数 学 年 刊
3 (1) 1982

线段自映射非游荡集有限的一个充要条件

周 作 领
(暨南大学)

§1. 前 言

我们考虑线段到自身的连续映射. 对于这样的映射所产生的动力系统性质, 最近有若干作者进行过研究, 比如[1—5]以及其它. 这些研究受近年微分动力系统理论的影响, 例如讨论非游荡集结构与周期点集之间的关系, 拓扑熵的估计等.

记 $I=[0, 1]$. 用 $C^0(I, I)$ 表示 I 到自身全部连续映射的集合, 设 $f\in C^0(I, I)$. f 的不动点集, 周期点集和非游荡集分别用 $F(f)$, $P(f)$ 和 $\Omega(f)$ 表示(定义见§2). Block 证明了下述结果, 即

定理 A[1] 若 $\Omega(f)$ 有限, 则 $\Omega(f)=P(f)$.

定理 B[2] 若 $P(f)$ 有限且 $P(f)=F(f)$, 则 $\Omega(f)$ 有限且 $\Omega(f)=P(f)$.

一个自然而容易想到的问题是定理 A 的反问题: 当 $P(f)$ 有限时, $\Omega(f)=P(f)$ 是否成立? Block 曾在 [2, p. 358] 中以待解决的方式提出这个问题, 但只回答了它的特款, 即定理 B. 本文的目的是证明下述

主要定理 设 $f\in C^0(I, I)$, 则 $\Omega(f)$ 有限的一个充要条件是 $P(f)$ 有限.

这样, 结合定理 A, 我们就完全回答了上述问题.

作为主要定理的直接推论是, 设 $f\in C^0(I, I)$, 则当 $P(f)$ 有限时, f 的拓扑熵 $\mathrm{ent}(f)=0$. 在[2]中, 这个结果是利用定理 B 和拓扑熵公式的一个基本性质而得到的.

我们证明主要定理的基本工具是借自微分动力系统理论的非稳定流形的概念. 因此, 本文在§2 回顾若干名词和基本定义之后, 在§3 详细讨论非稳定流形的有关性质. 主要定理的证明在§4 给出.

§2. 若干名词和基本定义

为方便, 本节扼要回顾若干名词和基本定义, 详见[1].

设 $f\in C^0(I, I)$. f^0 表恒同映射. $f^1=f$, $f^2=f\cdot f$, 对任意正整数 n, 归纳为定义 $f^n=f\cdot f^{n-1}$. $x\in I$, 记 $\mathrm{orb}(x)=\{f^n(x)\,|\,\forall n\geqslant 0\}$, 称作 x 的轨道. 当 $\mathrm{orb}(x)$ 有限时, x 叫做 f 的准周期点 (eventually periodic point). 设 x 为 f 的准周期点, 当存在 $n>0$, 使

本文 1980 年 7 月 19 日收到.

$f^n(x)=x$ 时，称 x 为 f 的周期点．使 $f^n(x)=x$ 的最小的正整数 n，叫作 x 的周期．周期为 1 的周期点叫不动点．f 的全部不动点的集合，全部周期点的集合分别用 $F(f)$，$P(f)$ 表示．

$x\in I$ 叫作 f 的游荡点，如果存在 x 的邻域 $V(x)\subset I$，使 $f^m(V(x))\cap V(x)=\phi, \forall m>0$. I 中不是 f 的游荡点的点叫作 f 的非游荡点．设 $x\in I$ 是 f 的一个非游荡点，则对 x 的任意邻域 $V(x)$ 和任意正整数 M，易看出存在 $m>M$，使 $f^m(V(x))\cap V(x)\neq\phi$．$f$ 的全部非游荡点的集合用 $\Omega(f)$ 表示．$\Omega(f)$ 是 I 的闭子集且对 f 不变，即 $f(\Omega(f))\subset\Omega(f)$．

若 $\Omega(f)$ 有限，显然每一点 $\in\Omega(f)$ 都是准周期点．本文前言中所述定理 A 的证明的全部较困难之处在于证明，在 $\Omega(f)$ 有限情况下，每一准周期点 $\in\Omega(f)$ 都是周期点．

设 $p\in I$ 为 f 的周期点．定义 p 的非稳定流形 $W^u(p, f)$ 如下．$x\in W^u(p, f)$，如果对 p 的任意邻域 $V(p)$，存在 $m>0$，使 $x\in f^m(V(p))$．

本文引进两个新的记号．设 $p\in I$ 为 f 的不动点．记 $W^u_+(p, f)=W^u(p, f)\cap[p, 1]$，$W^u_-(p, f)=W^u(p, f)\cap[0, p]$（规定 $[a, a]=\{a\}$）．

本文需要少许拓扑共轭的概念．设 $K\subset I$ 为闭线段．我们说映射 $f: I\to I$ 和映射 $g: K\to K$ 拓扑共轭，如果存在在上同胚映射 $h: I\to K$，使 $hf=gh$．这时 h 称为相关同胚映射．

易从定义直接证明，若 f 和 g 拓扑共轭，则它们的周期点集的基数和非游荡集的基数分别相同．事实上易于证明，相关同胚映射 h 分别把 f 的周期点集和非游荡集同胚地映到 g 的周期点集和非游荡集上．

设 $g: K\to K$，则存在 $f: I\to I$ 与 g 拓扑共轭．这只要任取在上同胚映射 $h: I\to K$（这样的同胚 h 存在），令 $f=h^{-1}gh$ 即可．

为了行文简洁，本文作如下约定．$x\in I$，$V(x)$ 及 $U(x)$ 恒表 x 的连通邻域．“任取 x 的邻域 $V(x)(U(x))$”简述为“任取 $V(x)(U(x))$”．

§3．关于非稳定流形的几个引理

设 $f\in C^0(I, I)$．如果 $P(f)$ 有限，则据 [1，定理 B]，f 的周期点的周期都具有 2^l 的形式，$l\geqslant 0$．进一步，设 f 的周期点的最大周期为 2^n，易见 $P(f^{2^n})=P(f)$，且 f^{2^n} 的周期点都是不动点．

