数 学 年 刊
3 (2) 1982

对数容量与解析函数列之间的一条定理

莫 国 端
(上海闸北区教师进修学院)

设 E 为复平面上的有界闭集. 以 CE 表示 E 的余集. 以 G_E^∞ 表示 CE 中包含 $Z=\infty$ 的那个区域. 以 $g_E(Z, \infty)$ 表示 G_E^∞ 内的 Green 函数. 以 $\gamma=\gamma(E)$ 表示 E 上的 Robin 常数, 即当 $g_E(Z, \infty)$ 不存在时, $\gamma=\infty$, 而当 $g_E(Z, \infty)$ 存在时,

$$\gamma=\lim_{Z\to\infty}[g_E(Z, \infty)-\log|Z|].$$

以 $d(E)=e^{-\gamma(E)}$ 表示 E 的对数容量(又称超限直径或 Чебышев 常数, 见 [1], VII). 如果 A 是任意的有界集合, 则定义

$$d(A)=\sup_{E\in A} d(E)$$

为 A 的对数容量. 显然, 如果 $A_1\subset A_2$, 则 $d(A_1)\leqslant d(A_2)$.

设 D 为有界开集, 以 $\overline{D}^0$ 表示 $\overline{D}$ 的内核($\overline{D}$ 的内点集), 显然, $D\subset\overline{D}^0$, $d(D)\leqslant d(\overline{D}^0)$. 下例表明, 此式等号并非处处成立.

以 K 表示圆 $|Z|<\frac{1}{2}$, $a_1, a_2, \cdots$ 是 K 内的有理点全体. 取正数 $h<\frac{1}{2}$, 以 D_1 表示圆 $|Z-a_1|<r_1<h^2$, r_1 充分小, 使 $\overline{D}_1\subset K$; 设 $a_2, a_3, \cdots, a_{s_2-1}\in\overline{D}_1$, $a_{s_2}\bar{\in}\overline{D}_1$, 以 D_2 表示圆 $|Z-a_{s_2}|<r_2<h^{2^2}$, r_2 充分小, 使 $\overline{D}_2\subset K$, 且 $\overline{D}_1, \overline{D}_2$ 不相交; ……; 设 $a_{s_m+1}, a_{s_m+2}, \cdots, a_{s_{m+1}-1}\in\bigcup_{k=1}^{m}\overline{D}_k$, $a_{s_{m+1}}\bar{\in}\bigcup_{k=1}^{m}\overline{D}_k$, 以 D_{m+1} 表示圆 $|Z-a_{s_{m+1}}|<r_{m+1}<h^{2^{m+1}}$, r_{m+1} 充分小, 使 $\overline{D}_{m+1}\subset K$, 且 $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \cdots, \overline{D}_{m+1}$ 两两不相交; …. 令 $D=\bigcup_{m=1}^{\infty}D_m$, 则 D 是 K 内的一个开集. 显然, $\overline{D}^0=K$, 故 $d(\overline{D}^0)=d(K)=\frac{1}{2}$. 另一方面, 设 E 是 D 内的任一闭集, 按已知定理(例如, [2], 63 页)

$$\frac{1}{\log\frac{1}{d(E)}}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\log\frac{1}{d(\overline{D}_m)}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\log\frac{1}{r_m}}<\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\log h^{-2^m}}=\frac{1}{\log\frac{1}{h}}.$$

由此得

$$d(E)<h.$$

按定义

$$d(D)\leqslant h<\frac{1}{2}=d(\overline{D}^0)$$

设 Z_0 为 E 上的一点, 以 $K=K_{Z_0}^\delta$ 表示圆 $|Z-Z_0|<\delta$. 令

$$\varDelta=\varDelta_{Z_0}^\delta=CE\cap K_{Z_0}^\delta,$$

$\varDelta$ 显然是一个开集. 本文的目的是证明下面的

定理 设 E 为有界闭集, 它满足条件: 对于任一在 E 上连续, E 的内点上解析的函

本文 1980 年 1 月 7 日收到, 1980 年 12 月 10 日修改.

