数 学 年 刊
3 (2) 1982

二阶拟线性椭圆型方程一般边值问题解的存在性

朱 汝 金
(北京师范大学)

在文章[1]与[2]中，曾用了不同的方法证明一个空间变量的拟线性抛物型方程一般边值问题解的存在定理．本文利用与[1]相类似的方法考虑多个自变量椭圆型方程一般边值问题

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a(x,u,u_{x_k})=0,\ x\in\Omega, \tag{1}$$

$$\alpha(x,u)\frac{\partial u}{\partial\gamma}+\beta(x,u)=0,\ x\in\partial\Omega. \tag{2}$$

其中 Ω 是 n 维的有界区域，$\partial\Omega$ 是它的边界；γ 是在 $\partial\Omega$ 上定义的方向，其方向余弦为 $(\gamma_1(x),\cdots,\gamma_n(x))$ 并且与 $\partial\Omega$ 的内法向 $n=(n_1(x),\cdots,n_n(x))$ 组成锐角；$\alpha(x,u)\geqslant 0$. 沿用[3]中的记号，我们证明的结果是：

定理 假设问题(1)、(2)满足以下条件

1) 当 $x\in\overline{\Omega}$, u, p_k 任意时，函数 $a_{ij}(x,u)$、$a(x,u,p_k)$ 连续可微

$$a_u(x,u,0)\leqslant -a_0<0,\ |a(x,0,0)|\leqslant a_1.$$

$\forall(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$, $\forall x\in\Omega$ 及任意的 u,

$$\nu(|u|)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j\leqslant\mu(|u|)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,$$

其中 $\nu(v)$、$\mu(v)$ 分别是 $[0,+\infty)$ 上定义的不增与不降的正函数。

2) 当 $x\in\partial\Omega$, u 任意时，$\alpha(x,u)$、$\beta(x,u)$ 连续可微，并恒有

$$\alpha(x,u)\geqslant 0,\qquad \alpha_u(x,u)\leqslant 0,$$
$$\beta_u(x,u)\leqslant -\beta_0<0,\ \beta(x,0)=0.$$

在 $\partial\Omega$ 上，$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x)n_i(x)\geqslant\gamma_0>0$.

3) 当 $x\in\overline{\Omega}$, $|u|\leqslant M_0=\dfrac{a_1}{a_0}$, p_k 任意时，函数 $a_{ij}(x,u)$、$a(x,u,p_k)$ 满足不等式

$$|a_{ij}(x,u)|+\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|\leqslant\mu,$$

$$|a(x,u,p_k)|+\left|\frac{\partial a}{\partial u}\right|+\sum_{k=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial a}{\partial x_k}\right|+\left|\frac{\partial a}{\partial p_k}\right|(1+p)\right]\leqslant\mu(1+p)^2,$$

本文1979年12月3日收到，1980年1月18日修改。

其中 $\mu>0$, $p=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

4) 当 $x\in\overline{\Omega}$, $|u|\leqslant M_0$, p_k 任意时, $a_{ij}(x, u)$、$a(x, u, p_k)$属于 C^3; $\Omega\in C^4$; 当 $x\in\partial\Omega$, $|u|\leqslant M_0$ 时, $\alpha(x, u)$、$\beta(x, u)$、$\gamma_i(x)\in C^3$.

则方程(1)有解 $u(x)\in C(\overline{\Omega})\wedge C^3(\Omega)$, 并且在下述意义下满足边界条件(2): $\forall x\in\partial\Omega$, 若 $\alpha(x, u(x))=0$, 则在该点 $\beta(x, u(x))=0$; 若 $\alpha(x, u(x))>0$, 则在该点方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}$ 存在并且满足(2).

为了证明此定理, 我们在 $\alpha(x, u)$上加一个正的小参数. 即对任意的自然数 m, 考虑方程(1)的满足边界条件

$$\left[\alpha(x, u)+\frac{1}{m}\right]\frac{\partial u}{\partial\gamma}+\beta(x, u)=0,\ x\in\partial\Omega \tag{3}$$

的斜微商问题. 在(一)中, 我们将证明问题 (1)、(3) 等价于一个第二边值问题, 从而有解 $u_m(x)\in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$. 然后在(二)建立必要的先验估计, 证明存在子列 $\{u_{m'}(x)\}$ 收敛到问题(1)、(2)的解.

(一)

边界条件(3)可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial\gamma}+\beta_m(x, u)=0, \tag{4}$$

其中

$$\beta_m(x, u)=\frac{\beta(x, u)}{\alpha(x, u)+\dfrac{1}{m}}.$$

我们证明, 若只考虑 $C^2(\Omega)$中的解, 则斜微商问题(1)、(4)等于一个第二边值问题.