引理 1　设 $f\in C^0(I, I)$．若 $p\in I$ 为 f 的不动点，则 $W^u(p, f)=W^u(p, f^2)$．

证　$W^u(p, f)\supset W^u(p, f^2)$ 明显．现证 $W^u(p, f)\subset W^u(p, f^2)$．设不然，存在 $x\in W^u(p, f)$，$x\overline{\in} W^u(p, f^2)$．由定义，存在 $V(p)$，使 $x\in\bigcup\limits_{m<0}f^{2m+1}(V(p))$，$x\overline{\in}\bigcup\limits_{m>0}f^{2m}\times(V(p))$．由于 $f(p)=p$，可取 $U(p)$，使 $U(p)\subset V(p)$ 和 $f(U(p))\subset V(p)$．显然亦有 $x\in\bigcup\limits_{m>0}f^{2m+1}(U(p))$，$x\overline{\in}\bigcup\limits_{m>0}f^{2m}(U(p))$．但 $x\in\bigcup\limits_{m>0}f^{2m+1}(U(p))=\bigcup\limits_{m>0}f^{2m}\cdot f(U(p))\subset\bigcup\limits_{m>0}f^{2m}(V(p))$，与上面矛盾．　　证毕．

推论　设 $f\in C^0(I, I)$．若 p 是 f 的周期点，周期为 2^l，又 $n\geqslant l$，则

$$W^u(p, f^{2^l})=W^u(p, f^{2^n}).$$

证　易见 p 为 f^{2^l} 的不动点．反复应用引理 1 即得推论的结论．

引理 2　设 $f\in C^0(I,I)$．若 $p<q$ 为 f 的两个相邻不动点．则区间

$$(p,q)\subset W^u(p,f),\quad (p,q)\subset W^u(q,f)$$

至少一个成立．

这是 [3,引理 4] 的直接结果．

引理 3　设 $f\in C^0(I,I)$ 和 $P(f)$ 有限．若 $p<q$ 是 f 的两个相邻周期点，则 $(p,q)\subset W^u(p,f)$，$(p,q)\subset W^u(q,f)$ 至少一个成立．

证　设 p，q 的周期分别为 2^l，2^k，f 的周期点的最大周期为 2^n．据 [1，引理 2]，$W^u(p,f^{2^l})\subset W^u(p,f)$，$W^u(q,f^{2^k})\subset W^u(q,f)$．易见 p，q 是 f^{2^n} 的不动点而且相邻．由引理 2，$(p,q)\subset W^u(p,f^{2^n})$，$(p,q)\subset W^u(q,f^{2^n})$ 至少一个成立．再由引理 1 的推论即得所需证明．

引理 4　设 $f\in C^0(I,I)$．若 $P(f)$ 有限，则

$$\bigcup_{p\in P(f)} W^u(p,f)=\bigcup_{p\in P(f)} W^u(p,f^{2^n}),$$

且这个集合是 I 的连通闭子集，并对 f 不变．其中 2^n 是 f 的周期点的最大周期．

证　因 $P(f)=P(f^{2^n})$，等式两集合相等易由引理 1 及其推论和[1,引理 2]看出．又据[1,引理 1]，每一个 $W^u(p,f^{2^n})$ 都是连通的，等式右端集合的连通性由引理 2 给出．再者，因为是有限并，故整个集合的边界点必是某一个 $W^u(p,f)$ 的边界点，据[1，引理 4]可得闭集性．最后，据[1,引理 3]，

$$f\Big(\bigcup_{p\in P(f)} W^u(p,f)\Big)=\bigcup_{p\in P(f)} fW^u(p,f)=\bigcup_{p\in P(f)} W^u(p,f).$$

证毕．

引理 5　设 $f\in C^0(I,I)$ 和 $P(f)$ 有限．若 p 是 f 的不动点，则

(1) $fW_+^u(p,f)\subset W_+^u(p,f)$ 或 $fW_+^u(p,f)\subset W_-^u(p,f)$；

(2) $fW_-^u(p,f)\subset W_-^u(p,f)$ 或 $fW_-^u(p,f)\subset W_+^u(p,f)$．

证　(1) 当 $W_+^u(p,f)=\{p\}$ 时，显然．设 $W_+^u(p,f)\neq\{p\}$．据 [1，定理 7]，易看出 $f(x)>p$，$\forall x\in W_+^u(p,f)-\{p\}$ 或 $f(x)<p$，$\forall x\in W_+^u(p,f)-\{p\}$．前者蕴含第一式，后者蕴含第二式．

(2) 证明相仿．

引理 6　设 $f\in C^0(I,I)$．若边界点 $0\in I$ 是 f 的不动点，p 是与 0 相邻的周期点(不存在时，令 $p=1$)，且 $W^u(0,f)\neq\{0\}$，则 $f(x)>x$，$\forall x\in(0,p)$．

证　因为 $(0,p)$ 上不存在 f 的周期点，易于证明，$f(x)>x$，$\forall x\in(0,p)$ 或 $f(x)<x$，$\forall x\in(0,p)$．如果是后者，易从定义直接证明 $W^u(0,f)=\{0\}$，与假设矛盾．因此必有 $f(x)>x$，$\forall x\in(0,p)$．　　证毕．

引理 7　设 $f\in C^0(I,I)$．若边界点 $1\in I$ 是 f 的不动点，p 是与 1 相邻的周期点(不存在时，令 $p=0$)，且 $W^u(1,f)\neq\{1\}$，则 $f(x)<x$，$\forall x\in(p,1)$．

证明方法与引理 6 相仿．

引理 8　设 $f\in C^0(I,I)$．若 p 是 f 的不动点，$x\in W^u(p,f)$，则对任意 $V(p)$，存在 $m>0$，使 $x\in f^m(V(p)\cap W^u(p,f))$．

这是[3,引理6]的直接结果.

