数学年刊
3 (2) 1982

关于压缩映象的一个未解决的问题及一个新的不动点定理

张石生
(四川大学)

§1. 引　言

设 (X, d) 是一完备度量空间，T 是映 X 到 X 的映象. 按照 Rhoades[1] 的说法，T 称为第(25)类的压缩映象，如果 T 满足下面的条件：对一切的 $x, y\in X$, $x\neq y$

$$d(Tx, Ty)<\max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

第 (25) 类压缩映象是较为广泛的一类映象，它包含了经典的 Banach 压缩映象，Kannan 压缩映象，Ciric 压缩映象等等为特例(见[1, 7—20]).

正如 Rhoades 在 [1, §3, §8] 中所指出的："关于第 (25) 类压缩映象是否存在不动点？以及在什么条件下存在不动点的问题至今没有解决". Rhoades 在同文中证明(见该文定理 2)，T 在 X 上的连续性及对某一 $x_0\in X$ 迭代序列 $\{T^n x_0\}$ 有一聚点是保证第(25)类压缩映象存在不动点必须附加的条件，但是即使附加了这样的条件，也不知该类映象是否存在不动点.

在本文中，我们较好地解决了这一问题. 在本文的 §2 中，我们得出了该类映象存在不动点的一些条件. 在 §3 中我们关于映象序列的公共不动点问题给出一新的不动点定理，它推广了文章[1, 2, 4, 5, 6, 7, 23] 中某些重要的结果.

§2. 第(25)类压缩映象的不动点定理

以后我们将用到 Meyers[21] 的下述结果：

引理 1[21] 设 (X, d) 是一完备的度量空间，T 是映 X 到 X 的连续映象，且满足下面的条件：

(i) T 有唯一的不动点 $x_*\in X$;

(ii) 对每一 $x\in X$，迭代序列 $\{T^n x\}$ 收敛于 x_*;

(iii) 存在 x_* 之一开邻域 U 有如下的性质：任给包含 x_* 之一开邻域 $V\subset X$，存在正整数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，$T^n(U)\subset V$.

则对任意实数 $c\in(0, 1)$ 存在与 d 拓朴等价的度量 d^*，对此度量 T 是具常数 c 的 Banach 压缩映象，即

本文 1979 年 12 月 7 日收到.

$$d^*(Tx, Ty) \leqslant cd^*(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

定理 1　设 (X, d) 是一完备的度量空间，设 T 是映 X 到 X 的连续紧致映象，则在与 d 拓朴等价的度量意义下，第(25)类映象与 Banach 压缩映象是等价的.

证　显然，如 T 是 Banach 压缩映象，则必是第(25)类映象.

现证在与 d 拓朴等价的度量意义下，连续紧致的第(25)类映象是 Banach 压缩映象.

事实上，因 T 是 X 到 X 的连续紧致的第(25)类映象，故存在一紧致子集 $Y \subset X$，使得 $T(X) \subset Y$，因而

$$Y \supset T(Y) \supset \cdots \supset T^n(Y) \supset \cdots.$$

令 $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(Y)$，显然 A 是 X 之一非空紧子集，而且 T 把 A 映成 A.

现证 A 只含唯一点. 设不然，A 不止包含一点，故 A 的直径 $\delta(A) > 0$. 因 A 是紧集，故存在 $x_1, x_2 \in A$，使得 $d(x_1, x_2) = \delta(A)$. 又因 T 把 A 映成 A，故存在 $y_1, y_2 \in A$，使得 $x_1 = Ty_1$，$x_2 = Ty_2$，于是

$$\delta(A) = d(x_1, x_2) = d(Ty_1, Ty_2) < \max\{d(y_1, y_2),$$
$$d(y_1, Ty_1), d(y_2, Ty_2), d(y_1, Ty_2), d(y_2, Ty_1)\} \leqslant \delta(A).$$

由上式得 $\delta(A) = d(x_1, x_2) = 0$，即 $x_1 = x_2$，矛盾. 这就证明了 A 是一元集，比如 $A = \{x_*\}$. 显然 x_* 是 T 的唯一不动点. 而且对任一 $x \in X$，$\{T^n x\}$ 收敛于 x_*.

为了验证引理 1 的条件被满足，我们取 $U = X$，并注意 $T^{n+1}(X) \subset T^n(Y)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，故知 $\delta(T^n(X)) \to 0$ $(n \to \infty)$，因而当 n 充分大时，$T^n(X)$ 可包含在含 x_* 的任一开邻域中. 故定理 1 的结论，由引理 1 得出.