因为 $\gamma_i(x)\in C^3(\partial\Omega)$, $\Omega\in C^4$, 所以可将 $\gamma_i(x)$、$n_i(x)$ 开拓成 $C^3(\overline{\Omega})$ 的函数(仍记作 $\gamma_i(x)$、$n_i(x)$)且要求满足

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2(x)\equiv1,\ \sum_{i=1}^{n}n_i^2(x)\equiv1,\ \sum_{i=1}^{n}n_i(x)\gamma_i(x)\geqslant\frac{\gamma_0}{2}>0.$$

在(1)的两端乘以

$$h(x, u)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i(x)n_i(x)}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x, u)n_i(x)n_j(x)}\geqslant\frac{\gamma_0}{2\mu(|u|)},$$

得方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}a'_{ij}(x, u)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+h(x, u)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{da_{ij}(x, u)}{dx_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+h(x, u)a(x, u, u_{x_k})=0,$$

其中 $a'_{ij}(x, u)=h(x, u)a_{ij}(x, u)$, $\dfrac{d}{dx_i}$是向 x_i 的全微分算子. 显然, 当 $x\in\overline{\Omega}$, u 任意时恒有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a'_{ij}(x, u)n_i(x)n_j(x)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x)n_i(x). \tag{5}$$

考虑代数方程组

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} n_i(x)\bar{a}_{ij}=\gamma_j(x)\\ \bar{a}_{ij}+\bar{a}_{ji}=a'_{ij}(x,\ u)+a'_{ji}(x,\ u)\ (i,\ j=1,\ \cdots,\ n).\end{cases}\tag{6}$$

如果 $\forall x\in\bar{\Omega}$ 及任意的 u, 方程组(6)有解 $\bar{a}_{ij}=\bar{a}_{ij}(x,\ u)\in C^3$, 则对于 $C^2(\bar{\Omega})$ 中的解而言，问题(1)、(4)与第二边值问题

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{a}_{ij}(x,\ u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\bar{a}(x,\ u,\ u_{x_k})=0,\ x\in\Omega,\tag{7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\bar{a}_{ij}(x,\ u)n_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\beta_m(x,\ u)=0,\ x\in\partial\Omega,\tag{8}$$

完全等价，其中

$$\bar{a}(x,\ u,\ u_{x_k})=\sum_{i,j=1}^{n}\left[h(x,\ u)\frac{da_{ij}(x,\ u)}{dx_i}-\frac{d\bar{a}_{ij}(x,\ u)}{dx_i}\right]\frac{\partial u}{\partial x_j}+h(x,\ u)a(x,\ u,\ u_{x_k}).$$

而根据 Уральуева, Н. Н. 的结果([4]或[3]之第十章)，问题(7)、(8)有解 $u_m(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha\in(0,\ 1)$. 由 Schauder 定理, $u_m(x)\in C^{3+\alpha}(\bar{\Omega})$, 它也就是斜微商问题(1)、(3)的解.

我们设法解方程组(6)，它等价于方程组

$$\begin{cases}-n_2\bar{a}_{12}-n_3\bar{a}_{13}\quad -n_4\bar{a}_{14}\quad\cdots\quad -n_n\bar{a}_{1n}=l_1\\ n_1\bar{a}_{12}\quad -n_3\bar{a}_{23}\quad -n_4\bar{a}_{24}\quad\cdots\quad -n_n\bar{a}_{2n}=l_2\\ n_1\bar{a}_{13}+n_2\bar{a}_{23}\quad -n_4\bar{a}_{34}\quad\cdots\quad -n_n\bar{a}_{3n}=l_3\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ n_1\bar{a}_{1n}+n_2\bar{a}_{2n}+n_3\bar{a}_{3n}+\cdots+n_{n-1}\bar{a}_{n-1,n}=l_n\end{cases}\tag{9}$$

$$\bar{a}_{ij}+\bar{a}_{ji}=a'_{ij}+a'_{ji}\quad(i>j,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$$

$$\bar{a}_{ii}=a'_{ii}\quad(i=1,\ \cdots,\ n),$$

其中当 $i<n$ 时

$$l_i=\gamma_i-n_ia'_{ii}-\sum_{l=i+1}^{n}n_l(a'_{il}+a'_{li}),\ l_n=\gamma_n-n_na'_{nn}.$$

因此只要解方程组(9)即可. 由于 a'_{ij} 满足(5)，不难验证，将 (9) 中方程依次乘以 $n_1,\ \cdots,\ n_n$, 然后相加便得一个恒等式. 所以 (9) 的系数矩阵与增广矩阵的秩均小于 n. 另外, $\forall x_0\in\bar{\Omega}$, $\exists i_0$, 使 $n_{i_0}(x_0)\neq 0$. 这时 (9) 中第 i_0 个方程是其余 $n-1$ 个方程的推论，而在这 $n-1$ 个方程的系数矩阵中必包含一个对角形矩阵，其对角线元素为 $\pm n_{i_0}(x_0)$. 因此 $\forall x\in\Omega$ 及任意的 u, 方程组(9)从而方程组(6)总是可解的. 现在设法得到 (6) 的光滑解. 显然

$$\bar{\Omega}=\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i,$$

其中
$$\Omega_i=\left\{x\in\bar{\Omega}\,\middle|\,|n_i(x)|>\frac{1}{2\sqrt{n}}\right\}\quad(i=1,\ \cdots,\ n).$$

在 Ω_1 上，(9) 的第一个方程是其余方程的推论，而在后者的系数矩阵中有一个非奇异的 $n-1$ 阶矩阵. 将自由未知数代以 $C^3(\Omega_1\times\mathbf{R}^1)$ 中的任意函数，就能得到 (6) 的一组属于 $C^3(\Omega_1\times\mathbf{R}^1)$的解. 在 Ω_2 上, (9) 的第二个方程是其余方程的推论，而后者的系数矩阵中也有一个非奇异的 $n-1$ 阶矩阵. 将自由未知数 (与上一步骤不同) 代以光滑函数使它与