引理9 设$f\in C^0(I,I)$和$P(f)$有限. 若$\{p_1<p_2<\cdots<p_{2^l}\}$是$f$的一个周期轨道,周期为$2^l$, $0<l\leqslant n$,则

(1) $f(W^u(p_i,f^{2^l}))=W^u(f(p_i),f^{2^l})$, $i=1,2,\cdots,2^l$;

(2) $\{p_1,p_2\},\cdots,\{p_{2i-1},p_{2i}\},\cdots,\{p_{2^l-1},p_{2^l}\}$都是$f^{2^{l-1}}$的周期为2的周期轨道;

(3) $W^u(p_i,f^{2^l})\cap W^u(p_j,f^{2^l})\neq\phi\Rightarrow p_i,p_j$属于$f^{2^{l-1}}$的同一个周期轨道,即(2)中之一个.

证 (1) 先证明$f(W^u(p_i,f^{2^l}))\subset W^u(f(p)_i),f^{2^l})$. 设$x\in f(W^u(p_i,f^{2^l}))$,即存在$y\in W^u(p_i,f^{2^l})$,使$f(y)=x$. 对任意的$V(f(p_i))$,取$V(p_i)$,使$f(V(p_i))\subset V(f(p_i))$. 因$y\in W^u(p_i,f^{2^l})$,故存在$m>0$,使$y\in f^{2^l\cdot m}(V(p_i))$. 由此,$x=f(y)\in f\cdot f^{2^l\cdot m}(V(p_i))=f^{2^l\cdot m}f(V(p_i))\subset f^{2^l\cdot m}(V)f(p_i)))$. 由定义,$x\in W^u(f(p_i),f^{2^l})$.

再证$fW^u(p_i,f^{2^l})\supset W^u(f(p_i),f^{2^l})$. 易见$f^{2^l-1}(f(p_i))=p_i$,故对任意的$V(p_i)$,可取$V(f(p_i))$,使$f^{2^l-1}(V(f(p_i)))\subset V(p_i)$. 设$x\in W^u(f(p_i),f^{2^l})$. 由引理8. 存在$m>0$,使$x\in f^{2^l\cdot m}(V(f(p_i))\cap W^u(f(p_i),f^{2^l}))$. 于是由本引理已证明部份,易证$f^{2^l-1}(V(f(p_i))\cap W^u(f(p_i),f^{2^l}))\subset W^u(p_i,f^{2^l})$. 由此,$x\in f^{2^l\cdot m}(V(f(p_i))\cap W^u(f(p_i),f^{2^l}))=f\cdot f^{2^l(m-1)}\cdot f^{2^l-1}(V(f(p_i))\cap W^u(f(p_i),f^{2^l}))\subset f\cdot f^{2^l(m-1)}W^u(p_i,f^{2^l})=f(W^u(p_i,f^{2^l}))$. 这里最后一步用到$f^{2^l}W^u(p_i,f^{2^l})=W^u(p_i,f^{2^l})$,见[1,引理3]. 证毕.

(2) 因为f的所有周期点的周期都是2的方幂($1=2^0$也是2的方幂),故据[4,定理A],f的所有周期轨道(周期$\geqslant 2^2$)都是单纯的(simple,定义见[4]),因此

$$f(\{p_1,\cdots,p_{2^{l-1}}\})=\{p_{2^{l-1}+1},\cdots,p_{2^l}\}.$$

易见

$$f^2(\{p_1,\cdots,p_{2^{l-1}}\})=\{p_1,\cdots,p_{2^{l-1}}\},$$

$$f^2(\{p_{2^{l-1}+1},\cdots,p_{2^l}\})=\{p_{2^{l-1}+1},\cdots,p_{2^l}\}.$$

因此,$\{p_1,\cdots,p_{2^{l-1}}\}$和$\{p_{2^{l-1}+1},\cdots,p_{2^l}\}$是$f^2$的两个周期轨道,周期都是$2^{l-1}$.

当$2^{l-1}\geqslant 4$时,$\{p_1,\cdots,p_{2^{l-1}}\}$和$\{p_{2^{l-1}+1},\cdots,p_{2^l}\}$对$f^2$重复上述过程,就得

$$\{p_1,\cdots,p_{2^{l-2}}\},\ \{p_{2^{l-2}+1},\cdots,p_{2^{l-1}}\},\ \{p_{2^{l-1}+1},\cdots,p_{2^{l-1}+2^{l-2}}\}$$

和

$$\{p_{2^{l-1}+2^{l-2}+1},\cdots,p_{2^l}\}$$

都是f^4的周期轨道,周期都是$2^{l-2}\geqslant 2$.

上述过程进行$l-1$次,即得$\{p_1,p_2\},\cdots,\{p_{2i-1},p_{2i}\},\cdots,\{p_{2^l-1},p_{2^l}\}$都是$f^{2^{l-1}}$的周期轨道,周期都是2.

(3) 因为$p_k\in W^u(p_k,f^{2^l})$和$W^u(p_k,f^{2^l})$是连通的,若$p_i<p_j$,且$W^u(p_i,f^{2^l})\cap W^u(p_j,f^{2^l})\neq\phi$,则$(p_i,p_j)\subset W^u(p_i,f^{2^l})\cup W^u(p_j,f^{2^l})$. 如果$(p_i,p_j)$中包含周期轨道中另外一点$p_k$,则$p_k\in W^u(p_i,f^{2^l})\cup W^u(p_j,f^{2^l})$. 这与[1,定理8]是矛盾的. 所以$p_i,p_j$必是周期轨道中相邻的两个点.