仿定理 1，可证下面的定理成立：

定理 2　设 (X, d) 是一紧致的度量空间，设 T 是映 X 到 X 的连续映象，则在与 d 拓朴等价的度量意义下，第(25)类压缩映象与 Banach 压缩映象等价.

由定理 1 和定理 2 可得下面一个关于第(25)类压缩映象的不动点定理.

定理 3　设 (X, d) 是一完备的度量空间，设 T 是映 X 到 X 的连续的第 (25) 类映象，设下之一条件成立：

(i) T 是紧致映象；

(ii) (X, d) 是紧致空间.

则 (i) T 在 X 中存在唯一的不动点 x_*；

(ii) 对任一 $x_0 \in X$，迭代序列 $\{T^n x_0\}$ 都收敛于 x_*；

(iii) 对任一实数 $c \in (0, 1)$，存在一与 d 拓朴等价的度量 d^*，使得迭代序列 $\{T^n x_0\}$ 对此度量收敛于 x_* 有如下的速率估计

$$d^*(T^n x_0, x_*) \leqslant \frac{c^n}{1-c} d^*(Tx_0, x_0).$$

(iv) 存在包含 x_* 之一开邻域 U，对任一含包 x_* 的开邻域 $V \subset X$，存在正整数 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时有 $T^n(U) \subset V$.

证　在定理的条件下，在拓朴等价度量意义下，第 (25) 类映象等价于 Banach 压缩映象. 故定理 3 的结论，由熟知的 Banach 压缩映象原理得知.

为了得出第(25)类映象其他形式的不动点定理，我们先引出 Kuratowski 非紧性测度的概念(见[22])。

定义 1　设(X, d)是一度量空间，A是X的任一有界集，设$\gamma(A)=\inf\{\varepsilon>0: A$可以被有限个直径$\leqslant\varepsilon$的集合覆盖$\}$。则$\gamma(A)$称为集合$A$的非紧性测度。

定义 2　设T是映X到X的连续映象，T称为在X上是凝聚的，如果对X的任一有界的$\gamma(A)>0$的集A，有

$$\gamma(T(A))<\gamma(A).$$

由定义 2 显然可知，如果T是紧致映象，则T是凝聚的。同样，如果T是 Banach 压缩映象，则T也是凝聚的。

定理 4　设(X, d)是一完备的度量空间，T是映X到X的连续映象。设x_0是X中的某一点，使得轨道

$$O(x_0, T)=\{x_0, Tx_0, \cdots, T^n x_0, \cdots\}.$$

是有界的。再设对某一正整数m，T^m在上述轨道上是凝聚的，而且存在正整数p，使得对一切的$x, y\in X, x\neq y$

$$d(T^p x, T^p y)<\max\{d(x, y), d(x, T^p x), d(y, T^p y), d(x, T^p y), d(y, T^p x)\},$$

则T在轨道$O(x_0, T)$的闭包$\overline{O(x_0, T)}$中存在唯一不动点。

证　因T^m在$O(x_0, T)$上是凝聚的，故有

$$\gamma(T^m(O(x_0, T)))<\gamma(O(x_0, T)).$$

但因

$$O(x_0, T)=T^m(O(x_0, T))\cup\{T^k x_0: k=0, 1, \cdots, m-1\},$$

故

$$\begin{aligned}\gamma(O(x_0, T))&=\gamma(T^m(O(x_0, T))\cup\{T^k x_0: k=0, 1, \cdots, m-1\})\\&=\max\{\gamma(T^m(O(x_0, T))), \gamma(\{T^k x_0: k=0, 1, \cdots, m-1\})\}\\&=\gamma(T^m(O(x_0, T)))<\gamma(O(x_0, T)).\end{aligned}$$

因而推出$\gamma(O(x_0, T))=0$。即$\overline{O(x_0, T)}$是紧致集。令$S=T^p$，易证集合

$$A=\bigcap_{n=0}^{\infty}S^n(\overline{O(x_0, T)})$$

是X中的非空紧集，S把A映成A，且A只含一点，比如x_*，而且这一点就是S的唯一不动点。易证x_*就是T在X中的唯一不动点。　证毕。

在定理 4 中取$p=1$，即得关于第(25)类映象存在不动点的另一定理。

定理 5　设(X, d)是一完备的度量空间，T是映X到X的第(25)类的连续的映象，如对某一正整数m和对某一$x_0\in X$，T^m在有界轨道$O(x_0, T)$上是凝聚的，则T在$\overline{O(x_0, T)}$中存在唯一的不动点。

