数 学 年 刊
3 (2) 1982

Bochner–Kaehler 流形中反不变、全脐子流形

黄 城 超
(复旦大学)

Kaehler 流形上的 Bochner 曲率类似于黎曼流形上的共形曲率张量. 如果 Bochner 曲率张量为零, 那末 Kaehler 度量称为 Bochner-Kaehler 度量. 具有 Bochner-Kaehler 度量的复流形称为 Bochner-Kaehler 流形.

以往对 Bochner-Kaehler 流形中的子流形的性质的研究主要是关于全实子流形的情况. 例如:

定理 A (Yano[1,2]) 在具有零 Bochner 曲率张量的 Kaehler 流形 M^{2m} 中, 全脐、全实子流形 $M^n(n>3)$ 是共形平坦的.

1978 年, Chorng-Shi Houh[3] 证明了下面的定理:

定理 B 设 M 是在 Bochner-Kaehler 流形 $\widetilde{M}_m$ 中的 m 维全实子流形. 如果 M 是 $\widetilde{M}_m$ 中的全测地子流形, 那末 M 的截口曲率为 $\rho(X, Y)=\frac{1}{8}(\widetilde{K}(X)+\widetilde{K}(Y))$.

定理 C 设 M 是在 Bochner-Kaehler 流形 $\widetilde{M}_m$ 中的 m 维全实子流形. 如果 M 是 $\widetilde{M}_m$ 中的全测地子流形, 那末 M 的标量曲率是 $\rho=\frac{1}{4}m(m-1)\widetilde{K}$, $\widetilde{K}=\frac{1}{m}\sum_i\widetilde{K}(e_i)$.

本文的主要目的是研究在定理 A 到 C 中子流形是全实的这一条件是否必要. 并且证明了一些与上面提到的定理有相类似的结果.

设 $M^n(n\geqslant3)$ 是 n 维黎曼流形并且用一组坐标邻域 $\{U; \xi^h\}$ 覆盖 M^n, 这里和以后指标 $h, i, j, k, \cdots$ 的取值范围为 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 设 g_{ij}, ∇_j, K_{kjih}, K_{ji} 和 K 分别为 M 的基本度量张量、关于 Levi-Civita 联络的共变微分运算子、曲率张量, Ricci 张量和标量曲率.

设 $M^{2m}(m\geqslant2)$ 是 $2m$ 实维的 Kaehler 流形, 并且用一组坐标邻域 $\{V; \eta^\lambda\}$ 覆盖 M^{2m}, 这里和以后指标 $\nu, \mu, \lambda, \sigma, \cdots$ 的取值范围为 $\{1', 2', \cdots, (2m)'\}$. 设 $g_{\mu\nu}$, F_λ^σ, ∇_λ, $\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}$, $\widetilde{K}_{\mu\lambda}$ 和 $\widetilde{K}$ 分别为基本度量张量, 复结构张量, 关于由 $g_{\mu\lambda}$ 形成的 Christoffel 符号 $\left\{ {\sigma \atop \mu\lambda} \right\}$ 的共变微分运算子, 曲率张量, Ricci 张量和标量曲率.

假定 n 维黎曼流形 M^n 等长地浸入到 $2m$ 实维 Kaehler 流形 M^{2m} 并且把它记为 $\eta^\sigma=\eta^\sigma(\xi^h)$. 把 M^n 的 n 个线性无关切向量记为 $B_i^\lambda=\partial\eta^\lambda/\partial\xi^i$, 把 M^n 的 $2m-n$ 个互相正交的单位向量记为 C_y^λ, 这里和以后指标 x, y, z 的取值范围为 $\{n+1, n+2, \cdots, 2m\}$. 于是

本文 1979 年 12 月 6 日收到, 1980 年 4 月修改.

$$g_{ij}=g_{\mu\lambda}B_{ij}^{\mu\nu}, \tag{1}$$

这里 $B_{ij}^{\mu\nu}=B_i^\mu B_j^\nu$，把法丛中度量张量记为

$$g_{zy}=g_{\mu\lambda}C_{zy}^{\mu\nu}, \tag{2}$$

式中 $C_{zy}^{\mu\nu}=C_z^\mu C_y^\nu$.

M^{2m} 的子流形 M^n 的 Gauss, Codazzi 和 Ricci 方程为

$$\begin{aligned}
&K_{kjih}=\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}B_{kjih}^{\nu\mu\lambda\sigma}+H_{khx}H_{ji}^x-H_{jhx}H_{ki}^x,\\
&0=\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}B_{kji}^{\nu\mu\lambda}C_y^\sigma-(\nabla_k H_{jiy}-\nabla_j H_{kiy}),\\
&K_{kjyx}=\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}B_{kj}^{\nu\mu}C_{yx}^{\lambda\sigma}-(H_{ky}^t H_{tjx}-H_{jy}^t H_{tkx}),
\end{aligned} \tag{3}$$

式中 H_{ji}^x 是 M^n 关于法线 C_x 的第二基本张量.