$\Omega_1\times\mathbf{R}^1$ 上的已得值一起构成 $C^3((\Omega_1\cup\Omega_2)\times\mathbf{R}^1)$ 中的函数，这样就能得到(6)的一组属于 $C^3((\Omega_1\cup\Omega_2)\times\mathbf{R}^1)$ 的解. 经 n 步这样的手续，就得到 (6) 的一组属于 $C^3(\overline{\Omega}\times\mathbf{R}^1)$ 的解 $\overline{a}_{ij}=\overline{a}_{ij}(x, u)$, $i, j=1, \cdots, n$.

(二)

下面研究当 $m\to\infty$ 时，(一)节得到的斜微商问题(1)、(3)的解 $u_m(x)$ 的极限，来完成定理的证明.

容易证明[3]，$\forall m$, $\forall\Omega'\subset\subset\Omega$,

$$|u_m|_{\Omega}^{0}\leqslant M_0,\quad |u_m|_{\Omega'}^{3+\alpha}\leqslant M(\Omega'),$$

其中 $M_0=\frac{a_1}{a_0}$, $M(\Omega')$与m无关. 因此在 $\{u_m\}$ 中存在子列(仍记作 $\{u_m\}$) 按 $C^3(\Omega)$ 的拓扑收敛到 u, 它属于 $C^3(\Omega)$并在 Ω 内满足方程 (1). 余下要证明 u 满足边界条件 (2). 为此，先建立$\left|\frac{\partial u_m}{\partial\gamma}\right|_{\partial\Omega}^{0}$ 及$|u_m|_{\Omega}^{\alpha}$的与m无关的先验估计.

因为 $\Omega\in C^4$, 所以 $\partial\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{N}\sigma_i$, 其中 $\sigma_i\subset\subset\sigma_i'\subset\partial\Omega$, 而 σ_i' 可用一个 $n-1$ 变元的 C^4 类函数表示. 任取 i_0, $1\leqslant i_0\leqslant N$, 只要在 σ_{i_0} 上证明 u 满足边界条件 (2) 即可. 不失一般性，设 σ_{i_0}' 可以表成

$$x_n=h(x_1, \cdots, x_{n-1}),\ (x_1, \cdots, x_{n-1})\in\omega',$$

并且 x_n 的方向指向 Ω 的内部，σ_{i_0} 对应着 $\omega\subset\subset\omega'$.

与(一)一样，写出 u_m 满足的与(1)、(3)等价的第二边值问题

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{a}_{ij}(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\overline{a}(x, u, u_{x_k})=0,\ x\in\Omega,\tag{10}$$

$$\left[\alpha(x, u)+\frac{1}{m}\right]\sum_{i,j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(x, u)n_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\beta(x, u)=0,\ x\in\partial\Omega,\tag{11}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{a}_{ij}(x, u)n_i(x)=\gamma_j(x)$, $j=1, \cdots, n$.

在 $G_1\equiv\omega'\times\{y_n|0<y_n<d\}$ 上作变换

$$\begin{aligned}x_1&=y_1+y_n\gamma_1(y', h(y')),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1}&=y_{n-1}+y_n\gamma_{n-1}(y', h(y')),\\ x_n&=h(y')+y_n\gamma_n(y', h(y')),\end{aligned}$$

其中 $y'=(y_1, \cdots, y_{n-1})$. 这个变换三次连续可微并且当 d 足够小时是非奇异的. 经变换后，σ_{i_0}、σ_{i_0}' 分别变成 $y_n=0$ 平面上的区域 ω、ω', Ω 中与 σ_{i_0}' 相毗邻的部分变成 G_1, 而 u_m 满足的(10)、(11)变成

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\tilde{a}_{ij}(y, u)\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)+\tilde{a}(y, u, u_{y_k})=0,\ y\in G_1,\tag{12}$$

$$\left[\tilde{\alpha}(y, u)+\frac{1}{m}\right]\frac{\partial u}{\partial y_n}+\tilde{\beta}(y, u)=0,\ y\in\omega'\times\{y_n|y_n=0\}.\tag{13}$$

显然 $\tilde{a}_{ij}$、$\tilde{a}$、$\tilde{\alpha}$、$\tilde{\beta}$ 仍满足定理的诸条件，只是 $\nu(v)$, $\mu(u)$, μ 应换成另一些具同样性质的

量，不妨仍用原来的记号表示它们.