§3. 关于映象序列的公共不动点

本节我们设函数$\mathscr{A}(t)$满足下面的条件$(\mathscr{A}_1)$，$(\mathscr{A}_2)$或$(\mathscr{A}_3)$；

$(\mathscr{A}_1)$　$\mathscr{A}(t)$是映$[0, \infty)\to[0, \infty)$的不减的右连续函数。

$(\mathscr{A}_2)$　对任一实数$q\in[0, \infty)$，方程

$$t=\mathscr{A}(t)+q,\ t\geqslant 0. \tag{*}$$

满足条件 $\mu(0)=0$ 的最大解 $\mu(q)\in[0,\infty)$ 存在.

($\mathscr{A}_3$) 对每一 $t>0$, $\mathscr{A}(t)<t$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\mathscr{A}(t))=\infty$.

我们可以证明下面的二引理的结论成立:

引理 2 设 $\mathscr{A}(t)$ 满足条件($\mathscr{A}_1$)且对每一 $t>0$, $\mathscr{A}(t)<t$, 则

(i) 对每一 $t>0$, $\mathscr{A}^n(t)\to 0(n\to\infty)$, 这里 $\mathscr{A}^n(t)$ 表 $\mathscr{A}(t)$ 的第 n 次迭代函数;

(ii) 对任一满足 $t_{n+1}\leqslant\mathscr{A}(t_n)$, $n=1, 2, \cdots$ 的非负实数序列 $\{t_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$.

引理 3 设 $\mathscr{A}(t)$ 满足条件($\mathscr{A}_1$), ($\mathscr{A}_2$), 则对任给的数 $q\in[0,\infty)$, 设 $\mu(q)$ 是方程(*)的最大解, 于是由

$$p\leqslant\mathscr{A}(p)+q\quad(p\in[0,\infty)).$$

可推出 $p\leqslant\mu(q)$.

定理 6 设函数 $\mathscr{A}(t)$ 满足条件($\mathscr{A}_1$), ($\mathscr{A}_2$)或满足条件($\mathscr{A}_1$), ($\mathscr{A}_3$). 设 (X, d) 是完备度量空间, $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是映 X 到 X 的映象序列. 设存在定义于 X 上, 而取值于正整数集 N 的函数序列 $\{m_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $m_i(x)\mid m_i(T_ix)$, 使得对任意的 $i, j\in N$, 有

$$\begin{aligned}&d(T_i^{m_i(x)}(x), T_j^{m_j(y)}(y))\leqslant\mathscr{A}(\max\{d(x, y), y(x, T_i^{m_i(x)}(x)),\\&d(y, T_j^{m_j(y)}(y)), d(x, T_j^{m_j(y)}(y)), d(y, T_i^{m_i(x)}(x))\}),\ \forall x, y\in X,\end{aligned}$$

则 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 X 中存在唯一的公共不动点 x_*, 且对任一 $x_0\in X$, 下之序列收敛于 x_*

$$x_n=T_n^{m_n(x_{n-1})}(x_{n-1}),\ n=1, 2, \cdots. \tag{1}$$

证 先证序列(1)是 X 中的 Cauchy 序列. 事实上对任意的正整数 i, j

$$\begin{aligned}d(x_i, x_j)&=d(T_i^{m_i(x_{i-1})}(x_{i-1}), T_j^{m_j(x_{j-1})}(x_{j-1}))\\&\leqslant\mathscr{A}(\max\{d(x_{i-1}, x_{j-1}), d(x_{i-1}, x_i), d(x_{j-1}, x_j), d(x_{i-1}, x_j), d(x_{j-1}, x_i)\}).\end{aligned}$$

故对任意的正整数 m, $i, j\geqslant m$,

$$\sup_{i,j\geqslant m}d(x_i, x_j)\leqslant\mathscr{A}(\sup_{i,j\geqslant m-1}d(x_i, x_j)). \tag{2}$$

另因

$$\sup_{i,j\geqslant m-1}d(x_i, x_j)\leqslant d(x_{m-1}, x_m)+\mathscr{A}(\sup_{i,j\geqslant m-1}d(x_i, x_j)). \tag{3}$$

现于(3)中取 $m=1$, 得

$$\sup_{i,j\geqslant 0}d(x_i, x_j)\leqslant d(x_0, x_1)+\mathscr{A}(\sup_{i,j\geqslant 0}d(x_i, x_j)). \tag{4}$$