今设$W^u(p_i,f^{2^l})\cap W^u(p_{i+1},f^{2^l})\neq\phi$. 用$f,f^2,\cdots,f^{2^l-1}$作用左端的非空集合,据本引理的(1),就得$W^u(f(p_i),f^{2^l})\cap W^u(f(p_{i+1}),f^{2^l})\neq\phi$, $\cdots$, $W^u(f^{2^l-1}(p_i),f^{2^l})\cap W^u(f^{2^l-1}(p_{i+1}),f^{2^l})\neq\phi$. 如果$p_i$, p_{i+1}不是$f^{2^{l-1}}$的同一周期轨道中两点,则$f^{2^l-1}(p_i)=p_{i-1}$, $f^{2^l-1}(p_{i+1})=p_{i+2}$,即$f^{2^l-1}(p_i)$, $f^{2^l-1}(p_{i+1})$不是周期轨道中相邻两点. 这就导致矛盾. 证毕.

推论　同引理 9 假设，则对 $m>0$, $f^m(W^u(p_i, f^{2^i}))\cap W^u(p_i, f^{2^i})\neq\phi\Rightarrow m$ 是 2^{i-1} 的倍数.

§4. 主要定理的证明

设 $f\in C^0(I, I)$. 记

$$W=\bigcup_{p\in P(f)}W^u(p, f).$$

当 $P(f)$ 有限时，据引理 4，W 为 I 的连通闭子集，且 $f(W)=W$. 此外，$P(f)$ 不空和 $P(f)\subset W$ 都显然.

我们用下述方式证明主要定理. 首先证明：在 $I-W$ 上，f 的非游荡点个数有限(定理 1)；在 W 上，f 的非游荡点也是 f^2 的非游荡点(定理 2，定理 3). 然后证明：$\Omega(f^2)$ 有限蕴含 $\Omega(f)$ 有限(定理 4). 最后，据定理 B，由 $\Omega(f^{2^n})$ 的有限性推出 $\Omega(f)$ 的有限性. 为完成上述诸定理的证明，我们还需要证明几个引理.

引理 10　设 $f\in C^0(I, I)$ 和 $P(f)$ 有限. 若 x 为准周期点，则 $x\in\Omega(f)\Rightarrow x\in P(f)$.

这是[1, 定理 A]的证明过程中实际上(虽未曾明确叙述)证明了的结果(事实上，[1]中引理 6，定理 7 和定理 8 都是假设 $P(f)$ 有限，而定理 9 假设 $\Omega(f)$ 有限只是起了保证非游荡点一定是准周期点的作用. 所以 [1] 中定理 A 的证明实际上包含了引理 10 的结论).

引理 11　设 $f\in C^0(I, I)$ 和 $P(f)$ 有限. 若 $K\subset I$ 为连通闭线段且对 f 不变，$x\in I$，$x\overline{\in} K$，对某个 $k>0$，$f^k(x)\in K$，则 $x\in\Omega(f)\Rightarrow x\in P(f)$.

证　若 $f^k(x)$ 是 K 的内点，则存在 $V(x)$，使 $V(x)\cap K=\phi$，$f^k(V(x))\subset K$. 由 K 对 f 不变，我们有 $f^{k+m}(V(x))\cap V(x)\subset K\cap V(x)=\phi$, $\forall m>0$. 由定义，$x\overline{\in}\Omega(f)$.

若 $f^k(x)$, $f^{k+1}(x)$, $f^{k+2}(x)$ 中有一点是 K 的内点，同样可以证明 $x\overline{\in}\Omega(f)$. 当这三点都是 K 的边界点时，x 是准周期点. 据引理 10，$x\in\Omega(f)\Rightarrow x\in P(f)$.　　证毕.

引理 12　设 $f\in C^0(I, I)$ 和 $P(f)$ 有限. 若边界点 $0\in I$ 不是周期点，p 是最小的周期点，则 $f(x)>x$, $\forall x\in[0, p)$.

证　因 $[0, p)$ 上不存在 f 的周期点，易证明 $f(x)>x$, $\forall x\in[0, p)$ 或 $f(x)<x$, $\forall x\in[0, p)$. 但后面一种情形蕴含 $f(0)=0$，和假设矛盾.　　证毕.

引理 13　设 $f\in C^0(I, I)$ 和 $P(f)$ 有限. 又设 K_1, K_2 都是 I 的连通闭子集，$f(K_1)\subset K_2$, $f(K_2)\subset K_1$，则 $x\in\Omega(f)\cap(K_1\cup K_2-K_1\cap K_2)\Rightarrow x\in\Omega(f^2)$.

证　易见 $f(K_1\cap K_2)\subset K_1\cap K_2$($K_1\cap K_2$ 可以是空集). 又由假设显然有

$$f^{2m+1}(K_1-K_1\cap K_2)\subset K_2,\ \forall m>0.$$

于是有 $f^{2m+1}(K_1-K_1\cap K_2)\cap(K_1-K_1\cap K_2)\subset K_2\cap(K_1-K_1\cap K_2)=\phi$, $\forall m>0$. 因此，若 $f^m(K_1-K_1\cap K_2)\cap(K_1-K_1\cap K_2)\neq\phi$，则 m 必为偶数.

设 $x\in\Omega(f)\cap(K_1-K_1\cap K_2)$. 当 $x\in P(f)$ 时，结论显然成立. 设 $x\overline{\in}P(f)$. 据假设和引理 10，引理 11，易见 x, $f^2(x)$, $f^4(x)$ 都属于 $K_1-K_1\cap K_2$，且其中至少一点是 $K_1-K_1\cap K_2$ 的内点. 不妨设 $f^4(x)$ 是 $K_1-K_1\cap K_2$ 的内点. 显然存在 $V(x)$，使 $f^4(V(x))\subset K_1-K_1\cap K_2$. 于是对所有使 $f^m(V(x))\cap V(x)\neq\phi$ 的 $m>0$，亦有

$f^4(f^m(V(x))\cap V(x))\subset f^m f^4(V(x))\cap f^4(V(x))\subset f^m(K_1-K_1\cap K_2)\cap(K_1-K_1\cap K_2)\neq\phi$. 据前，这样的 m 必为偶数. 由定义，$x\in\Omega(f^2)$.

