Shen Baiying
(*Nanjing University*)

ABSTRACT

If $gf(x)=x$ for every x, then g is called a left inverse function of f and f is a right inverse function of g. If f is both left and right inverse function of g, then f and g are said to be mutually inverse to each other. We show that (§ 1) the following results hold. A function f has a left inverse if and only if f is univalent, a function g has a right inverse if and only if g is exhaustive, i. e., g takes every (natural) number as values. Hence f has both left and right inverse if and only if f is both univalent and exhaustive, i. e., f is a permutation on the domain of natural numbers.

Let g_1 and g_2 be two left inverse functions of the function f. If for every left inverse g of f, we have $g_1(x)\leqslant g(x)\leqslant g_2(x)$, then $g_1(x)$ is called the weak, and $g_2(x)$ is the strong, left inverse function of f. Similarly we define the weak and the strong right inverse functions.

We show that (§ 2) every strict increasing function f must possess weak and strong left inverse functions, and all of its left inverse functions must be exhaustive slow increasing (a function $g(x)$ is slow increasing if and only if $g(Sx)\dot{-}Sg(x)=0$, here s denotes the successor function). On the other hand, every exhaustive function g must possess weak and strong right inverse functions, and all of its right inverse functions must strict increasing.

We show also that (§ 3):

If $f_1(x)$ and $f_2(x)$ both take $g(x)$ as their strong (weak) left inverse, then $f_1(x)=f_2(x)$ $(f_1(Sx)=f_2(Sx))$.

If $g_1(x)$ and $g_2(x)$ both take $f(x)$ as their strong or weak right inverse, then $g_1(x)=g_2(x)$.

From these results we see that we may find a function from its strong (weak) left or right inverse function.

Let there be $f(c)\leqslant x<f(c+1)$, then $x\dot{-}f(c)$ is called the f-residue of x and $f(c+1)\dot{-}x$ is the f-deficiency of x.

We show that (§ 4) if $g(x)$ is any left inverse of f then $|f(g(x))-x|$ must be either the f-residue or the f-deficiency of x.

In the last section (§ 5) we consider the case of functions of several variables.