此外，经过简单的计算容易看出：$\forall y'\in\omega'$ 及任意的 u,

$$\tilde{a}_{nj}(y',\ 0,\ u)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

从而

$$\tilde{a}_{nn}(y',\ 0,\ u)\geqslant\nu(|u|)>0.$$

作函数 $\hat{\alpha}(y',\ u)$、$\hat{\beta}(y',\ u)\in C^3(\omega'\times\mathbf{R}^1)$，使得当 $u\leqslant M_0$ 时，$\hat{\alpha}(y',\ u)=\tilde{\alpha}(y',\ u)$，$\hat{\beta}(y',\ u)=\tilde{\beta}(y',\ u)$；当 $u>2M_0$ 时，$\hat{\alpha}(y',\ u)=0$，$\hat{\beta}(y',\ u)=\tilde{\beta}(y',\ 2M_0)-\beta_0(u-2M_0)$；并且在 $\omega'\times\mathbf{R}^1$ 上恒有 $\hat{\alpha}(y',\ u)\geqslant0$，$\hat{\alpha}_u(y',\ u)\leqslant0$，$\hat{\beta}_u(y',\ u)\leqslant-\beta_0<0$. 则 u_m 亦满足边界条件

$$\left[\hat{\alpha}(y',\ u)+\frac{1}{m}\right]\frac{\partial u}{\partial y_n}+\hat{\beta}(y',\ u)=0,\ y\in\omega'\times\{y_n|y_n=0\}. \tag{14}$$

取开区域 $\omega^{(2)}$、$\omega^{(3)}$、$\omega^{(4)}$ 使满足

$$\omega\subset\subset\omega^{(4)}\subset\subset\omega^{(3)}\subset\subset\omega^{(2)}\subset\subset\omega'.$$

作函数 $\chi(y')\in C^2(\omega^{(2)})$，$1\leqslant\chi\leqslant e^{M_0H}$，当 $y'\in\omega^{(3)}$ 时，$\chi(y')\equiv1$，当 $y'\in\partial\omega^{(2)}$ 时，$\chi(y')\equiv e^{M_0H}$. 设 $\psi_m(y';H,\ K)$ 是函数方程

$$\left[\hat{\alpha}(y',\ \psi_m)+\frac{1}{m}\right]\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}(y',\ \psi_m)=0 \tag{15}$$

的解. 其中 K、H 均是待定的正常数. 容易看出方程(15)总是可解的并且其解 $\psi_m\in C^3(\omega')$。

在区域 $G_2\equiv\omega^{(2)}\times\left\{y_n\middle|0<y_n<\frac{1}{K}\right\}$ 上考虑辅助函数

$$w_m(y)=u_m(y)-\psi_m(y';H,\ K)-\frac{1}{H}\ln[\chi(y')+e^{M_0H}Ky_n].$$

我们将证明，适当选取 H、K 之后，w_m 在 $\bar{G}_2$ 上不大于零. 为此必须估计 ψ_m 及其一、二阶微商.

首先证明存在仅与定理条件中的数据有关的正常数 M (以后凡是这样的常数都记为 M)，使得当 $y'\in\omega^{(2)}$，$|u|\leqslant2M_0$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n-1}[\hat{\alpha}_{y_i}(y',\ u)]^2\leqslant M\hat{\alpha}(y',\ u),$$

$$[\hat{\alpha}_{uu}(y',\ u)]^2\leqslant-M\hat{\alpha}_u(y',\ u).$$

事实上，设 $\rho=\mathrm{dis}(\omega^{(2)},\ \partial\omega')$，则当 $|\eta|<\rho$ 时，$\forall(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1})\in\omega^{(2)}$，必有$(y_1,\ \cdots,\ y_{i-1},\ y_i+\eta,\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_{n-1})\in\omega'$. 于是

$$0\leqslant\hat{\alpha}(y_1,\ \cdots,\ y_{i-1},\ y_i+\eta,\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_{n-1},\ u)$$
$$=\hat{\alpha}(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1},\ u)+\eta\hat{\alpha}_{y_i}(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1},\ u)+\frac{\eta^2}{2}\hat{\alpha}_{y_iy_i}(\cdots,\ y_i+\theta\eta,\ \cdots,\ u),$$

$0<\theta<1$. 因此，若取

$$M=\max_{\substack{y'\in\omega'\\|u|\leqslant2M_0}}\left\{\frac{1}{2}|\hat{\alpha}_{y_iy_i}(y',\ u)|+\frac{2}{\rho^2}|\hat{\alpha}(y',\ u)|+\frac{2}{\rho}|\hat{\alpha}_{y_i}(y',\ u)|\right\},$$

则 $\forall\eta$ 均有

$$\hat{\alpha}(y',\ u)+\eta\hat{\alpha}_{y_i}(y',\ u)+M\eta^2\geqslant0.$$

从而

$$[\hat{\alpha}_{y_i}(y',\ u)]^2\leqslant4M\hat{\alpha}(y',\ u).$$

由此得到第一个不等式，第二个不等式可类似地证明.