数 $f(Z)$, 都存在 E 上解析的函数列 $f_n(Z)$, 在 E 上一致收敛于 $f(Z)$. 那么对于任意的 $Z_0\in E$, $\delta>0$, 总有

$$d(\varDelta)=d(\overline{\varDelta}^0).$$

证 当 $\varDelta$ 是空集(即点 Z_0 到 E 的边界之距离 $\geqslant\delta$)时, $\overline{\varDelta}^0$ 也是空集. 置 $d(\varDelta)=d(\overline{\varDelta}^0)=0$. 因此, 不妨设 $\varDelta$ 非空, 即 $d(\varDelta)>0$. 不失普遍性, 设 $Z_0=0\in E$. 又因为 $d(\varDelta)\leqslant d(\overline{\varDelta}^0)$, 故我们只需对于任意的 $\varepsilon>0$, 证明 $d(\varDelta)\geqslant d(\overline{\varDelta}^0)-\varepsilon$.

按 $d(\overline{\varDelta}^0)$ 的定义, 存在闭集 $\overline{\Omega}_1\subset\overline{\varDelta}^0$, 使

$$d(\overline{\Omega}_1)\geqslant d(\overline{\varDelta}^0)-\frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

不妨设 $G^\infty_{\overline{\Omega}_1}$ 的边界是有限条互不相交的简单闭曲线, 否则取开集 $\Omega^*\supset\overline{\Omega}_1$, 使 $\overline{\Omega}^*\subset\overline{\varDelta}^0$ 及 $G^\infty_{\overline{\Omega}^*}$ 满足条件. 设

$$t_k(Z)=\prod_{j=1}^{k}(Z-a_j)$$

是零点全在 $G^\infty_{\overline{\Omega}_1}$ 的边界 γ_1 上的 Чебышев 多项式, 令

$$m_k=\max_{Z\in\gamma_1}|t_k(Z)],$$

则由已知结果(例如, [1], VII, § 3)

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{m_k}=d(\overline{\Omega}_1)$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|t_k(Z)|}{m_k}}=e^{g_{\overline{\Omega}_1}(Z,\infty)},\quad Z\in G^\infty_{\overline{\Omega}_1}. \tag{2}$$

因此, 只要 k_0 充分大, 就有 $\sqrt[k_0]{m_{k_0}}\geqslant d(\overline{\Omega}_1)-\frac{\varepsilon}{3}$. 同时, 由 $\overline{\Omega}_1\subset\overline{\varDelta}^0$, 并 $g_{\overline{\Omega}_1}(Z,\infty)>0$, $Z\in G^\infty_{\overline{\Omega}_1}$, 于是只要 k_0 充分大, 曲线

$$\gamma_2:\frac{|t_{k_0}(Z)|}{m_{k_0}}=1$$

在 $\overline{\varDelta}^0$ 的内部, 现令

$$\phi(Z)=\frac{m_{k_0}}{t_{k_0}(Z)}=\frac{m_{k_0}}{\prod\limits_{j=1}^{k_0}(Z-a_j)} \tag{3}$$

则 $\phi(Z)$ 在 $G^\infty_{\gamma_2}$ 内解析, $\overline{G}^\infty_{\gamma_2}$ 上连续, $|\phi(Z)|\leqslant1$, 且

$$\sqrt[k_0]{m_{k_0}}\geqslant d(\overline{\varDelta}^0)-\frac{2}{3}\varepsilon. \tag{4}$$

设 E^0 为 E 的内核. 令 $B=C\overline{G}^\infty_{\gamma_2}\cap E^0$, 则由于 $\gamma_2\subset\overline{\varDelta}^0$, $\overline{B}$ 与 $\overline{G}^\infty_{\gamma_2}$ 不相交. 存在开集 $D\supset\overline{B}$, 使 $\overline{D}$ 与 $\overline{G}^\infty_{\gamma_2}$ 也不相交. 我们在 $\overline{D}$ 上定义 $\phi(Z)\equiv1$. 取曲线 $\gamma\subset\overline{\varDelta}^0$, 使 γ_2 在 γ 的内部, 因为 γ_2 与 γ 的距离以及 $\overline{B}$ 的边界与 $\overline{D}$ 的边界之距离都是正数, 我们只要先将 $\phi(Z)$ 连续开拓到全平面, 保持 $|\phi(Z)|\leqslant1$, 然后再进行平均, 就可得到定义于全平面的一个函数 $f(Z)$, 满足条件:

(i) $f(Z)=\phi(Z)$, $Z\in\overline{G}^\infty_{\gamma}$, $\gamma\subset\overline{\varDelta}^0$,

(ii) $f(Z)\equiv1$, $Z\in E^0\cap C\overline{G}^\infty_{\gamma}$,

(iii) $|f(Z)|\leqslant1$, 在全平面上成立,

(iv) $f(Z)$ 及它的对 x 及 y $(z=x+iy)$ 的偏微商在全平面内连续.