假定 M^n 是全脐的，并取

$$H_{ji}^x=g_{ji}H^x, \tag{4}$$

式中 $H^x=(1/n)g^{ts}H_{ts}^x$，那末(3)式成为

$$\begin{aligned}
&K_{kjih}=\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}B_{kjih}^{\nu\mu\lambda\sigma}+H_xH^x(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki}),\\
&0=\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}B_{kji}^{\nu\mu\lambda}C_y^\sigma-g_{ji}\nabla_k H_y+g_{ki}\nabla_j H_y,\\
&K_{kjyx}=\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}B_{kj}^{\nu\mu}C_{yx}^{\lambda\sigma}.
\end{aligned} \tag{5}$$

M^{2m} 的 Bochner 曲率张量为

$$\begin{aligned}
B_{\nu\mu\lambda}^\sigma=&\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda}^\sigma+\delta_\nu^\sigma L_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\sigma L_{\nu\lambda}+L_\nu^\sigma g_{\mu\lambda}-L_\mu^\sigma g_{\nu\lambda}\\
&+F_\nu^\sigma L'_{\mu\lambda}-F_\mu^\sigma L'_{\nu\lambda}+F_{\mu\lambda}L'^\sigma_\nu-F_{\nu\lambda}L'^\sigma_\mu-2(F_{\nu\mu}L'^\sigma_\lambda+F_\lambda^\sigma L'_{\lambda\mu}),
\end{aligned} \tag{6}$$

式中

$$\begin{aligned}
&L_{\mu\lambda}=-\frac{1}{2(m+2)}\widetilde{K}_{\mu\lambda}+\frac{\widetilde{K}}{8(m+1)(m+2)}g_{\mu\lambda},\ L_\nu^\sigma=L_{\nu\alpha}g^{\alpha\sigma},\\
&L'_{\mu\lambda}=-L_{\mu\alpha}F_\lambda^\alpha,\ L'^\sigma_\mu=L'_{\mu\alpha}g^{\alpha\sigma}.
\end{aligned} \tag{7}$$

设

$$\begin{aligned}
&F_{\mu\nu}B_{ij}^{\mu\nu}=f_{ij},\ L_{\mu\nu}B_{ij}^{\mu\nu}=L_{ij},\ L'_{\mu\nu}B_{ij}^{\mu\nu}=m_{ij},\\
&F_{\mu\nu}B_i^\mu C_x^\nu=-f_{ix},\ L_{\mu\nu}B_i^\mu C_x^\nu=L_{ix},\ L'_{\mu\nu}B_i^\mu C_x^\nu=m_{ix},\\
&F_{\mu\nu}C_x^\mu C_y^\nu=f_{xy},\ L_{\mu\nu}C_x^\mu C_y^\nu=L_{xy},\ L'_{\mu\nu}C_x^\mu C_y^\nu=m_{xy}.
\end{aligned} \tag{8}$$

由于 $F_{\mu\nu}$ 是反称张量，所以

$$\begin{aligned}
&f_{ji}=-f_{ij},\ L_{ji}=L_{ij},\ m_{ji}=-m_{ij},\\
&f_{ix}=f_{xi},\ L_{ix}=L_{xi},\ m_{ix}=-m_{xi},\\
&f_{xy}=-f_{yx},\ L_{xy}=L_{yx},\ m_{xy}=-m_{yx}.
\end{aligned} \tag{9}$$

如果 Kaehler 流形 M^{2m} 的子流形 M^n 的切空间都被复结构 $F_{\mu\nu}$ 映射到法空间，那末子流形 M^n 称为全实的或称为反不变的，即

$$f_{ij}=0. \tag{10}$$

相似地，如果 Kaehler 流形 M^{2m} 的子流形 M^n 的切空间都被运算子 L' 映射到法空间，那末子流形 M^n 称为关于 L' 反不变子流形. 即

$$m_{ij}=0. \tag{11}$$

共形曲率张量为

$$C_{kji}^h=K_{kji}^h+\delta_k^h C_{ji}-\delta_j^h C_{ki}+g_{ji}C_k^h-g_{ki}C_j^h, \tag{12}$$

式中　$$C_{ji}=-\frac{1}{n-2}K_{ji}+\frac{1}{2(n-1)(n-2)}Kg_{ji},\ C^h_k=C_{kt}g^{th}. \tag{13}$$