下分两种情形讨论: 先设 $\mathscr{A}(t)$ 满足条件($\mathscr{A}_1$)和($\mathscr{A}_2$), 并设 $\mu(d(x_0, x_1))\overset{\text{def}}{=\!=}v_0$ 是方程

$$t=\mathscr{A}(t)+d(x_0, x_1) \tag{5}$$

在$[0,\infty)$中的最大解. 于是由引理 3 和(4)式得

$$\sup_{i,j\geqslant 0}d(x_i, x_j)\leqslant\mu(d(x_0, x_1))=v_0<\infty. \tag{6}$$

又于(2)中取 $m=1$, 并注意(6)得

$$\sup_{i,j\geqslant 1}d(x_i, x_j)\leqslant\mathscr{A}(\sup_{i,j\geqslant 0}d(x_i, x_j))\leqslant\mathscr{A}(v_0)\overset{\text{def.}}{=\!=}v_1,$$

依次递推得

$$\sup_{i,j\geqslant m}d(x_i, x_j)\leqslant\mathscr{A}(\sup_{i,j\geqslant m-1}d(x_i, x_j))\leqslant\mathscr{A}(v_{m-1})\overset{\text{def.}}{=\!=}v_m,\ m=1, 2, \cdots.$$

由 v_m 的定义，显然

$$v_1 \overset{\text{def}}{=\!=} \mathscr{A}(v_0) \leqslant \mathscr{A}(v_0) + d(x_0, x_1) = v_0,$$

$$v_2 \overset{\text{def}}{=\!=} \mathscr{A}(v_1) \leqslant \mathscr{A}(v_0) = v_1 \leqslant v_0.$$

依次可得

$$v_m \overset{\text{def}}{=\!=} \mathscr{A}(v_{m-1}) \leqslant \mathscr{A}(v_{m-2}) = v_{m-1}, \quad m=1, 2, \cdots. \tag{7}$$

于是由 $\mathscr{A}(t)$ 的右连续性得

$$\lim_{m\to\infty} v_m = \mathscr{A}(\lim_{m\to\infty} v_{m-1}) \leqslant \lim_{m\to\infty} v_{m-1}. \tag{8}$$

令 $t_0 = \lim\limits_{m\to\infty} v_m$，由(8)得 $t_0 = \mathscr{A}(t_0)$，故由引理3和条件($\mathscr{A}_2$)得 $t_0=0$，因而

$$0 \leqslant \lim_{m\to\infty} \sup_{i,j\geqslant m} d(x_i, x_j) \leqslant \lim_{m\to\infty} v_m = 0. \tag{9}$$

上式表明 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列.

如果 $\mathscr{A}(t)$ 满足条件 ($\mathscr{A}_1$) 和 ($\mathscr{A}_3$) 我们也可证 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 由 X 的完备性，设 $x_n \to x_* \in X$.

现证对任一正整数 i $(i=1, 2, \cdots)$，x_* 是 T_i 的周期点，即

$$T_i^{m_i(x_*)}(x_*) = x_*, \quad i=1, 2, \cdots.$$

事实上，因 $x_n \to x_*$，故对任给的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$d(x_{n-1}, x_*) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(x_{n-1}, x_n) < \varepsilon.$$

于是当 $n > n_0$ 时有

$$\begin{aligned}
d(x_n, T_i^{m_i(x_*)}(x_*)) &= d(T_n^{m_n(x_{n-1})}(x_{n-1}), T_i^{m_i(x_*)}(x_*)) \\
&\leqslant \mathscr{A}(\max\{d(x_{n-1}, x_*), d(x_{n-1}, x_n), d(x_*, T_i^{m_i(x_*)}(x_*)), \\
&\quad d(x_{n-1}, T_i^{m_i(x_*)}(x_*)), d(x_*, x_n)\}) \\
&\leqslant \mathscr{A}\left(\max\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon, d(x_*, T_i^{m_i(x_*)}(x_*)), \frac{\varepsilon}{2} + d(x_*, T_i^{m_i(x_*)}(x_*)), \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&\leqslant \mathscr{A}(\varepsilon + d(x_*, T_i^{m_i(x_*)}(x_*))).
\end{aligned}$$

于是上式左端让 $n\to\infty$，然后上式右端让 $\varepsilon\to 0$，并注意 $\mathscr{A}$ 的右连续性得

$$d(x_*, T_i^{m_i(x_*)}(x_*)) \leqslant \mathscr{A}(d(x_*, T_i^{m_i(x_*)}(x_*))).$$

于是由引理2和条件($\mathscr{A}_3$)(或由引理3及条件($\mathscr{A}_2$))得

$$x_* = T_i^{m_i(x_*)}(x_*), \quad i=1, 2, \cdots.$$

易证 x_* 是 T_i，$i=1, 2, \cdots$ 的唯一周期点. 另因

$$T_i x_* = T_i T_i^{m_i(x^*)}(x_*) = T_i^{m_i(T_i x_*)}(T_i x_*), \quad i=1, 2, \cdots,$$

即 $T_i x_*$ 是 T_i 的另一周期点. 由已证的 x_* 是 T_i 的唯一周期点，故得 $T_i x_* = x_*$，$i=1,2,\cdots$，因而 x_* 是 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的唯一的公共不动点.　　证毕.

