数学年刊
3 (2) 1982

小时滞中立型系统的稳定性

斯 力 更
(内蒙古师范学院)

关于微分方程与微分差分方程之间在稳定性理论中的等价性问题，在[1]中作了一系列的研究. 在[2, 3]中举例指出：中立型微分差分方程和微分方程之间在稳定性理论中是不等价的. 过去在[4]中讨论时是有条件的，且仅研究过最简单的方程，而对于中立型系统，若干年以来还没有什么进展.

本文主要是探讨中立型微分差分方程组与微分方程组之间在稳定性理论中的等价性问题. 我们利用[5~7]中的思想方法，对于中立型系统在稳定性理论中有条件的建立了等价性定理，得到的结果推广并补充了这方面的研究.

考虑如下的微分系统

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{x}_j(t) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

与如下的中立型微分差分系统

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-\Delta_{ij})+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{x}_j(t-\Delta_{ij}) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

之间在稳定性理论中的等价性问题，此处 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} 和 Δ_{ij} 均为实常数且 Δ_{ij} 非负.

我们将系统(1)和(2)改写成向量形式

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t)+C\dot{x}(t) \tag{1*}$$

与

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\Delta)+C\dot{x}(t-\Delta), \tag{2*}$$

其中 $A=[a_{ij}]_1^n$, $B=[b_{ij}]_1^n$, $C=[c_{ij}]_1^n$ 均为 n 阶方阵，Δ 仅是向量形式的一种表示，为简单起见不妨认为 $\Delta_{ij}\leqslant\Delta$.

若记 $a=\sup|a_{ij}|$, $b=\sup|b_{ij}|$, $c=\sup|c_{ij}|$，由 $(2)^*$ 可得

$$\|\dot{x}(t)\|\leqslant na\|x(t)\|+nb\|x(t-\Delta)\|+nc\|\dot{x}(t-\Delta)\|, \tag{3}$$

其中

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

引理 1 设 $nc<1$ 成立；$x(t)$ 为 $(2)^*$ 之解且 $\|x(t)\|<\delta$, $\|\dot{x}(t)\|<\delta$, 于 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0$; $\|x(t)\|\leqslant N$, 于 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_1$, $t_0<t_1$, 则 $\|\dot{x}(t)\|\leqslant K_1N$, 于 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_1$, 其中 $K_1=\dfrac{na+nb}{1-nc}$.

本引理引自文[5]，其中 N 可为常数也可为 t 的函数，而 $\|\dot{x}(t)\|\leqslant K_1N$, 是 $\|\dot{x}(t-0)\|\leqslant K_1N$ 和 $\|\dot{x}(t+0)\|\leqslant K_1N$ 的合写.

引理 2 设引理 1 的条件成立，在 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0$ 上，$\|\ddot{x}(t)\|$ 有界，则 $\|\ddot{x}(t)\|\leqslant K_1^2N$, 于 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_1$.

本文 1980 年 2 月 4 日收到.

事实上，由 (2)* 可推得

$$\ddot{x}(t)=A\dot{x}(t)+B\dot{x}(t-\Delta)+C\ddot{x}(t-\Delta). \tag{4}$$

令 $y(t)=\dot{x}(t)$，由 (4) 便得

$$\dot{y}(t)=Ay(t)+By(t-\Delta)+C\dot{y}(t-\Delta).$$

注意到题设，再利用引理 1 即可得到本引理.

定理 1 设矩阵 $(E-C)$ 非奇异且 $nc<1$；若系统 (1)* 的零解是渐近稳定的，则存在一常数 $\bar{\Delta}(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})>0$，当 $0<\Delta\leqslant\bar{\Delta}$ 时，系统 (2)* 的零解在度量空间 C_1 中是渐近稳定的[7]，只要系统 (2)* 的初始函数 $x(t)=\varphi(t)$，$\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t)$，于 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0$ 上 $\ddot{\varphi}(t)$ 存在且有界.

证 由于系统 (1)* 的零解是渐近稳定的，则特征方程

$$\det(H-\lambda E)=0 \quad (H=(E-C)^{-1}(A+B)) \tag{5}$$

所有的根都具有负实部. 于是，根据 Барбашин[8] 公式，可求出满足

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_j\right)=-\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \tag{6}$$

的定正函数 $V(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\nu_{ij}x_ix_j$，其中 ν_{ij} 是由 $H=[h_{ij}]_1^n$ 中的元素所确定的常数.

Красовский[9] 指出，存在 $\alpha'>0$, $\beta'>0$ 使

$$\alpha'\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)\leqslant V(x(t))\leqslant\beta'\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t), \tag{7}$$

注意到模之间的关系可推得

$$\alpha\|x(t)\|^2\leqslant V(x(t))\leqslant\beta\|x(t)\|^2, \tag{8}$$

另外，容易推得有

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\leqslant\lambda\|x\|, \tag{9}$$

其中正常数 α, β, λ 都是由 h_{ij} 所决定的.