如果 M^{2m} 是 Bochner-Kaehler 流形，并且 M^n 是全脐的，那末由(5)，(6)，(8)得到

$$K_{kjih}=H_xH^x(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki})-g_{kh}L_{ji}+g_{jh}L_{ki}-g_{ji}L_{kh}+g_{ki}L_{jh}$$
$$-f_{kh}m_{ji}+f_{jh}m_{ki}-f_{ji}m_{kh}+f_{ki}m_{jh}+2(f_{kj}m_{ih}+f_{ih}m_{kj}). \tag{14}$$

把上式用 g^{kh} 缩并，得到

$$K_{ji}=(n-1)g_{ji}H_xH^x-(n-2)L_{ji}-g_{ji}L^h_h+f^h_jm_{hi}+f_{hi}m^h_j+2(f_{hj}m^h_i+f^h_im_{hj}). \tag{15}$$

把上式用 g^{ji} 缩并，得到

$$K=n(n-1)H_xH^x-2(n-1)L^h_h+6f^h_im^i_h. \tag{16}$$

把(14)，(15)和(16)代入到(12)和(13)，得到

$$C_{kjih}=-f_{kh}m_{ji}+f_{jh}m_{ki}-f_{ji}m_{kh}+f_{ki}m_{jh}+2(f_{kj}m_{ih}+f_{ih}m_{kj})$$
$$-\frac{3}{n-2}[g_{kh}(f^s_jm_{si}+f^s_im_{sj})-g_{jh}(f^s_km_{si}+f^s_im_{sk})$$
$$+g_{ji}(f^s_km_{sh}+f^s_hm_{sk})-g_{ki}(f^s_jm_{sh}+f^s_hm_{sj})]$$
$$+\frac{6f^s_tm^t_s}{(n-1)(n-2)}(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki}). \tag{17}$$

如果子流形 M^n 是全实的，即如果 $f_{ij}=0$，那末

$$C_{kjih}=0, \tag{18}$$

这说明了 M^n 是共形平坦的．这是 Yano, K[2] 所证得的．但如果 $m_{ij}=0$，那末 M^n 也是共形平坦的．

现在我们来证明

定理 1　在 Bochner-Kaehler 流形 M^{2m} 中，全脐子流形 $M^n(n>3)$ 是共形平坦的充要条件是：子流形 M^n 或是全实子流形或是关于 L' 反不变子流形．

证　我们在 M^n 中选取一个局部正交系．于是从(17)和(18)有

$$-f_{kh}m_{ji}+f_{jh}m_{ki}-f_{ji}m_{kh}+f_{ki}m_{jh}+2(f_{kj}m_{ih}+f_{ih}m_{kj})=0\quad(k,\ j,\ i,\ h\neq) \tag{19}$$

$$-f_{kh}m_{hi}-f_{hi}m_{kh}+2(f_{kh}m_{ih}+f_{ih}m_{kh})+\frac{3}{n-2}g_{hh}(f^s_km_{si}+f^s_im_{sk})=0$$
$$(k,\ h,\ i\neq) \tag{20}$$

$$f_{kh}m_{hk}-\frac{1}{n-2}(g_{hh}f^s_km_{sk}+g_{kk}f^s_hm_{sh})+\frac{f^s_tm^t_s}{(n-1)(n-2)}g_{kk}g_{hh}=0\quad(k\neq h). \tag{21}$$

把(19)式中的 i 与 k 互换一下，得到

$$-f_{ih}m_{jk}+f_{jh}m_{ik}-f_{jk}m_{ih}+f_{ik}m_{jh}+2(f_{ij}m_{kh}+f_{kh}m_{ij})=0\quad(k,\ j,\ i,\ h\neq).$$

把上式与(19)式相加，得

$$f_{kh}m_{ij}+f_{ij}m_{kh}+f_{kj}m_{ih}+f_{ih}m_{kj}=0\quad(k,\ j,\ i,\ h\neq). \tag{22}$$

因为 $\frac{1}{g_{ii}}=g^{ii}$，(20)式可改写为

$$g^{hh}(f_{kh}m_{ih}+f_{ih}m_{kh})+\frac{1}{n-2}(f^s_km_{si}+f^s_im_{sk})=0\quad(k,\ h\neq),$$

把上式中的 h 与 j 互换，得

$$g^{jj}(f_{kj}m_{ij}+f_{ij}m_{kj})+\frac{1}{n-2}(f^s_km_{si}+f^s_im_{sk})=0\quad(k,\ j,\ i\neq).$$

把上二式相减,就有

$$g^{hh}f_{kh}m_{ih}+g^{hh}f_{ih}m_{kh}-g^{jj}f_{kj}m_{ij}-g^{jj}f_{ij}m_{kj}=0 \quad (k,\ j,\ i,\ h\neq). \tag{23}$$