现在就可以建立关于 ψ_m 的估计. 若

$$\left[\hat{\alpha}(y',\ \psi_m)+\frac{1}{m}\right]\frac{K}{H}e^{M_0H}\leqslant-\hat{\beta}(y',\ 2M_0),$$

则由(15)得
$$-\hat{\beta}(y',\ 0)=0<-\hat{\beta}(y',\ \psi_m)\leqslant-\hat{\beta}(y',\ 2M_0),$$
从而 $0<\psi_m\leqslant 2M_0$. 于是利用刚才证明的不等式便得

$$\left|\frac{\partial\psi_m}{\partial y_i}\right|=\left|\frac{\hat{\alpha}_{y_i}(y',\ \psi_m)\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_{y_i}(y',\ \psi_m)}{\hat{\alpha}_u(y',\ \psi_m)\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_u(y',\ \psi_m)}\right|\leqslant M\left[(\hat{\alpha}(y',\ \psi_m))^{1/2}\frac{K}{H}e^{M_0H}+1\right]$$

$$\leqslant M\left[\left(\frac{K}{H}e^{M_0H}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right],$$

$$\left|\frac{\partial^2\psi_m}{\partial y_i\partial y_j}\right|=\left|\frac{\hat{\alpha}_{y_iy_i}\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\alpha}_{y_iu}\frac{K}{H}e^{M_0H}\frac{\partial\psi_m}{\partial y_j}+\hat{\beta}_{y_iy_j}+\hat{\beta}_{y_iu}\frac{\partial\psi_m}{\partial y_j}}{\hat{\alpha}_u\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_u}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\hat{\alpha}_{y_i}\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_{y_i}\right)\left(\hat{\alpha}_{uy_j}\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\alpha}_{uu}\frac{K}{H}e^{M_0H}\frac{\partial\psi_m}{\partial y_j}+\hat{\beta}_{uy_j}+\hat{\beta}_{uu}\frac{\partial\psi_m}{\partial y_j}\right)}{\left(\hat{\alpha}_u\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_u\right)^2}\right|$$

$$\leqslant M\left(\left(\frac{K}{H}e^{M_0H}\right)^{\frac{3}{2}}+1\right)+M\frac{\left|\hat{\alpha}_{uu}\frac{K}{H}e^{M_0H}\right|}{\left|\hat{\alpha}_u\frac{K}{H}e^{M_0H}\right|^{1/2}}\left(\frac{K}{H}e^{M_0H}+1\right)$$

$$\leqslant M\left[\left(\frac{K}{H}e^{M_0H}\right)^{3/2}+1\right].$$

若
$$\left[\hat{\alpha}(y',\ \psi_m)+\frac{1}{m}\right]\frac{K}{H}e^{M_0H}>-\hat{\beta}(y',\ 2M_0),$$
则由(15)得
$$-\hat{\beta}(y',\ \psi_m)>-\hat{\beta}(y',\ 2M_0).$$
从而 $\psi_m>2M_0$, 因此它满足方程

$$\frac{1}{m}\frac{K}{H}e^{M_0H}+\tilde{\beta}(y',\ 2M_0)-\beta_0(\psi_m-2M_0)=0,$$

$$\psi_m=\frac{1}{\beta_0}\left[\frac{1}{m}\frac{K}{H}e^{M_0H}+\tilde{\beta}(y',\ 2M_0)\right]+2M_0.$$

于是, $2M_0<\psi_m\leqslant M\left(\frac{K}{H}e^{M_0H}+1\right)$, $\left|\frac{\partial\psi_m}{\partial y_i}\right|\leqslant M$, $\left|\frac{\partial^2\psi_m}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leqslant M$. 总之, 在 $\omega^{(2)}$ 上有估计

$$0\leqslant\psi_m\leqslant M\left(\frac{K}{H}e^{M_0H}+1\right),$$

$$\left|\frac{\partial\psi_m}{\partial y_i}\right|\leqslant M\left[\left(\frac{K}{H}e^{M_0H}\right)^{1/2}+1\right],$$

$$\left|\frac{\partial^2\psi_m}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leqslant M\left[\left(\frac{K}{H}e^{M_0H}\right)^{3/2}+1\right],\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

现在不难证明在 $\overline{G}_2$ 上 $w_m\leqslant 0$. 事实上, 当

$y\in\partial\omega^{(2)}\times\left\{y_n\,\middle|\,0\leqslant y_n\leqslant\frac{1}{K}\right\}$ 或 $y\in\omega^{(2)}\times\left\{y_n\,\middle|\,y_n=\frac{1}{K}\right\}$ 时 $\chi(y')+e^{M_0H}Ky_n\geqslant e^{M_0H}$,

从而在这些边界上

$$w_m(y)\leqslant M_0-\frac{1}{H}\ln e^{M_0H}=0.$$

当 $y\in\omega^{(2)}\times\{y_n|y_n=0\}$ 时，根据(14)、(15)，有

$$\begin{aligned}0&=\left[\hat{\alpha}(y',u_m)+\frac{1}{m}\right]\frac{\partial u_m}{\partial y_n}+\hat{\beta}(y',u_m)\\&=\left[\hat{\alpha}\Big(y',w_m+\psi_m+\frac{1}{H}\ln\chi\Big)+\frac{1}{m}\right]\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_n}+\Big(\frac{1}{\chi}-1\Big)\frac{K}{H}e^{M_0H}\right]\\&\quad+\left[\hat{\alpha}_u(y',\tilde{\psi})\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_u(y',\tilde{\psi})\right]\Big(w_m+\frac{1}{H}\ln\chi\Big),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\psi}$ 介于 ψ_m 与 $w_m+\psi_m+\frac{1}{H}\ln\chi$ 之间．从而

$$\begin{aligned}&\left[\hat{\alpha}\Big(y',w_m+\psi_m+\frac{1}{H}\ln\chi\Big)+\frac{1}{m}\right]\frac{\partial w_m}{\partial y_n}+\left[\hat{\alpha}_u(y',\tilde{\psi})\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_u(y',\tilde{\psi})\right]w_m\\&\quad=\left[\hat{\alpha}\Big(y',w_m+\psi_m+\frac{1}{H}\ln\chi\Big)+\frac{1}{m}\right]\Big(1-\frac{1}{\chi}\Big)\\&\quad-\frac{1}{H}\left[\hat{\alpha}_u(y',\tilde{\psi})\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_u(y',\tilde{\psi})\right]\ln\chi\geqslant0\end{aligned}\tag{16}$$