因为 γ 是 $\bar{\Delta}^0$ 内的有限条简单闭曲线，它把 E^0 分为两个边界互不相交开子集(不排除其中之一为空集). 因此，由 (i), (ii), $f(Z)$ 在 E 的内点集 E^0 内解析，又因它在全平面内连续，当然也在 E 上连续. 因此，函数 $f(Z)$ 满足定理条件. 按假定，存在在 E 上解析的函数列 $f_n(Z)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\max_{Z\in E}|f(Z)-f_n(Z)|=0. \tag{5}$$

由 $f_n(Z)$ 在 E 上解析，按大家熟知的 Runge 定理，存在极点位于 CE 内的有理函数列 $R_m(Z)$，使

$$\lim_{m\to\infty}\max|f_n(Z)-R_m(Z)|=0. \tag{6}$$

由(5)及(6)，对于任意的自然数 n，存在有理函数 $R_n(Z)$，使

$$|f(Z)-R_n(Z)|<\frac{1}{3n},\quad Z\in E. \tag{7}$$

设 F^* 是圆 $\bar{K}:|Z|\leqslant\delta$ 上所有满足不等式

$$|f(Z)-R_n(Z)|\geqslant\frac{1}{2n} \tag{8}$$

的点 Z 的集合，则 F^* 是一个有界闭集. 不妨设 $F^*\subset K:|Z|<\delta$，否则以 $F^{**}=F^*\cap(|Z|\leqslant\delta_1<\delta)$ 来代替 F^*. 因为函数 $f(Z)$ 在 $|Z|\geqslant\delta$ 上解析，只要 $\delta-\delta_1$ 充分小，$f(Z)$ 也就在 $|Z|\geqslant\delta_1$ 上解析. 于是以 F^{**} 代替 F^* 后不影响下面的要求.

扩大 F^* 到 F，使 $F\subset\Delta$(由(7), (8), $F^*\subset\Delta$), F 的边界由有限条简单闭曲线组成，并且满足不等式

$$|f(Z)-R_n(Z)|\geqslant\frac{1}{n},\quad Z\in F.$$

由此及(7),

$$|f(Z)-R_n(Z)|\leqslant\frac{1}{n},\quad Z\in\bar{K}\cap\bar{G}_F^\infty. \tag{9}$$

令

$$\theta_n(Z)=\begin{cases} f(Z)\,(=\phi(Z)), & Z\in CK\cap\bar{G}_F^\infty,\\ R_n(Z)+\dfrac{|Z|\,(f(Z)-R_n(Z))}{\delta\left(1+n\log\dfrac{\delta}{|Z|}\right)}, & Z\in\bar{K}\cap\bar{G}_F^\infty.\end{cases} \tag{10}$$

显见 $\theta_n(Z)$ 在 $\bar{G}_F^\infty$ 上连续. 在 $C\bar{K}\cap G_F^\infty$ 内，由于 $\theta_n(Z)=f(Z)=\phi(Z)$，故它是解析的. $\theta_n(Z)$ 的关于 x 及 y 的偏微商分别在 $\bar{K}\cap\bar{G}_F^\infty$ 和 $C\bar{K}\cap G_F^\infty$ 上连续. 设

$$\rho_{\theta_n}(Z)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\theta_n(Z)+i\frac{\partial}{\partial y}\theta_n(Z)\right],\quad Z=x+iy,$$

