数 学 年 刊
3 (2) 1982

$L^p(p\geqslant 2)$ 空间上的Gauss测度

张 荫 南
(复旦大学)

在[1]中我们研究了实的可分的Banach空间E上的Gauss测度的分解. 我们定义

$$\mathscr{F}(e_n; E)=\{(x_n):(x_n)\in E,\ \Sigma e_n(\omega)x_n \text{ a. s 收敛}\}$$

这里$e_n(\omega)$是独立的随机变量, 它们的分布是$N(0, 1)$. 同样可定义$\mathscr{F}(\epsilon_n; E)$, $\{\epsilon_n\}$是独立的Rademacher序列, $P\{\epsilon_n=+1\}=P\{\epsilon_n=-1\}=1/2$. 当$E$是自反的type-2空间时, 本文给出了$(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; E)$的充要条件, 和$E=L^p(S, \mathscr{F}, \mu)$, $p\geqslant 2$, μ是σ-有限测度时, $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; L^p)$的充要条件. 本文用的记号与[1]相同.

定理1 设E是一个实的可分的type-2 Banach空间,则$\mathscr{F}(e_n; E)=\mathscr{F}(\epsilon_n; E)$.

证 由[2]知$\mathscr{F}(e_n; E)\subset\mathscr{F}(\epsilon_n; E)$. 另外,若$(x_n)\in\mathscr{F}(\epsilon_n; E)$记$s(\omega)=\Sigma\epsilon_n(\omega)x_n$, 这个级数是a. s收敛的,从[1]知

$$\sup_n\|x_n\|<\infty.$$

记$N(\omega)=\sup\limits_n\|\epsilon_n(\omega)x_n\|\leqslant\sup\limits_n\|x_n\|<\infty$, $\varphi(t)=t^2$, 于是

$$E(\varphi(N))=E(N(\omega)^2)<\infty.$$

从[2]知$E(\|s(\omega)\|^2)<\infty$.记$\mu$是$s(\omega)$在$E$上的几率分布,则$\mu$是对称分布,$\int\|x\|^2\mu(dx)<\infty$. 由于$E$是type-2空间,故从[2]知,存在$E$上的一个Gauss测度$\nu$, 使

$$\int|\langle z, y\rangle|^2\mu(dy)=\sum_n|\langle z, x_n\rangle|^2=\int|\langle z, y\rangle|^2\nu(dy).$$

作$s_n(\omega)=\sum\limits_1^n e_j(\omega)x_j$,则

$$E(\exp(i\langle z, s_n\rangle))\longrightarrow\int e^{i\langle z,y\rangle}\nu(dy).$$

从[2]知$\Sigma e_n(\omega)x_n$是a. s收敛的,即$\mathscr{F}(\epsilon_n; E)\subset\mathscr{F}(e_n; E)$.

定理2 设E是一个实的可分的Banach空间, 则$(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; E)$的必要条件是, 存在常数$K>0$, 对$\forall z_1, z_2, \cdots, z_n\in E^*$成立

$$\sum_{j=1}^n\sum_{m=1}^\infty|\langle z_j, x_m\rangle|^2\leqslant K\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in E}}\sum_{j=1}^n|\langle z_j, x\rangle|^2.$$

当E是自反的type-2空间时,这个条件也是充分的.

证 若$(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; E)$,记$s(\omega)=\Sigma e_n(\omega)x_n$在$E$上导出的Gauss测度为$\nu$, 由[2]

本文1979年12月20日收到,1981年5月15日修改.

知 $\int \|x^2\| \nu(dx) < \infty$. 但是

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle z_j,\ x_m\rangle|^2=\sum_{j=1}^{n}\int\langle z_j,\ x\rangle^2\nu(dx)=\sum_{j=1}^{n}\int\langle z_j,\ x/\|x\|\rangle^2\|x\|^2\nu(dx),$$

取 $K=\int\|x\|^2\nu(dx)$, 则证得所求之结论.

现在 T 是自反的 type-2 空间的假设下证明这个条件是充分的. 若存在常数 $K>0$, 对 $\forall z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n \in E^*$ 成立

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle z_j,\ x_m\rangle|^2 \leqslant K \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in E}}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\langle z_j,\ x\rangle|^2\Big).$$

由于 E 是一个自反的 Banach 空间, 从[3]中关于 2-可和的算子的 Pietch 定理知, 在 E 的单位球 $s_1(E)$ 上存在一个几率测度 λ 和正数 r, 使

$$\sum_m|\langle z,\ x_m\rangle|^2\leqslant r\int_{S_1(E)}|\langle z,\ x\rangle|^2\lambda(dx).$$

在这里我们是研究了从 $E^*\to l_2$ 的映照 T, $T: y\to(\langle y,\ x_m\rangle)$, $\forall y\in E^*$, 由假设知它是 2-可和算子, 从[3]中的 p. 232 上的 Pietch 定理知上式成立. 记

$$\lambda_1(A)=\frac{1}{2}(\lambda(A)+\lambda(-A)),\ \forall A\in B(E),$$

则依然成立

$$\sum_m|\langle z,\ x_m\rangle|^2\leqslant r\int_{S_1(E)}|\langle z,\ x\rangle|^2\lambda_1(dx),$$