把上式中的 k 与 h 互换,i 与 j 互换得

$$g^{kk}f_{hk}m_{jk}+g^{kk}f_{jk}m_{hk}-g^{ii}f_{hi}m_{ji}-g^{ii}f_{ji}m_{hi}=0 \quad (k,\ j,\ i,\ h\neq). \tag{24}$$

由(21)式得

$$g^{hh}g^{kk}f_{kh}m_{hk}-\frac{1}{n-2}\left(g^{kk}f_k^s m_{sk}+g^{hh}f_h^s m_{sh}\right)+\frac{f_t^s m_s^t}{(n-1)(n-2)}=0 \quad (k\neq h).$$

把上式的指标改写一下,就可得

$$g^{jj}g^{kk}f_{kj}m_{jk}-\frac{1}{n-2}\left(g^{kk}f_k^s m_{sk}+g^{jj}f_j^s m_{sj}\right)+\frac{f_t^s m_s^t}{(n-1)(n-2)}=0 \quad (k\neq j),$$

$$g^{jj}g^{ii}f_{ij}m_{ji}-\frac{1}{n-2}\left(g^{ii}f_i^s m_{si}+g^{jj}f_j^s m_{sj}\right)+\frac{f_t^s m_s^t}{(n-1)(n-2)}=0 \quad (i\neq j),$$

$$g^{hh}g^{ii}f_{ih}m_{hi}-\frac{1}{n-2}\left(g^{ii}f_i^s m_{si}+g^{hh}f_h^s m_{sh}\right)+\frac{f_t^s m_s^t}{(n-1)(n-2)}=0 \quad (h\neq i).$$

从这四个式子可得

$$g^{hh}g^{kk}f_{kh}m_{hk}+g^{jj}g^{ii}f_{ij}m_{ji}-g^{jj}g^{kk}f_{kj}m_{jk}-g^{hh}g^{ii}f_{ih}m_{hi}=0 \quad (k,\ j,\ i,\ h\neq). \tag{25}$$

(22), (23), (24), (25) 是关于 f_{kh}, f_{ij}, f_{kj}, f_{ih} 的齐次线性方程组, 如果它们有非零解, 那末

$$\begin{vmatrix} m_{ij} & m_{kh} & m_{ih} & m_{kj} \\ g^{hh}m_{ih} & g^{jj}m_{jk} & g^{jj}m_{ji} & g^{hh}m_{kh} \\ g^{kk}m_{kj} & g^{ii}m_{hi} & g^{kk}m_{kh} & g^{ii}m_{ji} \\ g^{hh}g^{kk}m_{hk} & g^{ii}g^{jj}m_{ji} & g^{jj}g^{kk}m_{kj} & g^{ii}g^{jj}m_{ih} \end{vmatrix}=0 \quad (k,\ j,\ i,\ h\neq).$$

为计算方便,令

$$\sqrt{g^{ii}g^{jj}}\,m_{ij}=A,\ \sqrt{g^{hh}g^{kk}}\,m_{kh}=B,\ \sqrt{g^{ii}g^{hh}}\,m_{ih}=C,\ \sqrt{g^{jj}g^{kk}}\,m_{kj}=D. \tag{26}$$

于是,上面的行列式变为

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ C & -D & -A & B \\ D & -C & B & -A \\ -B & -A & D & C \end{vmatrix}=0,$$

把行列式展开整理后得

$$(A^2+B^2+C^2+D^2)^2-4(AB-CD)^2=0,$$

即 $$A^2+B^2+C^2+D^2\pm 2(AB-CD)=0,$$

即 $$(A\pm B)^2+(C\mp D)^2=0.$$

于是就有

$$A\pm B+i(C\mp D)=0 \tag{27}$$

或

$$A\pm B-i(C\mp D)=0, \tag{28}$$

式中 $i=\sqrt{-1}$.

如果(27)式成立,我们把指标 i 与 k 互换,那末由(26)式知, A 与 D 互换, B 与 C 互

换. 这样(27)式就变为

$$D\pm C+i(B\mp A)=0,$$

把上式乘上 $\sqrt{-1}$, 并与(27)式相加, 就得到

$$A+iC=0,$$

把上式的指标 j 与 h 互换, 就有 A 与 C 互换, 上式就变为

$$C+iA=0,$$

由这二式就有

$$A=C=0.$$

如果(28)式成立, 也有这样的结果. 由此就得到

$$m_{ij}=0\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ i\neq j).\tag{29}$$

如果上式不成立, 那末 f_{ij} 为全零解, 即

$$f_{ij}=0\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ i\neq j),$$

于是定理 1 证毕.