因此 w_m 不能在 $\omega^{(2)}\times\{y_n|y_n=0\}$ 上取正最大值．

下面证明 w_m 亦不能在 G_2 内取最大值．因为在 G_2 内的取最大值的点上

$$0=\frac{\partial w_m}{\partial y_i}=\frac{\partial u_m}{\partial y_i}-\frac{\partial\psi_m}{\partial y_i}-\frac{\frac{1}{H}\chi_{y_i}}{\chi+e^{M_0H}Ky_n}\ (i<n),$$

$$0=\frac{\partial w_m}{\partial y_n}=\frac{\partial u_m}{\partial y_n}-\frac{\frac{K}{H}e^{M_0H}}{\chi+e^{M_0H}Ky_n},$$

$$\begin{aligned}0&\geqslant\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}(y,u_m)\frac{\partial^2w_m}{\partial y_i\partial y_j}\geqslant\frac{\tilde{\nu}}{H[\chi+e^{M_0H}Ky_n]^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\chi_{y_i}^2+K^2e^{2M_0H}\right]\\&\quad-M\left[\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u_m}{\partial y_i}\Big)^2+\Big(\frac{K}{H}e^{M_0H}\Big)^{3/2}+1\right]\\&\geqslant\frac{\tilde{\nu}}{H[\chi+e^{M_0H}Ky_n]^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\chi_{y_i}^2+K^2e^{2M_0H}\right]-M\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial\psi_m}{\partial y_i}\Big)^2\\&\quad-\frac{M}{H^2[\chi+e^{M_0H}Ky_n]^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\chi_{y_i}^2+K^2e^{2M_0H}\right]-M\left[\Big(\frac{K}{H}e^{M_0H}\Big)^{3/2}+1\right]\\&\geqslant\frac{\tilde{\nu}H-M}{H^2[\chi^2+e^{M_0H}Ky_n]^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\chi_{y_i}^2+K^2e^{2M_0H}\right]-M\left[\Big(\frac{K}{H}e^{M_0H}\Big)^{3/2}+\Big(\frac{K}{H}e^{M_0H}\Big)^{1/2}+1\right],\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\nu}=\nu(M_0)$．取 $H=\frac{2M}{\tilde{\nu}}$，再令 K 充分大，则上式右端就大于零．出现的矛盾表明 w_m 不会在 G_2 内取最大值．

综上所述便知：在 $\overline{G}_2$ 上，$w_m(y)\leqslant0$．

可是当 $y\in\omega^{(3)}\times\{y_n|y_n=0\}$ 时，因为 $\chi(y')\equiv1$，所以(16)变成

$$\left[\hat{\alpha}(y',w_m+\psi_m)+\frac{1}{m}\right]\frac{\partial w_m}{\partial y_n}+\left[\hat{\alpha}_u(y',\tilde{\psi})\frac{K}{H}e^{M_0H}+\hat{\beta}_u(y',\tilde{\psi})\right]w_m=0.$$

因为 $\hat{a}\geqslant 0$，上式左端的第二项又是非负的，所以 $\frac{\partial w_m}{\partial y_n}\leqslant 0$，从而 $\frac{\partial u_m(y)}{\partial y_n}\leqslant\frac{K}{H}e^{M_0H}$. 同理可得 $\frac{\partial u_m}{\partial y_n}$ 的下方估计. 这样就证明了当 $y\in\omega^{(3)}\times\{y_n|y_n=0\}$ 时

$$\left|\frac{\partial u_m(y)}{\partial y_n}\right|\leqslant M_1,$$

M_1 与 m 无关.

现在我们仿照 [3] 中的办法，在 $\omega^{(4)}\times\{y_n|y_n=0\}$ 附近建立 u_m 的 Hölder 模的估计. 考虑区域 $G_3\equiv\omega^{(3)}\times\{y_n|0<y_n<d\}$，记 $\sigma_*=\partial G_3\backslash\omega^{(3)}\times\{y_n|y_n=0\}$，则问题归结为证明 u_m 属于[3]中定义的函数类 $\mathscr{B}_2(\overline{G}_3\backslash\sigma_*,\ M_0,\ \delta,\ \eta)$，而 δ、η 均与 m 无关.