同理可证 $x\in\Omega(f)\cap(K_2-K_1\cap K_2)\Rightarrow x\in\Omega(f^2)$. 证毕.

引理 14 设 $f\in C^0(I, I)$ 和 $P(f)$ 有限. 若边界点 $0\in I$ 是 f 的不动点，p 是与 0 相邻的周期点(不存在时，令 $p=1$)，且 $W^u(0, f)\neq\{0\}$，则存在 $a\in W^u(0, f)$，$0<a\leqslant p$，使 $\overline{W^u(0, f)}\cap[a, 1]$ 对 f 不变，而 $(0, a)$ 上不存在 f 的非游荡点.

证 由引理 6，有 $f(x)>x$，$\forall x\in(0, p)$. 记 f 在 $[0, p]$ 上的最大值为 $\overline{M}$. 显然 $\overline{M}\geqslant p$.

当 $\overline{M}=p$ 时，显然 p 是 f 的不动点，$[0, p]$ 对 f 不变，且 $\overline{W^u(0, f)}=[0, p]$. 易见，对任意 $a\in[0, p]$，$[a, p]=\overline{W^u(0, f)}\cap[a, 1]$ 对 f 不变，且对任意 $x\in(0, a)$，存在 $k>0$，使 $f^k(x)\geqslant a$. 据引理 11，$(0, a)$ 上不存在 f 的非游荡点.

设 $\overline{M}>p$. 易从定义证明 $[0, \overline{M}]\subset\overline{W^u(0, f)}$. 因此 $\overline{W^u(0, f)}\cap[p, 1]$ 不空. 记 f 在 $\overline{W^u(0, f)}\cap[p, 1]$ 上的最小值为 $\underline{M}$，因 $\overline{W^u(0, f)}$ 对 f 不变([1, 引理 3])，且 $(0, p)$ 不存在 f 的周期点，故 p 的周期轨道包含在 $\overline{W^u(0, f)}\cap[p, 1]$ 内. 由此易见 $\underline{M}\leqslant p$. 再由 $f(x)>x$，$\forall x\in(0, p)$，可以看出 $\overline{W^u(0, f)}\cap[\underline{M}, 1]$ 对 f 不变.

我们断言，$\underline{M}<0$. 如不然，$\underline{M}=0$. 存在 $x\in\overline{W^u(0, f)}\cap[p, 1]$，使 $f(x)=0$. 据 [1, 定理 7]，$x\overline{\in}W^u(0, f)$. 但 $x\in\overline{W^u(0, f)}$. 这蕴含 x 是周期点([1, 引理 4]). 因 0 是不动点，x 不可能是周期点. 断言得证.

取 $a=\underline{M}$. 因 $f(x)>x$，$\forall x\in(0, a)$，由引理 11 易于证明 $(0, a)$ 上无 f 的非游荡点.

证毕.

引理 15 设 $f\in C^0(I, I)$ 和 $P(f)$ 有限. 若边界点 $1\in I$ 是 f 的不动点，p 是与 1 相邻的周期点(不存在时，令 $p=0$)，且 $W^u(1, f)\neq\{1\}$ 时，则存在 $a\in W^u(1, f)$，$1>a\geqslant p$，使 $\overline{W^u(1, f)}\cap[0, a]$ 对 f 不变，而 $(a, 1)$ 上不存在 f 的非游荡点.

证明方法与引理 14 相仿.

引理 16 设 $f\in C^0(I, I)$ 和 $P(f)$ 有限. 若 $\{0, 1\}$ 是 f 的周期为 2 的周期轨道，且 $f((0, 1))=(0, 1)$，则 $\overline{W^u(0, f^2)}\subset[0, 1)$，$\overline{W^u(1, f^2)}\subset(0, 1]$ 至少一个成立.

证 记 p_1, p_2 分别是与 0, 1 相邻的周期点. 因为 f 在 I 上有不动点，故 p_1, p_2 都不同于 0, 1 中任何一个. 不妨设 $\overline{W^u(0, f^2)}\neq\{0\}$，$\overline{W^u(1, f^2)}\neq\{1\}$ (否则结论显然成立). 因 $f^2(0)=0$，据引理 6，有 $f^2(x)>x$，$\forall x\in(0, p_1)$. 同样也有 $f^2(x)<x$，$\forall x\in(p_2, 1)$.

记 f^2 在 $[0, p_2]$ 上的最大值为 M. 由 $f^2((0, 1))=f((0, 1))=(0, 1)$，易见 $M<1$. 又由于 p_2 是周期点，不难看出 $M\geqslant p_2$. 易于证明 $[0, M]$ 对 f^2 不变. 显然有 $\overline{W^u(0, f^2)}\subset[0, M]\subset[0, 1)$. 证毕.

定理 1 设 $f\in C^0(I, I)$ 和 $P(f)$ 有限. 则 $(I-W)\cap\Omega(f)$ 为有限集合.

证 因 W 为 I 的连通闭子集，可设 $W=[a, b]$. 当 $a=0$, $b=1$ 时 $I-W=\phi$，结论成立. 设 $a>0$. 因为 $[0, a)$ 上不存在 f 的周期点，据引理 12，$f(x)>x$，$\forall x\in[0, a)$. 分两种情形.

i) 当 $b=1$ 时，$I-W=[0, a)$ 上无非游荡点.

事实上，若 $q\in[0, a)$ 且存在 $k>0$，使 $f^k(q)\geqslant a$，即 $f^k(q)\in W$，则因 W 对 f 不变，据

引理 11, $q\overline{\in}\Omega(f)$.

若 $q\in[0,a)$ 且 $f^m(q)\in[0,a)$, $\forall m>0$, 据引理 12, 这时有 $q<f(q)<\cdots<f^m(q)<\cdots$. 对满足条件 $q\overline{\in}\overline{V(f(q))}$ 的 $V(f(q))$, 取 $V(q)$, 使 $V(q)\cap f(V(q))=\phi$ 且 $f(V(q))\subset V(f(q))$. 仍据引理 12, 易证对所有 $m>0$, $f^m(V(q))\cap V(q)=\phi$. 由定义, $q\overline{\in}\Omega(f)$.