由(7)式, 方程 $m_{ij}=0$ 等价于

$$\left(\frac{1}{2(m+2)}\widetilde{K}_{\mu\sigma}F_{\lambda}^{\sigma}-\frac{\widetilde{K}}{8(m+1)(m+2)}F_{\lambda\mu}\right)B_{ij}^{\lambda\mu}=0.$$

如果 M^n 的切向量 B_h^μ 是 M^{2m} 的 Ricci 主方向, 即

$$(\widetilde{K}_{\mu\sigma}-\rho_{(h)}g_{\mu\sigma})B_h^\sigma=0.$$

于是, 由(8)式就有

$$m_{ij}=\left(\frac{\rho_{(j)}}{2(m+2)}-\frac{\widetilde{K}}{8(m+1)(m+2)}\right)f_{ij}.$$

由这里可以看到 $\rho_{(j)}=\rho_{(i)}$, 把它记为 ρ, 因而如果 Ricci 主曲率 ρ 等于 $\frac{\widetilde{K}}{4(m+1)}$, 那末 $m_{ij}=0$, 但此时 f_{ij} 可以不是零, 因此, 我们得到

定理 2　设 M^n 是 Bochner-Kaehler 流形 M^{2m} 中的子流形. 如果 M^n 的每个切向量是 M^{2m} 的 Ricci 主方向, 并且 Ricci 主曲率 $\rho\neq\frac{\widetilde{K}}{4(m+1)}$, 那末关于 L' 的反不变子流形与全实子流形等价.

子流形 M^n 的 K_{kjyx} 为零时, 则称 M^n 的法联络为平坦的[4], 现在我们来证明

定理 3　设 M^n 是在非平坦的 Bochner-Kaehler 流形中的全脐子流形. 如果 M^n 的法联络是平坦的, 那末关于 L' 的反不变子流形与全实子流形等价.

证　我们在 M^n 中选取一个局部正交系 $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$. 由于 $B_{\nu\mu\lambda\sigma}=0$, $K_{kjyx}=0$, 从(5)和(8)式得到

$$f_{ky}m_{ji}-f_{jy}m_{ki}+f_{ji}m_{ky}-f_{ki}m_{jy}-2(f_{kj}m_{iy}+f_{iy}m_{kj})=0\quad(k,\ j,\ i\neq)\tag{30}$$

$$g_{jj}\nabla_k H_y+g_{jj}L_{ky}-3f_{jy}m_{kj}-3f_{kj}m_{jy}=0\quad(k\neq j),\tag{31}$$

$$f_{ky}m_{jx}-f_{jy}m_{kx}+f_{jx}m_{ky}-f_{kx}m_{jy}-2(f_{kj}m_{xy}+f_{xy}m_{kj})=0.\tag{32}$$

我们现在先假定 M^n 是关于 L' 的反不变子流形, 即

$$m_{ij}=0\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\tag{33}$$

那末(30)与(31)式变为

$$f_{ji}m_{ky}-f_{ki}m_{jy}-2f_{kj}m_{iy}=0\quad(k,\ j,\ i\neq),\tag{34}$$

$$\nabla_k H_y + L_{ky} - 3g^{jj} f_{kj} m_{jy} = 0 \quad (k \neq j). \tag{35}$$

把(34)式的 i 与 k 互换，就得到

$$f_{jk} m_{iy} - f_{ik} m_{jy} - 2 f_{ij} m_{ky} = 0 \quad (k,\ j,\ i \neq).$$

把上式与(34)式相加，就有

$$f_{ji} m_{ky} + f_{jk} m_{iy} = 0 \quad (k,\ j,\ i \neq).$$

把上式与(34)式相减，得

$$f_{ik} m_{jy} + f_{jk} m_{iy} = 0 \quad (k,\ j,\ i \neq). \tag{36}$$

把(35)式中的 j 改写为 i，得

$$\nabla_k H_y + L_{ky} - 3g^{ii} f_{ki} m_{iy} = 0.$$

把此式与(35)式相减，得

$$g^{ii} f_{ki} m_{iy} - g^{jj} f_{kj} m_{jy} = 0 \quad (k,\ j,\ i \neq). \tag{37}$$

(36)与(37)式是关于 f_{ik}, f_{jk} 的齐次线性方程组，如果 f_{ij} 有非零解，那末

$$\begin{vmatrix} m_{jy} & m_{iy} \\ -g^{ii} m_{iy} & g^{jj} m_{jy} \end{vmatrix} = 0 \quad (j \neq i),$$

