数 学 年 刊
3 (1) 1982

关于时滞系统稳定性的一个问题

黄振勋 林晓标
(复旦大学)

1. 引 言

我们讨论下列时滞系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-r),\quad r\geqslant 0, \tag{1}$$

其中 $x(t)$ 是时间 t 的 n 维向量函数，A 和 B 是 $n\times n$ 的常数矩阵．假定 A 的特征值都具有负实部．

如果对于任何时滞 $r\geqslant 0$，(1) 的零解均为渐近稳定，则称系统 (1) 为无条件稳定．Hale[1] 用二次型加积分项的 Ляпунов 泛函

$$V(\phi)=\phi^T(0)C\phi(0)+\int_{-r}^{0}\phi^T(\theta)E\phi(\theta)d\theta \tag{2}$$

来讨论(1)的零解的渐近稳定性．其中 T 表示转置，并选取矩阵 $E>0$ 和对称矩阵 $C>0$，使得

$$A^TC+CA=-D<0. \tag{3}$$

泛函(2)沿着(1)的解的导数为

$$\dot{V}_{(1)}(\phi)=-\phi^T(0)(D-E)\phi(0)+2\phi^T(0)CB\phi(-r)-\phi^T(-r)E\phi(-r). \tag{4}$$

设

$$H=\begin{bmatrix} D-E & -CB \\ -(CB)^T & E \end{bmatrix}^* \tag{5}$$

若存在正定矩阵 C 和 E，使得矩阵 H 正定，则系统(1)无条件稳定．Hale[1] 还说，如果矩阵 $H>0$，那末(1)的解 $x(t;\ t_0,\ \phi)$ 趋向于零的速度不依赖于时滞 r，即有下列指数估计

$$\|x(t;\ t_0,\ \phi)\|\leqslant K(r)e^{-\alpha(t-t_0)}\|\phi\|, \tag{6}$$

其中常数 α 与时滞 r 无关，且 $\alpha>0$．

本文指出：这后一结论不成立，并就一般的滞后型泛函微分方程，进一步讨论了 Ляпунов 泛函与解的指数估计之间的关系．

由于 Hale 的正问题的结论 (6) 式不成立，因此 Hale 的逆问题应修改为：若系统 (1) 为无条件稳定，是否一定存在形如(2)的 Ляпунов 泛函，使得 $\dot{V}_{(1)}(\phi)<0$？即是否一定存

本文 1980 年 7 月 3 日收到，1980 年 9 月 13 日修改．

* [1] 中 H 的表达式应修改成 (5) 式．事实上按 [1] 107 页 (2.4) 式给出的 H 计算，得到 $\dot{V}_{(1)}(\phi)$ 的相应项为 $\phi^T(0)[CB+(CB)^T]\phi(-r)\neq 2\phi^T(0)CB\phi(-r)$．

在矩阵 $C>0$ 及 $E>0$，使得矩阵 $H>0$?

本文通过一个反例，说明这个逆问题不一定有解.

2. Ляпунов 泛函与解的指数估计

下面我们首先指出，存在定正的 Ляпунов 泛函(2)，使得(4)定负，并不能保证解 $x(t)$ 有估计(6). 为此先证明下列引理:

引理　系统(1)的解 $x(t)$ 有估计(6)的充要条件为: 存在常数 $\alpha>0$，使得(1)的特征方程

$$\det(\lambda I-A-Be^{-\lambda r})=0 \tag{7}$$

的所有特征根满足

$$\operatorname{Re}\lambda\leqslant-\alpha. \tag{8}$$

证　充分性显然.

必要性: 用反证法，对于任何给定的 $\alpha>0$，假定(8)式不是对一切 λ 都成立，则存在(7)的特征根 λ_0，使 $\operatorname{Re}\lambda_0>-\alpha$，从而(1)存在解 $x(t)=Fe^{\lambda_0 t}$. 它显然不满足估计式(6).

现在考察 $n=1$ 的情形，方程(1)成为

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-r). \tag{9}$$

定理1　当 $b\neq0$ 时，不存在常数 $\alpha>0$，使方程(9)的解满足估计式(6).

证　根据引理，只要证明不存在 $\alpha>0$，使得对一切 $r\geqslant0$，特征方程

$$\lambda-a-be^{-\lambda r}=0 \tag{10}$$

的一切根满足(8)式.

置 $s=\lambda r$，得到

$$s-ar-bre^{-s}=0. \tag{11}$$

Hayes[3] 的定理说，方程 $se^s-a_1e^s-a_2=0$ 的根都位于 $\operatorname{Re}s=K$ 的左边的充要条件为

$$\begin{cases}a_1-K<1, & (12)\\ (a_1-K)e^{-K}<-a_2<e^K[V^2+(a_1-K)^2]^{1/2}, & (13)\end{cases}$$

其中 V 是方程 $v\operatorname{ctg}v=a_1-K$ 在 $0<v<\pi$ 中唯一的根.