$[0,a)$ 上点只有这两种可能.

ii) 当 $b<1$ 时, $[0,a)$ 上至多存在一个非游荡点.

我们先来证明两个断语.

断语 A　设 $x\in[0,a)$ 为非游荡点, 则当 $q\in(x,a)$ 时, $f^m(q)\geqslant x$, $\forall m>0$.

设不然, 即存在 $q\in(x,a)$ 和 $k>0$, 使 $f^k(q)<x$. 取 $V(x)\subset(f^k(q),q)$. 据[1, 定理 C], $V(x)$ 中包含准周期点. 故存在充分大的 $m>0$, 使 $f^m(V(x))\cap V(x)\neq\phi$ 且 $f^m(V(x))$ 内包含周期点 (即 f^m 使 $V(x)$ 中某一个准周期点进入周期轨道). 但 $P(f)\subset W$, 故由 $f^m(V(x))$ 的连通性(按 § 2 的约定, $V(x)$ 是连通的), 易见有 $f^m(\overline{V(x)})\supset[q,a]$. 这结合 $f^k(a)\in f^k(W)\subset W$ 就给出 $f^{m+k}(\overline{V(x)})\supset f^k([q,a])\supset[f^k(q),f^k(a)]\supset[f^k(q),a]\supset\overline{V(x)}$. 据[1, 引理 5], $\overline{V(x)}$ 上存在 f 的周期点, 与假设矛盾. 断语 A 得证.

由断语 A 易证, 对任意非游荡点 $x\in[0,a)$, $f^m(x)>x$, $\forall m>0$.

断语 B　假设 $z<y$ 是 $[0,a)$ 上两个非游荡点, 则当 $q\in[z,a)$ 时, $f^m(q)>z$, $\forall m>0$.

设不然, 即存在 $q\in[z,a]$ 和 $k>0$, 使 $f^k(q)\leqslant z$. 由断语 A 易见必有 $q<y$, 因为当 $q\geqslant y$ 时, $f^k(q)\geqslant y>z$.

但若 $q<y$, 则由 $f^k(y)>y$ 和 $f^k(q)<q$, 易见有 $f^k([q,y])\supset[f^k(q),f^k(y)]\supset[q,y]$, 这又表明在 $[q,y]$ 上存在 f 的周期点, 与题设矛盾. 断语 B 得证.

下面用反证法证明 ii). 设 $z<y$ 是 $[0,a)$ 上任意两个非游荡点.

现记 f 在 $[z,a]$ 上的最大值为 $\overline{M}$, 并记 f 在 $[z,\overline{M}]$ 上的最小值为 $\underline{M}$. 由 $z\in\Omega(f)$ 和 $f(W)\subset W$, 易于证明 $\overline{M}>b$ 和 $\underline{M}\leqslant a$. 下面证明 $z<\underline{M}$. 因 $\underline{M}>b$, 显然有 $[b,\overline{M}]\subset f([z,a])$, 当 $\underline{M}=a$ 时, $z<\underline{M}$ 是显然的. 设 $\underline{M}<a$. 这时 $\underline{M}$ 必为 $[z,a]$ 中点所达到(即存在 $w\in[z,a]$, 使 $f^2(w)=\underline{M}$), 由断语 B, 亦必有 $z<\underline{M}$. 因此 $z\overline{\in}[\underline{M},\overline{M}]$.

由 $z\overline{\in}[\underline{M},\overline{M}]$ 和 $f(x)>x$, $\forall x\in[0,a)$ 可以看出, $[\underline{M},\overline{M}]$ 对 f 不变. 因 $f(z)\in[\underline{M},\overline{M}]$, 由引理 11, $z\overline{\in}\Omega(f)$. 这与假设 $z<y$ 是 $[0,a)$ 上任意两个非游荡点相矛盾. 这就证明了 ii).

当 $b<1$ 时, 用同样方法可以证明, 在 $(b,1]$ 上至多存在 f 的一个非游荡点.

证毕.

定理 2　设 $f\in C^0(I,I)$ 和 $P(f)$ 有限, 若 $p\in P(f)$, 周期为 2^l, $l>1$. 则

$$x\in\Omega(f)\cap W^u(p,f)\Rightarrow x\in\Omega(f^{2^{l-1}}).$$

证　设 $x\in\Omega(f)\cap W^u(p,f)$. 当 $x\in P(f)$ 时显然. 设 $x\overline{\in}P(f)$. 由[1, 引理 2], 不妨设 $x\in W^u(p,f^{2^l})$.

先设 x 是 $W^u(p,f^{2^l})$ 的内点. 对任意 $V(x)\subset W^u(p,f^{2^l})$, 存在 $m>0$, 使 $f^m(V(x))\cap V(x)\neq\phi$. 据引理 9 的推论, 这样的 m 必是 2^{l-1} 的倍数, 由定义, $x\in\Omega(f^{2^{l-1}})$.

再设 x 是 $W^u(p,f^{2^l})$ 的边界点. 由引理 9, 易见 $f^{2^l}(x)$, $f^{2^{l+1}}(x)$ 都属于 $W^u(p,f^{2^l})$, 且据引理 10, 其中至少一点是内点. 因此存在 $V(x)$, 使 $f^{2^{l+1}}(V(x))\subset W^u(p,f^{2^l})$. 于是

据引理 9 的推论，易看出对这样的 $V(x)$，以及使 $f^m(V))\cap V(x)\neq\phi$ 的 m，当 $m>0$ 时必是 2^{l-1} 的倍数，因为这时也就有 $f^{2^{l-1}}f^m(V(x))\cap f^{2^{l-1}}(V(x))\neq\phi$. 由定义，$x\in\Omega(f^{2^{l-1}})$.