则当 $\theta_n(Z)$ 在点 Z 处解析时，由 Cauchy-Riemann 方程得 $\rho_{\theta_n}(Z)=0$. 因此

$$\rho_{\theta_n}(Z)\equiv 0,\quad Z\in C\bar{K}\cap G_F^\infty. \tag{11}$$

当 $Z\in\bar{K}\cap\bar{G}_F^\infty$ 时，直接对(10)的第二式取偏微商得

$$|\rho_{\theta_n}(Z)|\leqslant M\frac{n|f(Z)-R_n(Z)|}{1+n\log\dfrac{\delta}{|Z|}},$$

其中 M 是与 n 及 Z 无关的常数. 由不等式(9)得

$$|\rho_{\theta_n}(Z)|\leqslant\frac{M}{1+n\log\dfrac{\delta}{|Z|}},\quad Z\in\overline{K}\cap\overline{G}_F^{\infty}. \tag{12}$$

因为 $\rho_{\theta_n}(Z)$ 在全平面内有界，而且它的不连续点集仅仅是有限条简单弧. 于是按熟知的广义解析函数基本公式得

$$\theta_n(Z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\theta_n(\zeta)d\zeta}{\zeta-Z}-\frac{1}{\pi}\iint_{G_F^\infty}\frac{\rho_{\theta_n}(\zeta)d\sigma_\zeta}{\zeta-Z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\theta_n(\zeta)d\zeta}{\zeta-Z}-\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{K}\cap\overline{G}_F^\infty}\frac{\rho_{\theta_n}(\zeta)d\zeta}{\zeta-Z}, \tag{13}$$

其中 Γ 为 G_F^∞ 的边界. 在第二个等式中我们利用了(11).

不妨假定 F 存在一个内点 α, 它到 F 的边界之距离大于某个与 n 无关的常数，否则，在 $\varDelta$ 内取一个充分小的圆 $|Z-\alpha|\leqslant\beta$, 以 $F_1=F\cup(|Z-\alpha|\leqslant\beta)$ 代替 F. 显然，在 $\overline{K}\cap\overline{G}_{F_1}^\infty$ 上不等式(9)及(12)成立. 设 k_0 是(3)右边的那个自然数，由恒等式

$$\frac{1}{\zeta-Z}=-\sum_{s=0}^{k_0-1}\frac{(\zeta-\alpha)^s}{(Z-\alpha)^{s+1}}+\frac{(\zeta-\alpha)^{k_0}}{(Z-\alpha)^{k_0}(\zeta-Z)}$$

得到

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{K}\cap\overline{G}_F^\infty}\frac{\rho_{\theta_n}(\zeta)d\sigma_\zeta}{\zeta-Z}=\frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{k_0-1}\frac{1}{(Z-\alpha)^{s+1}}\iint_{\overline{K}\cap\overline{G}_F^\infty}\rho_{\theta_n}(\zeta)(\zeta-\alpha)^s d\sigma_\zeta$$
$$-\frac{1}{\pi(Z-\alpha)^{k_0}}\iint_{\overline{K}\cap\overline{G}_F^\infty}\frac{\rho_{\theta_n}(\zeta)(\zeta-\alpha)^{k_0}d\sigma_\zeta}{\zeta-Z}, \tag{14}$$

令

$$h^*(Z)=\theta_n(Z)+\frac{1}{\pi(Z-\alpha)^{k_0}}\iint_{\overline{K}\cap\overline{G}_F^\infty}\frac{\rho_{\theta_n}(\zeta)(\zeta-\alpha)^{k_0}}{\zeta-\alpha}d\sigma_\zeta. \tag{15}$$

由(13), (14)及(15), $h^*(Z)$ 在 G_F^∞ 内解析，且由(10), (12), (13)及(14)得到

$$\begin{aligned}|h^*(Z)|&\leqslant\sup_{Z\to\Gamma}|h^*(Z)|\\&\leqslant\sup_{Z\in\overline{K}\cap\overline{G}_F^\infty}\left(|f(Z)|+|f(Z)-R_n(Z)|+\frac{|Z|}{\delta}\cdot\frac{|f(Z)-R_n(Z)|}{1+n\log\dfrac{\delta}{|Z|}}\right)\\&\quad+\sup_{Z\in G_F^\infty}\iint_{\overline{K}\cup\overline{G}_F^\infty}\frac{|\rho_{\theta_n}(\zeta)(\zeta-\alpha)^{k_0}|d\sigma_\zeta}{|(Z-\alpha)^{k_0}(\zeta-Z)|}\\&\leqslant1+\frac{2}{n}+M\sup_{Z\in G_F^\infty}\left(\iint_K\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-Z|^{3/2}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\iint_K\frac{d\sigma_\zeta}{\left(1+n\log\dfrac{\delta}{|\zeta|}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