对(10)要求 $\operatorname{Re}\lambda\leqslant-\alpha$，从而要求(11)的根满足 $\operatorname{Re}s\leqslant-\alpha r=K$，这样，条件(12)是

$$(a+\alpha)r<1,$$

对一切 $r>0$ 成立. 由此

$$a+\alpha\leqslant0. \tag{14}$$

而(13)的第一个不等式是

$$(a+\alpha)e^{-\alpha r}<-b,$$

对一切 $r>0$ 成立. 由此，令 $r\to+\infty$ 得

$$b\leqslant0, \tag{15}$$

又(13)的第二个不等式是

$$-br<e^{-\alpha r}\sqrt{V^2+(a+\alpha)^2r^2},$$

对一切 $r>0$ 成立. 故

$$b \geqslant 0. \tag{16}$$

从而 $b=0$. 因此 $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -\alpha$ 的必要条件为 $b=0$. 　　证毕.

Hale[1] 指出, 对于 $n=1$ 情形, 若方程 (9) 无条件稳定, 则当 $a \neq b$ 时, 必存在 $C>0$ 和 $E>0$ 使得 $H>0$. 但根据定理 1, 当 $b \neq 0$ 时, 解 $x(t)$ 肯定不满足指数估计 (6) 式, 因此 Hale[1] 正问题的结论 (6) 不成立.

下面我们对一般的滞后型泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t, x_t) \tag{17}$$

讨论 Ляпунов 泛函与解的指数估计之间的关系.

设 $f(t, \phi)$: $\mathbf{R} \times C \to \mathbf{R}^n$ 连续, $x(t_0, \phi)(t)$ 表示方程 (17) 过 (t_0, ϕ) 的解

$$C_H=\{\phi \mid \phi \in C,\ \|\phi\| + H\}.$$

定理 2 方程 (17) 的解 $x(t_0, \phi)(t)$ 满足下列指数估计

$$\|x(t_0, \phi)(t)\| \leqslant a(\|\phi\|) e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (\alpha>0,\ t \geqslant t_0) \tag{18}$$

的充要条件为: 存在泛函 $V(t, \phi): R^+ \times C_H \to R^+$, 满足:

(i) $b(\|\phi\|) \leqslant V(t, \phi) \leqslant a(\|\phi\|) e^{\alpha r}$

其中 $a(x)$、$b(x)$ 分别为 $R^+=[0, +\infty)$ 上的连续函数, 且 $b(x) \geqslant x$;

(ii) $\dot{V}(t, \phi) \leqslant -\alpha V(t, \phi)$, 对一切 $t \geqslant 0$ 及 $\phi \in C_H$ 成立.

证　首先由 Driver[5] 知, 指数估计 (18) 等价于

$$\|x_t(t_0, \phi)\| \leqslant e^{\alpha r} a(\|\phi\|) e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t \geqslant t_0), \tag{19}$$

必要性: 置 $V(t, \phi)=\sup\limits_{\tau \geqslant 0}(\|x_{t+\tau}(t, \phi)\| e^{\alpha\tau})$, 那末由

$$\|x_{t+\tau}(t, \phi)\| e^{\alpha\tau} \leqslant e^{\alpha r} \cdot a(\|\phi\|) e^{-\alpha\tau} \cdot e^{\alpha\tau} = a(\|\phi\|) e^{\alpha r},$$

得到

$$V(t, \phi) \leqslant a(\|\phi\|) e^{\alpha r}.$$

又 $\sup\limits_{\tau \geqslant 0}(\|x_{t+\tau}(t, \phi)\| e^{\alpha\tau}) \geqslant \|x_t(t, \phi)\| = \|\phi\|$, 置 $b(x)=x$, 就得(i), (ii) 的证明参看[4].

充分性: 置 $V^*(t)=V(t, x_t(t_0, \phi))$, 那末

$$\begin{aligned} D^+(V^*(t) e^{\alpha(t-t_0)}) &= D^+V^*(t) e^{\alpha(t-t_0)} + V^*(t) \alpha e^{\alpha(t-t_0)} \\ &\leqslant -\alpha V^*(t) e^{\alpha(t-t_0)} + \alpha V^*(t) e^{\alpha(t-t_0)} = 0. \end{aligned}$$

因此

$$V^*(t) e^{\alpha(t-t_0)} \leqslant V^*(t_0),$$

从而

$$\|x_t(t_0, \phi)\| \leqslant b(\|x_t(t_0, \phi)\|) \leqslant V^*(t) \leqslant V^*(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} \leqslant a(\|\phi\|) e^{\alpha r} \cdot e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

证毕.