此时 λ_1 是一个对称测度, $\int\|x\|^2\lambda_1(dx)<\infty$. 从 E 是 type-2 空间知, 存在 E 上的 Gauss 测度 ν, 使

$$\sum_m|\langle z;\ x_m\rangle|^2\leqslant r\int|\langle z,\ x\rangle|^2\nu(dx).$$

从[1]知, 一定在 E 中存在一个闭子空间 E_0, $\nu(E_0)=1$ 和 E_0 中的一个稠密子空间 H, H 上有内积 [,], 使 H 成为一个 Hilbert 空间, 记 i 是 $H\to E_0$ 的嵌入算子, 则 $(i,\ H,\ E_0)$ 成为一个抽象 Wiener 空间, ν 即是 H 上的由 [,] 定义的 Gauss 柱测度在 E_0 上的扩张. 记 H 按 [,] 的完备就范正交系为 $\{\alpha_n\}$, 则由 [1] 知 $(\alpha_n)\in\mathscr{F}(e_n,\ E)$. 从上面的不等式知, 必有 $H\to H$ 按 [,] 有界的正算子 A, 使

$$\sum_m|\langle z,\ x_m\rangle|^2=[Az,\ z],\quad \forall z\in E^*\subset H.$$

在 $[Az,\ z]$ 中是将 E^* 中的 z, 用等式 $\langle z,\ y\rangle=[z,\ y]$, $\forall y\in H$ 自然嵌入 H 中. 由于在实的 Hilbert 空间中正算子具有平方根, 故 $A=A_1^2$, A_1 是 $H\to H$ 按 [,] 有界的算子. 那么

$$\sum_m|\langle z,\ x_m\rangle|^2=[A_1z,\ A_1z]=\Sigma|[A_1z,\ \alpha_n]|^2=\Sigma[z,\ A_1\alpha_n]^2.$$

所以

$$\sum_m|\langle z,\ x_m\rangle|^2=\Sigma|\langle z,\ A_1\alpha_n\rangle|^2.$$

从[4]知, 在 H 上定义范数 $|y|=\|A_1y\|$, $\forall y\in H$, 是一个在 L. Gross 意义下关于 [,] 可测的范数, 从 [1] 知 $(\alpha_n)\in\mathscr{F}(e_n;\ E')$, 这里 E' 是 H 按 $1\cdot1$ 完备化的结果. 从而

$$\Big|\sum_{n}^{n+r}e_j(\omega)\alpha_j\Big|=\Big\|\sum_{n}^{n+r}e_j(\omega)A_1\alpha_j\Big\|\xrightarrow[\text{a. s}]{}0,\ n\to\infty.$$

因此 $(A_1\alpha_n)\in\mathscr{F}(e_n;\ E)$.

$$\sum_m |\langle z, x_m\rangle|^2=\sum_n |\langle z, A_1\alpha_n\rangle|^2.$$

记 ν_1 是由 $(A_1\alpha_n)$ 产生的 Gauss 测度，用定理 1 证明的同样方法知 $\Sigma e_n(\omega)x_n$ a、s 收敛. 即 $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; E)$.

设 $(S, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个 σ-有限的测度空间，当 $p\geqslant 2$ 时，$L^p(S, \mathscr{F}, \mu)$ 是一个 type-2 空间(见[2])，而且是自反的 Banach 空间，我们将应用定理 1, 2 求出 L^p 上的 $\mathscr{F}(e_n; E)$.

定理 3　设 $(x_n(t))\subset L^p(p\geqslant 2)$，则 $(x_n(e))\in\mathscr{F}(e_n; L^p)$ 的充要条件是

$$\int\Big(\sum_m |x_m(t)|^2\Big)^{p/2}\mu(dt)<\infty.$$

证　由于 $L^p(S, \mathscr{F}, \mu)(p\geqslant 2)$ 是 type-2 空间，从定理 1 知道，

$$\mathscr{F}(e_n; L^p)=\mathscr{F}(\epsilon_n; L^p),\quad p\geqslant 2.$$

从[3]中的 Khinchine A. 不等式知道，存在常数 $k_1>0$, $k_2>0$, 对于 $\forall n\geqslant 1$, 和 $\mathbf{R}^n$ 中的任何向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 成立

$$k_2\Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\Big)^{p/2}\leqslant E\Big(\Big|\sum_{i=1}^n \epsilon_i(\omega)x_i\Big|^p\Big)\leqslant k_1\Big(\sum_{i=1}^n |x_k|^2\Big)^{p/2},$$

这里 $\{\epsilon_j(\omega), j\geqslant 1\}$ 是 Rademacher 随机变量序列.