即
$$g^{jj} m_{jy}^2 + g^{ii} m_{iy}^2 = 0 \quad (j \neq i),$$

即
$$\sqrt{g^{jj}}\, m_{jy} = \pm i \sqrt{g^{ii}}\, m_{iy} \quad (j \neq i).$$

把上式中的 i 与 j 互换后，就可以得到

$$m_{iy} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{38}$$

如果在(32)式中设 $f_{ij} \neq 0$，考虑到(33)与(38)式，就有

$$m_{xy} = 0 \quad (x,\ y = n+1,\ \cdots,\ 2m). \tag{39}$$

把(33)，(38)，(39)式综合起来，并由(8)式知

$$L'_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2m),$$

把此结果代入(6)式，就有

$$\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma} + g_{\nu\sigma} L_{\mu\lambda} - g_{\sigma\mu} L_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda} L_{\nu\sigma} - g_{\nu\lambda} L_{\mu\sigma} = 0.$$

由此，可以得到 $\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma} = 0$. 这说明了 M^{2m} 是平坦的，如果 M^{2m} 是非平坦的，那末 $f_{ij} = 0$. 类似地，可以证明，如果 $f_{ij} = 0$，那末 $m_{ij} = 0$，于是定理 3 证毕.

另一方面，如果 M^{2m} 是平坦的，那末 $m_{ij} = 0$ 就不一定与 $f_{ij} = 0$ 等价. 例如，我们来考虑 M^8，其基本形为

$$\varphi = (d\eta^1)^2 + (d\eta^2)^2 + (d\eta^3)^2 + \cdots + (d\eta^8)^2,$$

$$F_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

假定子流形 M^4 的方程为

$$\eta^i=\xi^i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4),\ \eta^x=\text{const.}\quad (x=5,\ 6,\ 7,\ 8).$$

设 δ_i^α 是 M^4 的单位切向量的分量，那末 $f_{12}=1,\ f_{34}=1$. 然而，因为 M^8 是平坦的，

$$\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}=\widetilde{K}_{\nu\mu}=\widetilde{K}=0,$$

就有

$$m_{ij}=0.$$

所以 $m_{ij}=0$ 不一定与 $f_{ij}=0$ 等价.

综合定理 1, 2, 3, 我们得到

定理 4　设 $M^n(n>3)$ 是在 Bochner-Kaehler 流形 M^{2m} 中的具有定理 2 或 3 的条件的全脐子流形. 那末 M^n 是共形平坦的充要条件是: M^n 是全实子流形.

设 $\widetilde{K}(u)$ 是在 Bochner-Kaehler 流形中由单位向量 u^α 及 $F_\lambda^\alpha u^\lambda$ 所确定的全纯截口曲率. 于是

$$\widetilde{K}(u)=\widetilde{K}_{\nu\mu\lambda\sigma}u^\nu F_\tau^\mu u^\tau F_\alpha^\lambda u^\alpha u^\sigma,$$

由(6)式及 $B_{\nu\mu\lambda\sigma}=0$, 就有

$$\widetilde{K}(u)=-8L_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta. \tag{40}$$

设 $\tilde{\rho}(u,\ v)$ 为由二个单位正交向量 u^α 和 v^α 所确定的 M^{2m} 的截口曲率. 如果 $u^\alpha,\ v^\alpha$ 都与子流形 M^n 相切，那末

$$\tilde{\rho}(u,\ v)=-L_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta-L_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta-6f_{uv}m_{uv}.$$

由(40)式，有

$$\tilde{\rho}(u,\ v)=\frac{1}{8}(\widetilde{K}(u)+\widetilde{K}(v))-6f_{uv}m_{uv}. \tag{41}$$

设 $\rho(u,\ v)$ 为由 M^n 的单位正交切向量 $u^\alpha,\ v^\alpha$ 所确定的 M^n 的截口曲率. 于是由 Gauss 方程(5)及(41)式得出

$$\rho(u,\ v)=\frac{1}{8}(\widetilde{K}(u)+\widetilde{K}(v))-6f_{uv}m_{uv}+H_xH^x.$$

设 $e_a^\alpha,\ e_x^\alpha(a=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ x=n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2m)$ 分别为 M^n 的 n 个单位正交的切向量及 $2m-n$ 个单位正交的法向量. 并由它们组成坐标框架. 于是 M^n 的切向量 B_i^α 为

$$B_i^\alpha=c_i^a e_a^\alpha,$$

由此，就可以得到

$$f_{ij}=c_i^a c_j^b f_{ab},\ m_{ij}=c_i^a c_j^b m_{ab}.$$

所以 $f_{uv}=0$(或 $m_{uv}=0$)就导致 $f_{ij}=0$(或 $m_{ij}=0$), 因此有

定理 5　设 M^n 是在 Bochner-Kaehler 流形 M^{2m} 中的全脐子流形. 如果 M^n 是全实子流形或是关于 L' 的反不变子流形，那末 M^n 的截口曲率为

$$\rho(u,\ v)=\frac{1}{8}(\widetilde{K}(u)+\widetilde{K}(v))+\sum_{x=n+1}^{2m}H^2(e_x), \tag{42}$$

式中 $H(e_x)=H_x$. 反之，如果 M^n 关于任何两个单位正交切向量 u^α 及 v^α 的截口曲率由(42)式给出，并且 M^n 满足定理 2 的条件，那末 M^n 是全实子流形.