若置

$$\|\phi\|_\eta = \left(|\phi(0)|^\eta + \int_{-r}^{0} |\phi(\theta)|^\eta d\theta\right)^{1/\eta}, \quad (\eta>0).$$

我们有下述定理:

定理 3 若存在泛函 $V(t, \phi): R^+ \times C_H \to R^+$ 满足:

(i) $\nu |\phi(0)|^\eta \leqslant V(t, \phi) \leqslant K \|\phi\|_\eta^\eta$, $(\nu, K>0)$;

(ii) $\dot{V}(t, \phi) \leqslant -C_1 |\phi(0)|^\eta$, $(C_1>0)$, [注]

则方程 (17) 的解 $x(t_0, \phi)(t)$ 适合

$$\|x(t_0, \phi)(t)\| \leqslant K_1(r) \|\phi\|_\eta e^{-\alpha_1(r)(t-t_0)} \quad (t \geqslant t_0)$$

注　如果把 (ii) 改为 "$\dot{V}(t, \phi) \leqslant -C_1\|\phi\|^\eta$," 则此定理为已知结果, 我们这里的条件较弱.

其中
$$K_1(r)=\left[\frac{\left(K+\dfrac{C_1r}{1+r}\right)}{\nu}\right]^{1/\eta},$$

$$\alpha_1(r)=\frac{C_1}{[(1+r)K+rC_1]\eta}.$$

证　设
$$\beta(\theta)=\frac{C_1}{1+r}\theta+\frac{rC_1}{1+r},$$

则
$$\beta(-r)=0,\ \beta(0)=\frac{rC_1}{1+r},\ \beta'(\theta)=\frac{\beta(0)}{r}>0.$$

置
$$V^*(t,\ \phi)=V(t,\ \phi)+\int_{-r}^{0}\beta(\theta)|\phi(\theta)|^\eta d\theta,$$

那末由(i)得
$$\nu|\phi(0)|^\eta\leqslant V^*(t,\ \phi)\leqslant[K+\beta(0)]\|\phi\|_\eta^\eta, \tag{20}$$

而
$$\begin{aligned}\dot V^*(t,\ \phi)&=\dot V(t,\ \phi)+\beta(0)|\phi(0)|^\eta-\beta(-r)|\phi(-r)|^\eta-\int_{-r}^{0}\beta'(\theta)|\phi(\theta)|^\eta d\theta\\&\leqslant-[C_1-\beta(0)]|\phi(0)|^\eta-\frac{C_1}{1+r}\int_{-r}^{0}|\phi(\theta)|^\eta d\theta\\&=-\frac{C_1}{1+r}\|\phi\|_\eta^\eta\leqslant-\frac{C_1}{1+r}\cdot\frac{V^*(t,\ \phi)}{K+\beta(0)}\\&=-\frac{C_1}{[(1+r)K+rC_1]}V^*(t,\ \phi)\overset{\text{def.}}{=\!=}-\sigma(r)V^*(t,\ \phi)\end{aligned} \tag{21}$$

由(20)及(21)得到
$$\begin{aligned}\nu\|x(t_0,\ \phi)(t)\|^\eta&\leqslant V^*(t,\ x_t(t_0,\ \phi))\leqslant V^*(t_0,\ \phi)e^{-\sigma(r)(t-t_0)}\\&\leqslant[K+\beta(0)]\|\phi\|_\eta^\eta e^{-\sigma(r)(t-t_0)}=\left[K+\frac{C_1r}{1+r}\right]\|\phi\|_\eta^\eta e^{-\sigma(r)(t-t_0)}.\end{aligned}$$

因此
$$\|x(t_0,\ \phi)(t)\|\leqslant K_1(r)\|\phi\|_\eta e^{-\alpha_1(r)(t-t_0)}.$$

推论　对于方程(1)若存在泛函(2)，使得$\dot V_{(1)}(\phi)<0$，则方程(1)的解$x(t_0,\ \phi)(t)$适合下列估计式
$$\|x(t_0,\ \phi)(t)\|\leqslant K_2(r)\|\phi\|_2 e^{-\alpha_2(r)(t-t_0)},$$

其中
$$K_2(r)=\left[\left(K+\frac{C_1r}{1+r}\right)\Big/\nu\right]^{1/2},\quad \alpha_2(r)=\frac{C_1}{2[(1+r)K+rC_1]}, \tag{22}$$

ν为矩阵C的最小特征值，C_1为H的最小特征值.