设 $\{x_n(t), n\geqslant 1\}\subset L^p(S, \mathscr{F}, \mu)$. 则成立不等式，

$$k_2\int_S\Big(\sum_{n+1}^{n+r}|x_j(t)|^2\Big)^{p/2}d\mu\leqslant E\Big(\Big\|\sum_{n+1}^{n+r}\epsilon_j(\omega)x_j\Big\|^p\Big)$$
$$\leqslant k_1\int\Big(\sum_{n+1}^{n+r}|x_j(t)|^2\Big)^{p/2}d\mu,\quad \forall n\geqslant 1,\ r\geqslant 1.$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示 L^p 中的范数.

从[2]知道，当 $\{x_n, n\geqslant 1\}\in\mathscr{F}(\epsilon_n; L^p)$ 时，

$$E\Big(\Big\|\sum_1^\infty \epsilon_j(\omega)x_j\Big\|^p\Big)<\infty,$$

即 $\int_S\Big(\sum_1^\infty|x_j(t)|^2\Big)^{\frac{p}{2}}d\mu<\infty$. 故定理的必要性是成立的. 另外，当 $\int_S\Big(\sum_1^\infty|x_j(t)|^2\Big)^{\frac{p}{2}}d\mu<\infty$ 时，利用 Lebesque 控制收敛定理知道，

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ r\to\infty}}E\Big(\Big\|\sum_{n+1}^{n+r}\epsilon_j(\omega)x_j\Big\|^p\Big)=0.$$

因此，$\sum_1^\infty \epsilon_j(\omega)x_j$ 是度量收敛的，从[2]知道 $\sum_1^\infty \epsilon_j(\omega)x_j$ 也是 a. s 收敛的，利用定理 1，我们知道 $\{x_n, n\geqslant 1\}\in\mathscr{F}(e_n; L^p)$.　　证毕.

推论 1　若 $E=l_p$, $p\geqslant 2$. $(x_n)\subset E$, 则 $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; l_p)$ 的充要条件是,

$$\sum_{j=1}^\infty\Big(\sum_{m=1}^\infty |x_m^{(j)}|^2\Big)^{p/2}<\infty.$$

这里 $x_m=(x_m^{(j)})$.

推论 2　若 E_0 是 $L^p(p\geqslant 2)$ 的一个线性子空间，则存在 L^p 上的一个几率测度 ν 关于 E_0 拟不变的充要条件是存在 $(x_m)\subset L^p$, $\int\big(\sum_m|x_m(t)|^2\big)^{p/2}\mu(dt)<\infty$, 使

$$E_0\subset\{x: x=\Sigma\lambda_n x_n(t),\ \forall(\lambda_n)\in l_2\}.$$

推论 3 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个基本空间，$\{X(\omega, t), t\geqslant 0\}$ 是它上面的一个 Gauss 过程，具有性质：$\int |X(\omega, t)|^p \lambda(dt) < \infty$. 对于几乎一切 $\omega\in\Omega$ 成立，这里 $\lambda(dt)$ 是 $[0, \infty)$ 上的一个 σ-有限测度，$p\geqslant 2$. 而且，对 $\forall g(t)\in (L^p)^*$, $\int_\Omega\int_{[0,\infty)} X(\omega, t)\, g(t)\, \lambda(dt) P(d\omega) = 0$, 则必有一列 $(x_m(e))\in L^p([0, \infty), \lambda)$

$$\int_0^{+\infty} (\Sigma |x_m(t)|^2)^{p/2} \lambda(dt) < \infty$$

使得对于任意的 $g(t)\in (L^p)^*$, 成立

$$\int_0^{+\infty} X(\omega, t) g(t) \lambda(dt) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(\omega) \int x_n(t) g(t) \lambda(dt),$$

这里 $e_n(\omega)$ 是相互独立的 $N(0, 1)$ 的正态变量.

参 考 文 献

[1] 张荫南，关于拟不变测度存在的充要条件，数学年刊，**2**: 2(1981), 217—224.

[2] Jain, N. C., *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag, N. Y., **526** (1976), 113—130.

[3] Pietsch, A., Operator Ideals, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, (1978).

[4] KUO, H. H., Gaussian measures in Banach spaces, *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag, N. Y., **463** (1975).

GAUSSIAN MEASURES IN L^p ($P\geqslant 2$) SPACES

ZHANG YINGNAN

(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this note we prove that if $(S, \mathscr{F}, \mu)$ is an σ-finite measure space and $(x_n(t))$ is sequence of $L^p(S, \mathscr{F}, \mu)$, $p\geqslant 2$, then the following are equivalent:

a) $\Sigma e_n(\omega) x_n(t)$ converges a. s., where $e_n(\omega)$ are independent identically distributed symmetric stable random variables of index 2, i. e.,

$$E(\exp(ite_n(\omega))) = \exp(-t^2/2)$$

for all t real.

b) $\int_S (\sum_n |x_n(t)|^2)^{p/2} \mu(dt) < \infty$.