此结果包含了 Houh[3] 的结果.

由于

$$L_j^j=g^{ji}L_{ji}=\sum_{j=1}^n L_{jj}=\sum_{j=1}^n L_{\alpha\beta}e_j^\alpha e_j^\beta=-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^n\widetilde{K}(e_j),$$

及(16)式得到

$$K=n(n-1)\sum_{x=n+1}^{2m}H^2(e_x)+\frac{n-1}{4}\sum_{j=1}^{n}\bar{K}(e_j)+6\sum_{i,j=1}^{n}f_{ij}m_{ij}.$$

于是就有

定理6 设 M^n 为在 Bochner-Kaehler 流形 M^{2m} 中的全脐子流形. 如果 M^n 是全实子流形或是关于 L' 的反不变子流形,那末 M^n 的标量曲率为

$$K=n(n-1)\Big[\sum_{x=n+1}^{2m}H^2(e_x)+\frac{1}{4}\bar{K}\Big],\quad \bar{K}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{K}(e_j).\tag{43}$$

反之,如果 M^n 满足定理2的条件,并且 M^n 的标量曲率为(43)式,那末 M^n 是全实子流形.

下面我们来研究非全实的关于 L' 反不变子流形的性质. 在非全实的子流形中著名的一类是复子流形,即子流形的切空间关于复结构映照 F 是不变的. 现在我们先讨论子流形不是复子流形的情况,然后再讨论子流形是复子流形的情况.

设 M^n 是在 Bochner-Kaehler 流形中的全脐,关于 L' 的反不变子流形. 且假设它不是全实子流形,也不是复子流形.

由(8)式可得

$$F^{\nu}_{\mu}B^{\mu}_{i}=f^{j}_{i}B^{\nu}_{j}-f^{x}_{i}C^{\nu}_{x},\tag{44}$$

$$F^{\nu}_{\mu}C^{\mu}_{y}=f^{j}_{y}B^{\nu}_{j}+f^{x}_{y}C^{\nu}_{x}.\tag{45}$$

把 F 作用到上二式,并再利用上二式,可得

$$f^{k}_{i}f^{l}_{k}-f^{x}_{i}f^{l}_{x}=-\delta^{l}_{i},\quad f^{k}_{i}f^{y}_{k}+f^{x}_{i}f^{y}_{x}=0,$$
$$f^{j}_{y}f^{k}_{j}+f^{x}_{y}f^{k}_{x}=0,\qquad f^{j}_{y}f^{x}_{j}-f^{z}_{y}f^{x}_{z}=\delta^{x}_{y}.\tag{46}$$

令(6)式中的 $B^{\sigma}_{\lambda\mu\lambda}$ 为零,求出 $\bar{K}^{\sigma}_{\nu\mu\lambda}$,并把它代入(5)式中的第二式,考虑到(11)式就有

$$g_{ji}\nabla_k H_y-g_{ki}\nabla_j H_y=g_{ki}L_{jy}-g_{ji}L_{ky}+f_{ki}m_{jy}-f_{ji}m_{ky}+2f_{kj}m_{iy}.$$

把上式关于 i, j 缩并,就得到

$$(n-1)\nabla_k H_y=(1-n)L_{ky}-3f^{i}_{k}m_{iy}.\tag{47}$$

由(7),(8),(45)式可得

$$m_{jy}=-f^{i}_{y}L_{ji}-f^{x}_{y}L_{jx},\tag{48}$$

$$m_{ij}=-f^{k}_{j}L_{ik}+f^{x}_{j}L_{ix}.\tag{49}$$

由(11)式,上式成为

$$f^{k}_{j}L_{ik}=f^{x}_{j}L_{ix}.\tag{50}$$

由于 M^n 不是全实,也不是复子流形,因而 f^{k}_{i}, f^{y}_{i} 不全为零,用 $f^{k}_{i}f^{iy}$ 乘(47)式的二边,并对 y 作和,利用(48),(49),(46),(50)式,就可以得到

$$(n-1)f^{k}_{i}f^{iy}\nabla_k H_y=(4-n)f^{k}_{i}f^{il}L_{kl},$$
$$(n-1)f^{l}_{i}f_{jl}f^{jk}f^{iy}\nabla_k H_y=(4-n)f^{l}_{i}f_{jl}f^{jk}f^{ih}L_{kh}.\tag{51}$$