证　设矩阵C的最大和最小的特征值分别为μ和ν，矩阵E的最大特征值为m. 置$K=\max(\mu,\ m)$. 则
$$\nu|\phi(0)|^2\leqslant V(\phi)\leqslant K\|\phi\|_2^2.$$

设矩阵H的最小特征值为C_1，则$\dot V_{(1)}(\phi)\leqslant-C_1|\phi(0)|^2$. 由定理3得到
$$\|x(t_0,\ \phi)(t)\|\leqslant K_2(r)\|\phi\|_2{}^{-\alpha_2(r)(t-t_0)},$$

其中$K_2(r)$，$\alpha_2(r)$由(22)给出.

3. Hale 的逆问题

为了回答 Hale 的逆问题，我们考察下面的例子

$$\dot{x}(t) = -x(t) - x(t-r), \quad (r \geqslant 0) \tag{23}$$

即取 $A=B=-I$，其中 I 为 $n\times n$ 的单位阵. 首先

$$\Delta(\lambda,\ 0) = |A+B-\lambda I| = (-1)^n(\lambda+2)^n = 0$$

的根 $\lambda=-2$（n 重根）皆具有负实部；并且

$$F(y,\ \omega) = |A+Be^{i\omega}-(iy)I| = (-1)^n(1+e^{i\omega}+iy)^n$$
$$= (-1)^n[(1+\cos\omega)+i(y+\sin\omega)]^n \neq 0.$$

对任何非零的实 y 及任何实 ω 都成立. 因此由[2]得到，方程(23)为无条件稳定.

下面证明对任何矩阵 $E>0$ 及对称矩阵 $C>0$，矩阵 H 非正定.

令
$$Q=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \quad Q \text{ 为非奇异阵,}$$

但
$$Q^T H Q=\begin{bmatrix} 0 & C-E \\ C-E & E \end{bmatrix} \quad \text{不是正定阵,}$$

因此 H 非正定阵.

此例说明，如果系统(1)为无条件稳定，不一定存在矩阵 $C>0$，$E>0$ 使得矩阵 $H>0$，即 Hale 的逆问题是否定的.

参 考 文 献

[1] Hale, J. K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, (1977), 106—108.

[2] 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社，1963.

[3] Hayes, N. D., Roots of the trancendential equation associated with a certain difference-differential equation, *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 226—232.

[4] Hale, J. K., Asymptotic behavior of Solution of differential-difference equations, in "Proceedings of the international Symposium for nonlinear oscillations", **2** (1963).

[5] Driver, R. D., Ordinary and Delay Differential Equations, Springer-Verlag New York., Heidelberg, Berlin, (1977).

A PROBLEM ON THE STABILITY OF RETARDED SYSTEMS

HUANG ZHENXUN LIN XIAOBIAO
(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper, the following retarded system has been studied

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-r), \quad r>0, \tag{1}$$

where $x(t)$ is an n-vector valued function; A and B are $n\times n$ constant matrices, and all the eigenvalues of A are supposed to have negative real parts. The asymptotical stability of equation (1) has been discussed by Hale[1] utilizing the following Liapunov functional

$$V(\phi)=\phi^T(0)C\phi(0)+\int_{-r}^{0}\phi^T(\theta)E\phi(\theta)d\theta,$$

where $E>0$ and the symmetric matrix $C>0$ is chosen, such that $A^TC+CA=-D<0$. In this discussion, he remarked that if matrix

$$H=\begin{bmatrix} D-E & -CB \\ -(CB)^T & E \end{bmatrix}>0,$$

the rate of decay of the solution of equation (1) to zero would be independent of the delay r, that is, would follow the exponontial relation as indicated below

$$\|x(t; t_0, \phi)\|\leqslant K(r)e^{-\alpha(t-t_0)}\|\phi\|,$$

where $\alpha(\alpha>0)$ is indepndent of r.

We show that this conclusion is not true, and a new relation between Liapunov functional and it's solution (exponential estimation) has been developed for the general retarded functional differential equation

$$\dot{X}(t)=f(t, X_t). \tag{2}$$

If there is a functional $V(t, \phi): R^+\times C_H\to R$ such that

(i) $\nu|\phi(0)|^\eta\leqslant V(t, \phi)\leqslant K\|\phi\|_\eta^\eta$, $(\nu, K>0, \eta>0)$;

(ii) $\dot{V}(t, \phi)\leqslant -C_1|\phi(0)|^\eta$, $(C_1>0)$.

then the solution of equation (2) $x(t_0, \phi)(t)$ satisfies

$$\|x(t_0, \phi)(t)\|\leqslant K_1(r)\|\phi\|_\eta e^{-\alpha_1(r)(t-t_0)},$$

where α_1 depends on r.

The following inverse problem has also been studied: In case the solution $x=0$ of equation (1) is asymptotically stable for every value of $r>0$, would there exist the matrices $C>0$ and $E>0$ such that the corresponding matrix $H>0$? Counter example is given for this problem.