因此，由

$$\iint_K\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-Z|^{3/2}}=O(1),$$
$$\iint_K\frac{d\sigma_\zeta}{\left(1+n\log\dfrac{\delta}{|\zeta|}\right)^3}=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

得

$$|h^*(Z)|\leqslant1+O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

令 $\varepsilon_n=O\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$, 取 $h(Z)=h^*(Z)/1+\varepsilon_n$, 则 $h(Z)$ 在 G_F^∞ 内解析, $|h(Z)|\leqslant1$, 且由

(3), (10), (15)得

$$\lim_{Z\to\infty} Z^{k_0}h(Z)=\frac{m_{k_0}}{1+\varepsilon_n}. \tag{16}$$

现设 $g_F(Z,\ \infty)$ 为 G_F^∞ 内的 Green 函数，令

$$u(Z)=\log|h(Z)|^{\frac{1}{k_0}}+g_F(Z,\ \infty),$$

则由(16),

$$\lim_{Z\to\infty} u(Z)=\lim_{Z\to\infty}(\log|Z^{k_0}h(Z)|^{\frac{1}{k_0}}+g_F(Z,\ \infty)-\log|Z|)=\log\sqrt[k_0]{\frac{m_{k_0}}{1+\varepsilon_n}}+\gamma(F). \tag{17}$$

其中 $\gamma(F)$ 为 F 上的 Robin 常数. 因为 $u(Z)$ 在 G_F^∞ 内调和 (不排除 $u(Z)=-\infty$), 当 $Z\to\Gamma$ 时, $u(Z)\leqslant 0$, 于是由(17)得

$$d(F)=e^{-\gamma(F)}\geqslant\frac{\sqrt[k_0]{m_{k_0}}}{\sqrt[k_0]{1+\varepsilon_n}}.$$

因为 F 是 $\varDelta$ 中的闭集，于是由(4)得

$$d(\varDelta)\geqslant d(F)\geqslant\sqrt[k_0]{m_{k_0}}\Big/\sqrt[k_0]{1+\varepsilon_n}\geqslant\left(d(\bar{\varDelta}^0)-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\Big/\sqrt[k_0]{1+\varepsilon_n}.$$

因为 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$，于是只要 n 充分大就有

$$d(\varDelta)\geqslant d(\bar{\varDelta}^0)-\varepsilon.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，陈建功译，科学出版社，(1956).
[2] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, (1959).

A CONNECTION BETWEEN THE LOGARITHMIC CAPACITY AND THE SEQUENCE OF THE ANALYTICAL FUNCTION

MO GUODUAN
(*Zhabei College for Teocher Advanced Studies, Shaughai*)

ABSTRACT

Let E be a bounded closed set, $d(E)$ be the logarithmic capacity of E. If A is any bounded set, then

$$d(A)=\sup_{E\in A} d(E).$$

For each $Z_0\in E$, and $\delta>0$, let

$$\Delta=\Delta_{Z_0}^{\delta}=CE\cap(|Z-Z_0|<\delta),$$

where CE is complement of E, then Δ is an open set. By $\bar{\Delta}^0$ we denote the interior of the closure $\bar{\Delta}$ of Δ. Clearly, $\Delta\subset\bar{\Delta}^0$ and

$$d(\Delta)\leqslant d(\bar{\Delta}^0),$$

and there exists an open set D such that $d(D)<d(\bar{D}^0)$.

We shall prove the following

Theorem. Let E be a bounded set which satisfies the condition that for any function $f(Z)$ to be continuous on E and analytic in the interior of E, there exists a sequence of functions $f_n(Z)$ to be analytic on E such that

$$\lim_{n\to\infty}\max_{Z\in E}|f(Z)-f_n(Z)|=0.$$

Then for any $Z_0\in E$, and $\delta>0$, the equation

$$d(\Delta)=d(\bar{\Delta}^0)$$

holds.