设 $K(\rho)$ 是以 $y_0\in\overline{G}_3\backslash\sigma_*$ 为中心，ρ 为半径而不与 σ_* 相交的任意球，$\forall\theta\in(0,1)$ 及常数 k_1，令

$$\zeta(y)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant|y-y_0|\leqslant(1-\theta)\rho \text{ 时},\\ \dfrac{\rho-|y-y_0|}{\theta\rho}, & \text{当 } (1-\theta)\rho\leqslant|y-y_0|\leqslant\rho \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } |y-y_0|\geqslant\rho \text{ 时};\end{cases}$$

$$\eta(y)=\begin{cases}\zeta^2(y)[u_m(y)-k_1], & \text{当 } u_m(y)\geqslant k_1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } u_m(y)<k_1 \text{ 时}.\end{cases}$$

记
$$A_{\lambda,r}\equiv\{x|u_m(x)>\lambda,\ x\in K(r)\cap\overline{G}_3\}.$$
则

$$\begin{aligned}0=&-\iint\limits_{\overline{G}_3}\Big[\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\tilde{a}_{ij}(y,u_m)\frac{\partial u_m}{\partial y_j}\Big)+\tilde{a}(y,u_m,u_{m_{y_k}})\Big]\eta(y)dy\\ \geqslant&\int_{A_{k_1,\rho}\cap\{y_n=0\}}\tilde{a}_{nn}(y',0,u_m)\frac{\partial u_m}{\partial y_n}\zeta^2(u_m-k_1)dy'\\ &+\iint\limits_{A_{k_1,\rho}}\{\tilde{\nu}|\nabla u_m|^2\zeta^2-2\tilde{\mu}|\nabla u_m|(u_m-k_1)|\nabla\zeta|\zeta-\mu(1+|\nabla u_m|)^2(u_m-k_1)\zeta^2\}dy\\ \geqslant&-\tilde{\mu}M_1\int_{A_{k_1,\rho}\cap\{y_n=0\}}(u_m-k_1)\zeta^2(y)dy\\ &+\iint\limits_{A_{k_1,\rho}}\Big\{\frac{\tilde{\nu}}{2}|\nabla u_m|^2\zeta^2-\frac{4\tilde{\mu}}{\tilde{\nu}}(u_m-k_1)^2|\nabla\zeta|^2-2\mu(1+|\nabla u_m|^2)(u_m-k_1)\zeta^2\Big\}dy,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\mu}=\mu(M_0)$. 取 $\delta=\frac{\tilde{\nu}}{8\mu}$，则当 $k_1\geqslant\max\limits_{K(\rho)\cap\overline{G}_3}u_m(x)-\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}0\geqslant&\iint\limits_{A_{k_1,\rho}}\Big\{\frac{\tilde{\nu}}{4}|\nabla u_m|^2\zeta^2-\frac{4\tilde{\mu}}{\tilde{\nu}}(u_m-k_1)^2|\nabla\zeta|^2-\frac{\tilde{\nu}}{4}\zeta^2\\ &+\tilde{\mu}M_1\Big[\frac{\partial u_m}{\partial y_n}\zeta^2+2(u_m-k_1)\frac{\partial\zeta}{\partial y_n}\zeta\Big]\Big\}dy\\ \geqslant&\iint\limits_{A_{k_1,\rho}}\Big\{\frac{\tilde{\nu}}{8}|\nabla u_m|^2\zeta^2-M[(u_m-k_1)^2|\nabla\zeta|^2+\zeta^2]\Big\}dy.\end{aligned}$$

从而
$$\iint\limits_{A_{k_1,\rho-\theta\rho}}|\nabla u_m|^2dy\leqslant\eta\,\mathrm{mes}\,A_{k_1,\rho}\Big\{\frac{1}{(\theta\rho)^2}\max_{A_{k_1,\rho}}[u_m(y)-k_1]^2+1.\Big\}$$

若记 $B_{r,\lambda}\equiv\{x|u_m(x)<\lambda,\ x\in K(r)\cap\overline{G}_3\}$，同理可证，$\exists\delta>0$，当 $k_2\leqslant\min\limits_{K(\rho)\cap\overline{G}_3}u_m(y)+\delta$ 时

$$\iint\limits_{B_{k_2,\rho-\theta\rho}} |\nabla u_m|^2 dy \leqslant \eta \operatorname{mes} B_{k_2,\rho}\left\{\frac{1}{(\theta\rho)^2}\max_{B_{k_2,\rho}}[k_2-u_m(y)]^2+1\right\}.$$

这就证明了 $u_m(y)\in\mathscr{B}_2(\overline{G}_3\backslash\sigma_*,\ M_0,\ \delta,\ \eta)$，而 δ、η 与 m 无关．显然，所述的 $K(\rho)$ 满足

$$\operatorname{mes} K(\rho)\cap\overline{G}_3\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{mes} K(\rho)=\theta_0\rho^n,\ \theta_0>0.$$

于是根据[3]，在 $\overline{G}_4\equiv\overline{\omega}^{(4)}\times\left\{y_n\middle|0\leqslant y_n\leqslant\frac{d}{2}\right\}$ 上

$$|u_m|_{\overline{G}_4}^{\alpha}\leqslant M_2,$$

其中 $\alpha\in(0,\ 1)$、$M_2>0$ 与 m 无关．

因此在 $\{u_m\}$ 中存在子列（仍记作 $\{u_m\}$），它在 $\overline{G}_4$ 上一致收敛到 u．于是 $u(y)$ 在 $\overline{G}_4$ 上连续，从而 $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续．

最后证明 $u(y)$ 在 $\omega\times\{y_n|y_n=0\}$ 上满足边界条件

$$\tilde{\alpha}(y',\ u)\frac{\partial u}{\partial y_n}+\tilde{\beta}(y',\ u)=0,\tag{17}$$