参 考 文 献

[1] Rhoades, B. E., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **226** (1977), 257—290.

注　取 $\mathscr{A}(t)=kt$，其中 $k\in(0, 1)$，则它满足条件 ($\mathscr{A}_1$)，($\mathscr{A}_2$)，($\mathscr{A}_3$). 于是由定理 6 即得 Rhoades[1] 的定理 23, Ciric[7] 的定理 1，定理 2，Barada，Rhoades[2] 的定理 1，定理 2，Cheh-Chih Yen[5] 的定理 1. 另外定理 6 在某种意义上也是 Kwapisz[3] 中结果的改进.

[2] Barada, K. R., Rhoades, B. E., *Pacific J. Math.*, **71**: 2(1977), 517—520.
[3] Kwapisz, M., *Nonlinear Analysis*, **3**: 3(1979), 293—302.
[4] Matkowski, J., *Amer. Math. Soc.*, **62**: 2(1977), 344—348
[5] Chen-Chih Yen, *Math. Japonica*, **23**: 1(1978), 27—31.
[6] Murakami, H., Cheh-Chih Yen, *Math, Japonica*, **23**: 1(1978), 77—83.
[7] Ciric, B., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **45**: 2(1974), 267—273.
[8] Rakotch, E., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13(1962), 459—645.
[9] Edelstein, M., *J. London Math. Soc.*, **37**(1962), 74—79.
[10] Kannan, R., *Amer. Math. Monthy*, **76**(1969), 405—408.
[11] Bianchini, R. M. T., *Boll. Uni. Mat. Ital.*, **5**(1972), 103—108.
[12] Reich, S., *Canad. Math. Bull.*, **14**(1971), 121—124.
[13] Reich, S., *Boll. Uni. Mat. Ital.*, **4**: 4 (1971), 1—11.
[14] Roux, D., and Socrdi, P., *Atti Accad. Naz. Lincei Rend cl Sci. Fix. Mat. Natur.*, **52**: 8 (1972), 682—688.
[15] Sehgal, V. M., *J. London Math. Soc.*, **5**: 2(1972), 571—576.
[16] Chatterjea, S. K., *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **25**(1972), 727—730.
[17] Hardy, G. E., and Rogers, T. D., *Canad. Math. Bull.*, **16**(1973), 201—206.
[18] Zamfirescu, T., *Arch. Math.* (Basel), **23** (1972), 292—298.
[19] Massa, S., *Boll. Uni. Math. Ital.*, (4)**7**(1973), 151—155.
[20] Ciric, L. B., *Publ. Inst. Math.*, (Beograd) (N. S), **12**: 26(1971), 19—26.
[21] Meyers, P. R., *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect.*, B**71**B(1967), 73—76.
[22] Kuratowski, K., "Topologie"Monografie Matematyczne, Tom 20, Warszawa, (1958).
[23] Singh, S. P., Meade, B. A., *Bull. Austral. Math. Soc.*, **16**(1977), 49—53.
[24] Janos, L., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **61**: 1(1976), 171—175.

ON AN OPEN QUESTION AND A FIXED POINT THEOREM FOR A CLASS OF CONTRACTIVE MAPPINGS

ZHANG SHISHENG
(*Sichuan University*)

ABSTRACT

Let X be a complete metric space with distance function d, and T a mapping from X into X. T is said to be a contractive mapping (25), if it satisfies the following condition

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \forall x, y \in X.$$

The contractive mapping (25) is a very important kind of mapping which contains a series of contractive mappings as its special cases (cf. [7—20]).

Rhoades [1] pointed out, "Mapping (25) does not have so far any fixed point theorem." So he asked, "What additional hypotheses on T or X are needed in (25) to guarantee the existence of a fixed point?"

In this paper we present several fixed point theorems for mapping (25) and give the answer to this open question. In § 3 we present a common fixed point theorem for a sequence of contractive mappings.