证毕.

定理 3 设 $f\in C^0(I,\ I)$ 和 $P(f)$ 有限. 则 $x\in\Omega(f)\cap W\Rightarrow x\in\Omega(f^2)$.

证 记 f 的周期点个数为 $N(f)$. 对 $N(f)$ 归纳证明.

$N(f)=1$, f 只有一个周期点，这个周期点是不动点. 据定理 B(见 § 1), $\Omega(f)=P(f)$, 结论成立.

设对 $N(f)$ 小于正整数 n 的所有映射 $f\in C^0(I,\ I)$ 结论已真. 据 § 2 末关于映射拓扑共轭的概念的说明，对周期点个数小于 n 的所有映射 $g\in C^0(K,\ K)$ 结论亦真. 这里 $K\subset I$ 是任意闭线段. 以上所有关于 $C^0(I,\ I)$ 的讨论也都同样适用到 $g\in C^0(K,\ K)$.

设 $f\in C^0(I,\ I)$, $N(f)=n$.

因为 W 为 f 的所有周期点的非稳定流形所覆盖，且对 $l\geq1$, $\Omega(f^{2^l})\subset\Omega(f^2)$, 故据定理 2 及[1, 定理 B], 只余证明

i) 设 $\{p_1,\ p_2\}$ 是 f 的一个周期为 2 的周期轨道，则 $x\in\Omega(f)\cap\overline{W^u(p_1,\ f)}\Rightarrow x\in\Omega(f^2)$;

ii) 设 p 是 f 的一个不动点，则 $x\in\Omega(f)\cap\overline{W^u(p,\ f)}\Rightarrow x\in\Omega(f^2)$.

i) 的证明 设 $\{p_1,\ p_2\}$ 是 f 的一个周期为 2 的周期轨道. 据 [1, 引理 2] 和引理 9 i), $\overline{W^u(p,\ f^2)}$, $\overline{W^u(p_2,\ f^2)}$ 适合引理 13 中 K_1, K_2 的条件. 因此对

$$\overline{W^u(p_1,\ f)}-\overline{W^u(p_1,\ f^2)}\cap\overline{W^u(p_2,\ f^2)}=\overline{W^u(p_1,\ f^2)}\cup\overline{W^u(p_2,\ f^2)}-\overline{W^u(p_1,\ f^2)}\cap\overline{W^u(p_2,\ f^2)}$$

上的非游荡点，结论成立.

显然 $K=\overline{W^u(p_1,\ f^2)}\cap\overline{W^u(p_2,\ f^2)}$ 是 I 的连通闭子集且对 f 不变，f 在 K 上的限制映射(K 到自身)的周期点集是 $K\cap P(f)$, 因此有限. 我们下面将证明 f 的这个限制映射的周期点个数小于 n, 依归纳假设，对 K 上的非游荡点结论成立. 这样就完成了 i) 的证明.

现证在 K 上 f 的周期点个数小于 n. 设不然，则 $p_1,\ p_2\in K$. 据 [1, 定理 8], p_1, p_2 都 $\overline{\in}W^u(p_1,\ f^2)\cap W^u(p_2,\ f^2)$. 因此必有 $W^u(p_1,\ f^2)\cap W^u(p_2,\ f^2)=(p_1,\ p_2)$(不妨设 $p_1<p_2$). 容易看出 $W^u_+(p_1,\ f^2)=[p_1,\ p_2)$, $W^u_-(p_2,\ f^2)=(p_1,\ p_2]$.

记 f 在 $[p_1,\ p_2]=\overline{W^u(p_1,\ f^2)}\cap\overline{W^u(p_2,\ f^2)}=K$ 上的限制映射为 g, $\{p_1,\ p_2\}$ 亦是 g 的周期为 2 的周期轨道. 因 $K=[p_1,\ p_2]$ 对 f 不变，据 [1, 引理 6] 从 $W^u(p_1,\ f^2,\ +)$ 和 $W^u(p_2,\ f,\ -)$ 的定义(见 [1] § 2)易于看出，$W^u(p_1,\ g^2)=W^u(p_1,\ f^2,\ +)=W^u_+(p_1,\ f^2)=[p_1,\ p_2)$, $W^u(p_2,\ g^2)=W^u(p_2,\ f^2,\ -)=W^u_-(p_2,\ f^2)=(p_1,\ p_2]$. 据 [1, 定理 7], 不存在 $x\in(p_1,\ p_2)$, 使 $f(x)=g(x)=p_1$, 同样也不存在 $y\in(p_1,\ p_2)$, 使 $f(y)=g(y)=p_2$. 因此易见 $g((p_1,\ p_2))=(p_1,\ p_2)$. 但这与引理 16(相差一个拓扑共轭)矛盾. 这就证明了 f 在 $K=\overline{W^u(p_1,\ f^2)}\cap\overline{W^u(p_2,\ f^2)}$ 上限制映射的周期点个数小于 n.

ii) 的证明 设 p 是 f 的不动点. 据 [1, 引理 1; 引理 3], $\overline{W^u(p,\ f)}$ 连通且对 f 不变. 当 $\overline{W^u(p,\ f)}$ 不包含 $P(f)$ 时，f 在 $\overline{W^u(p,\ f)}$ 上的限制映射的周期点个数小于 n. 依归纳假设，对 $\overline{W^u(p,\ f)}$ 上的非游荡点，结论成立.

设 $\overline{W^u(p,f)}\supset P(f)$. 当 p 是 $\overline{W^u(p,f)}$ 的一个端点时，称 p 为第一类不动点. 当 p 是第一类不动点时，据引理 14 或引理 15，$\overline{W^u(p,f)}$ 可分解成两个线段的并，其中一个是闭的且对 f 不变，f 在其上限制映射的周期点个数小于 n；另一个线段上无非游荡点（除 p 外）. 依归纳假设，结论成立.