$\forall y_0'\in\omega$，若 $\tilde{\alpha}(y_0',\ u(y_0',\ 0))=0$，因为

$$|\tilde{\beta}(y_0',\ u_m(y_0',\ 0))|=\left[\tilde{\alpha}(y_0',\ u_m(y_0',\ 0))+\frac{1}{m}\right]\left|\frac{\partial u_m(y_0',\ 0)}{\partial y_n}\right|$$
$$\leqslant M_1\left[\tilde{\alpha}(y_0',\ u_m(y_0',\ 0))+\frac{1}{m}\right],$$

令 $m\to\infty$，便得

$$\tilde{\beta}(y_0',\ u(y_0',\ 0))=0.$$

若 $\tilde{\alpha}(y_0',\ u(y_0',\ 0))=\alpha_0>0$，因为

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(y',\ u_m(y',\ 0))=&[\tilde{\alpha}(y',\ u_m(y',\ 0))-\tilde{\alpha}(y_1',\ u_m(y_0',\ 0))]\\&+[\tilde{\alpha}(y_0',\ u_m(y_0',\ 0))-\tilde{\alpha}(y_0',\ u(y_0',\ 0))]+\tilde{\alpha}(y_0',\ u(y_0',\ 0))\\\geqslant&\alpha_0-M(|u_m(y_0',\ 0)-u(y_0',\ 0)|+|y'-y_0'|^{\alpha}),\end{aligned}$$

所以 $\exists\eta>0$，使得当 $|y'-y_0'|<\eta$，m 足够大时

$$\tilde{\alpha}(y',\ u_m(y',\ 0))+\frac{1}{m}>\frac{\alpha_0}{2}.$$

因此在 $\overline{G}\equiv\left\{y=(y',\ y_n)\middle|\ |y'-y_0'|<\eta,\ 0\leqslant y_n\leqslant\frac{d}{3}\right\}\cap\overline{G}_4$ 上可用[5]中所述的办法有估计

$$|u_m|_{\overline{G}}^{2}\leqslant M_3,$$

M_3 与 m 无关．于是从 $\{u_m\}$ 中可以分出子列使其本身及一阶微商在 $\overline{G}$ 上一致收敛．从而 $u(y)\in C^{(1)}(\overline{G})$ 并满足(17)．这样就最终证明了 $u(x)$ 满足边界条件(2)．

定理中条件 $\beta(x,\ 0)=0$ 并不妨碍一般性．在一般情形，可在 $\overline{\Omega}$ 上作足够光滑的函数 $g(x)$ 满足

$$\alpha(x,\ g(x))\frac{\partial g}{\partial\gamma}+\beta(x,\ g(x))=0,\quad\frac{\partial g}{\partial\gamma}\geqslant0,\ x\in\partial\Omega.$$

作变换 $u=v+g(x)$，则 v 满足与(1)类似的方程而边界条件变为

$$\alpha(x,\ v+g(x))\frac{\partial v}{\partial\gamma}+\beta^*(x,\ v)=0,$$

其中 $$\beta^*(x, v)=\alpha(x, v+g(x))\frac{\partial g}{\partial\gamma}+\beta(x, v+g(x)).$$

显然，当 $x\in\partial\Omega$, u 任意时

$$\beta^*(x, 0)=\alpha(x, g(x))\frac{\partial g}{\partial\gamma}+\beta(x, g(x))=0,$$

$$\beta_v^*(x, v)=\alpha_u(x, v+g(x))\frac{\partial g}{\partial\gamma}+\beta_u(x, v+g(x))\leqslant-\beta_0<0.$$

本文在写作过程中得到姜礼尚同志的多方的帮助与鼓励，在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] 姜礼尚，关于拟线性抛物型方程一般边值的一点注记.
[2] 应隆安，拟线性抛物型方程的一般边界问题(二)，北京大学数力系微分方程论文集，(1963).
[3] Ладыженская, О. А., Уральчева, Н. Н., Линейные и Квазилинейные Уравненая Эллиптические типа, *Издательство «Наука», Мсоква*, (1973).
[4] Уральуев, Н. Н., Краевые Задачи для Квазилинейных Эллиптических Уравыений и Систем с дивергентной главнний частыо, *ДАН СССР* **147**: 2(1962), 313—316.
[5] Чжоу Юй-Линь (周毓麟), Краевые задачи для Нелинейных параболических уравнений, *Матем. сб.*, **47**(89): 4(1959), 431—484.

THE EXISTENCE THEOREM FOR SOLUTIONS OF GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF QUASI-LINEAR SECOND ORDER ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zhu Rujin
(*Beijing Normal University*)

ABSTRACT

In this paper, we provide the existence theorem for solutions of general boundary value problem of quasi-linear second order elliptic differential equations in the following form:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a(x, u, u_{x_k}), \text{ in } \Omega,$$

$$\alpha(x, u)\frac{\partial u}{\partial\gamma}+\beta(x, u)=0, \text{ on } \partial\Omega,$$

where $\alpha(x, u)\geqslant0$, $\alpha_u(x, u)\leqslant0$ and γ is some direction, defining on $\partial\Omega$.