用 $f^{k}_{p}f^{j}_{q}f^{qi}f^{ph}$ 乘(14)式的两边,并考虑到(11),(51)式,就得到

$$f^{k}_{p}f^{j}_{q}f^{qi}f^{ph}K_{kjih}=H_xH^x(f^{k}_{p}f^{p}_{k}f^{j}_{q}f^{q}_{j}-f^{j}_{q}f^{p}_{j}f^{k}_{p}f^{q}_{k})$$
$$+2\frac{n-1}{n-4}\nabla_k H_y(f^{j}_{q}f^{p}_{j}f^{k}_{p}f^{qy}-f^{j}_{q}f^{q}_{j}f^{k}_{i}f^{iy}).\tag{52}$$

因此,我们得到

定理 7　设 $M^n(n\neq 4)$是在 Bochner-Kaehler 流形中的全脐，关于 L' 反不变子流形，而且 M^n 不是全实也不是复子流形，那末 M^n 上的曲率张量 K_{kjih}、平均曲率张量 H^x 与复结构系数满足(52)式.

如果 M^n 是全测地子流形，那末(52)式的右边就化为零.

现在来考虑 M^n 是复子流形的情况，此时 $f_i^x=0$，(46)式变为

$$f_i^k f_k^l=-\delta_i^l,\quad f_y^z f_z^x=-\delta_y^x. \tag{53}$$

由(50)，(53)可得

$$L_{ih}=0.$$

根据(11)，(14)式，就有

$$K_{kjih}=H_x H^x(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki}).$$

所以，我们有

定理 8　设 M^n 是在 Bochner-Kaehler 流形 M^{2m} 中的全脐，关于 L' 的反不变子流形. 如果 M^n 是复子流形，那末 M^n 是常曲率子流形.

参　考　文　献

[1] Yano, K., Differential geometry of totally real submanifolds, Topics in differential geometry, *Academic Press. New York*, (1976), 173—184.

[2] Yano, K., Note on totally real submanifolds of a Kaehlerian manifold, *Tensor* [*N. S*], **30** (1976), 89—91.

[3] Houh, C. S., Totally real submanifolds in a Bochner-Kaehler manifold, *Tensor* [*N. S*], **32** (1978), 293—296.

[4] Yano, K., Kon, M.& Ishihara, I., Anti-invaariant submanifolds with flat normal connection, *J. Differential Geometry*, **13** (1978), 577—588.

ANTI-INVARIANT SUBMANIFOLDS IN A BOCHNER-KAEHLER MANIFOLD

HUANG CHENGCHAO
(*Fudan University*)

ABSTRACT

The Properties of submanifolds in a Bochner-Kaehler manifold have been studied mainly in the cases that the submanifolds are totally real by Yano, K., Houh, C. S. and others.

The main purpose of the present paper is to study whether the condition for the submanifold to be totolly real in their theorems is necessary, and to prove some theorems which are analogous to those mentioned above.

A submanifold M^n of Kaehlerian manifold M^{2m} is called totally real or anti-invariant, if each tangent space of M^n is mapped into the normal space by the complex structure $F_{\nu\mu}$ of M^{2m}. Similarly, a submanifold M^n of Kaehlerian manifold M^{2m} is called anti-invariant with respect to L', if each tangent space of M^n is mapped into the normal space by the operator L' of M^{2m}.

We obtain:

(1) A necessary and sufficient condition for a totally umbilical submanifold M^n, $n>3$, in a Bochner-Kaehler manifold M^{2m} to be conformally flat is that the submanifold M^n is either a totally real submanifold or an anti-invariant submanifold with respect to L'.

(2) Let M^n be the submanifold immersed in a Bochner-Kaehler manifold M^{2m}. If each tangent vector of M^n is Ricci principal direction and Ricci principal curvature ρ_h does not equal $\dfrac{\widetilde{K}}{4(m+1)}$, then the anti-invariant submanifold with respect to L' coincides with the totally real submanifold.

(3) Let M^n be a totally umbilical submanifold immersed in a Bochner-Kaehler manifold M^{2m}. If M^n is a totally real submanifold or an anti-invariant submanifold, then the sectional curvature of M^n is given by

$$\rho(u, v)=\frac{1}{8}(\widetilde{K}(u)+\widetilde{K}(v))+\sum_{x=n+1}^{2m} H^2(e_x), \tag{A}$$

where $H(e_x)=H_x$. Conversely, if the sectional curvature of M^n satisfying the condition mentioned in (2) is given by (A) for any two orthonormal tangent vectors u^α and v^α, then M^n is a totally real submanifold.