现假设 p 不是第一类不动点. $\overline{W^u(p,f)}=\overline{W^u_-(p,f)}\cup\overline{W^u_+(p,f)}$. 据引理 5，有下述四种可能.

A) $f\overline{W^u_+(p,f)}\subset\overline{W^u_+(p,f)}$, $f\overline{W^u_-(p,f)}\subset\overline{W^u_-(p,f)}$;

B) $f\overline{W^u_+(p,f)}\subset\overline{W^u_+(p,f)}$, $f\overline{W^u_-(p,f)}\subset\overline{W^u_+(p,f)}$;

C) $f\overline{W^u_+(p,f)}\subset\overline{W^u_-(p,f)}$, $f\overline{W^u_-(p,f)}\subset\overline{W^u_-(p,f)}$;

D) $f\overline{W^u_+(p,f)}\subset\overline{W^u_-(p,f)}$, $f\overline{W^u_-(p,f)}\subset\overline{W^u_+(p,f)}$.

对于 A)，$\overline{W^u_+(p,f)}$, $\overline{W^u_-(p,f)}$ 均对 f 不变，且都连通，f 在各自上的限制映射均以 p 为第一类不动点. 依上述讨论，结论成立.

对于 B)，容易从定义直接证明，$\overline{W^u_-(p,f)}$ 上除 p 外无非游荡点，而 f 限制在连通不变子集 $\overline{W^u_+(p,f)}$ 上以 p 为第一类不动点. 依上述讨论，结论成立.

对于 C)，与 B) 类似，结论成立.

对于 D)，从 f^2 的非游荡点的定义出发可以直接证明，当 $x\in\Omega(f)\cap\overline{W^u(p,f)}$ 时，$x\in\Omega(f^2)$.

至此归纳步骤完成.　　证毕.

定理 4　设 $f\in C^0(I,I)$ 和 $P(f)$ 有限，则 $\Omega(f^2)$ 有限 $\Rightarrow\Omega(f)$ 有限.

证　设 $\Omega(f^2)$ 有限. 由定理 A(见 §1)，$\Omega(f^2)=P(f^2)=P(f)$. 若 $\Omega(f)$ 无限，则 $\Omega(f)-\Omega(f^2)=\Omega(f)-P(f)$ 亦无限，即除周期点外，f 有无限多非游荡点都不是 f^2 的非游荡点. 因在 $I-W$ 上 f 的非游荡点个数有限(定理 1)，这显然导致与定理 3 的矛盾.　　证毕.

现在我们来给出本文主要定理(叙述见 §1)的证明.

必要性. 显然，因 $P(f)\subset\Omega(f)$.

充分性. 设 $P(f)$ 有限. 据[1, 定理 B]，可设 f 的周期点的最大周期为 2^n，我们有 $P(f)=P(f^{2^n})=F(f^{2^n})$. 据定理 B(见 §1)，$\Omega(f^{2^n})$ 有限. 由定理 4，我们有

$$\Omega(f^{2^n})\text{ 有限}\Rightarrow\Omega(f^{2^{n-1}})\text{ 有限}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\Omega(f^2)\text{ 有限}\Rightarrow\Omega(f)\text{ 有限}.$$

推论　设 $f\in C^0(I,I)$. 当 $P(f)$ 有限时，则 f 的拓扑熵 $\mathrm{ent}(f)=0$.

证　由主要定理，$\Omega(f)$ 有限. 据 [6]，$\Omega(f)$ 有限蕴含 $\mathrm{ent}(f)=0$.

注　本文投稿半年后见到 Coven 和 Fedlund 的文章 (Proc.Ams. 19 (1980), 127—133). 他们的结果包含本文结果. 但本文方法与他们的完全不同，且用本文方法我们得到的进一步结果，又包含他们的结果(见科学通报，23(1981).

本文的问题是北京大学廖山涛教授向作者指出的. 在写作过程中亦得到廖教授热情帮助和鼓舞，作者在此表示衷心谢意.

参 考 文 献

[1] Block, L., Continuous maps of the interval with finite nonwandering set, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **240** (1978), 221—230.

[2] Block., L., Mappings of the interval with finitely many periodic points have zero entropy, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **68** (1977), 357—361.

[3] Block, L., Homoclinic points of mappings of the interval, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **72** (1978), 576—580.

[4] Block, L., Simple periodic orbits of mappings of the interval, *Trans. Amer. Math. Soc.* **254** (1979), 391—398,

[5] Bowen, R., Franks, J., The periodic points of maps of the disk and the interval, *Topology*, **15** (1976), 337—342.

[6] Bowen, R., Topological entropy and Axiom A, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **14**, *Amer. Math. Soc.*, *Providence, R. I.*, (1970), 23—41.

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR FINITENESS OF NONWANDERING SETS OF MAPPINGS OF THE INTERVAL

ZHOU ZUOLING

(*Jinan University*)

ABSTRACT

Denote $C^0(I, I)$ the set of all continuous mappings of the interval. Let $f \in C^0(I, I)$, for any positive integer n, we define f^n inductively by $f^1 = f$, $f^n = f \cdot f^{n-1}$ and $f^0 =$ the identity map.

Definition 1. Let $p \in I$. If there exists a positive integer n such that $f^n(p) = p$, then p is called a periodic point of f.

Denote $P(f)$ the set of all periodic points of f.

Definition 2. Let $p \in I$. If for any neighborhood $U(p)$ of p, there exists $k > 0$ suc h that $f^k(U(p)) \cap U(p) \neq \phi$, then p is called a nonwandering point of f.

Denote $\Omega(f)$ the set of all nonwandering points of f.

Our main aim of this article is to prove the following theorem which, together with Theorem A in [1], answers a question of Block [2, p. 358].

Main Theorem. $\Omega(f)$ is finite for $f \in C^0(I, I)$, if and only if $P(f)$ is finite.

As a consequence, we obtain directly that the topological entropy of f is zero, if $P(f)$ is finite.