现将系统 (2)* 写成如下的形式

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&(E-C)^{-1}(A+B)x(t)+(E-C)^{-1}B[x(t-\Delta)-x(t)]\\&+(E-C)^{-1}C[\dot{x}(t-\Delta)-\dot{x}(t)].\end{aligned} \tag{2}^{**}$$

令 $H'=(E-C)^{-1}B=[h'_{ij}]_1^n$, $\quad H''=(E-C)^{-1}C=[h''_{ij}]_1^n$,

故 (2)** 又可写成如下的形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)=&\sum_{j=1}^{u}h_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}h'_{ij}(x_j(t-\Delta_{ij})-x_j(t))\\&+\sum_{j=1}^{n}h''_{ij}(\dot{x}_j(t-\Delta_{ij})-\dot{x}_j(t)) \quad (i=1, 2, \cdots, n)\end{aligned} \tag{2}$$

注意到 (6) 可推得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)}=-\sum_{k=1}^{n}x_k^2(t)+\phi, \tag{10}$$

其中

$$\phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}h'_{ij}[x_j(t-\Delta_{ij})-x_j(t)]\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}h''_{ij}[\dot{x}_j(t-\Delta_{ij})-\dot{x}_j(t)]\right). \tag{11}$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2(t) \geqslant \frac{1}{n}\|x(t)\|^2 \geqslant \frac{1}{n\beta} V(x(t))$，故

$$-\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) \leqslant -\frac{1}{n\beta} V(x(t)) = -lV(x(t)). \tag{12}$$

我们取 $\bar{\Delta} < \frac{\alpha l}{\lambda n^2 K_1 (h' + K_1 h'')\sqrt{2}}$，其中 $h' = \sup|h'_{ij}|$，$h'' = \sup|h''_{ij}|$. 如果 $0 < \Delta_{ij} \leqslant \Delta \leqslant \bar{\Delta}$，并设在 $t - \bar{\Delta} \leqslant \xi \leqslant t$ 中

$$V(x(\xi)) \leqslant 2V(x(t)).$$

于是，利用引理 1 和 2，由(8)，(9)和(11)可推得

$$\begin{aligned}|\phi| &\leqslant \lambda \|x(t)\| \Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{\Delta} h' \|\dot{x}(\xi)\| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{\Delta} h'' \|\ddot{x}(\xi)\|\Big] \\ &\leqslant \lambda \sqrt{\frac{1}{\alpha} V(x(t))} \Big[n^2 \bar{\Delta} h' K_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha} V(x(t))} + n^2 \bar{\Delta} h'' K_1^2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha} V(x(t))}\Big] \\ &\leqslant \frac{\lambda n^2 K_1 (h' + K_1 h'')\sqrt{2}}{\alpha} \bar{\Delta} V(x(t)),\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $t - \bar{\Delta} \leqslant \xi \leqslant t$. 故由(10)，(12)和(13)得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)} \leqslant -lV(x(t)) + \frac{\lambda n^2 K_1 (h' + K_1 h'')\sqrt{2}}{\alpha} \bar{\Delta} V(x(t)). \tag{14}$$

注意到 $\bar{\Delta}$ 的取值，容易看出：(3)式和(8)，(9)式以及(10)～(14)式的成立分别相当于 [5] 中定理 3(或 2.1)的条件 I 和 II 以及 III、IV，故完全类似于[5]中定理 3 的证明方法，便可推得系统 (2)* 的零解在度量空间 C_1 中是渐近稳定的.

定理 2　设矩阵 $(E-C)$ 非奇异且 $nc<1$，若特征方程 $\det(H-\lambda E)=0$ 至少有一根实部为正，即系统 (1)* 的零解是不稳定的，则存在一常数 $\bar{\Delta}(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})>0$，当 $0<\Delta\leqslant\bar{\Delta}$ 时，系统 (2)* 的零解是不稳定的，只要系统 (2)* 的初始函数 $x(t)=\varphi(t)$，$\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t)$ 于 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0$ 上 $\ddot{\varphi}(t)$ 存在且有界.

证　由于 $\det(H-\lambda E)=0$ 至少有一根实部为正，那末存在一个常数 $\mu>0$ 和一非常负的二次型 $V(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} \nu_{ij} x_i x_j$ 使

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_j\Big) = \mu V(x) + \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \tag{15}$$

其中参数 μ 和 ν_{ij} 都是由 $H=[h_{ij}]_1^n$ 所决定的.

显然，

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \leqslant \lambda \|x\|, \tag{16}$$

其中 λ 是与 ν_{ij} 有关的常数.

另外，由(2)和(15)类似(10)的推导可得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)} = \mu V(x(t)) + \sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) + \phi, \tag{17}$$

其中 ϕ 由(11)给出. 从而，由(17)得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)} \geqslant \mu V(x(t)) + \sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) - |\phi|. \tag{18}$$

注意到(16)，只要选取 $\bar{\varDelta}\leqslant\frac{1}{\lambda n^2K_1(h'+K_1h'')\sqrt{2}}$，利用引理1，2，类似(13)的推导，可推得

$$|\phi|\leqslant\lambda n^2K_1(h'+K_1h'')\sqrt{2}\,\bar{\varDelta}\sum_{k=1}^{n}x_k^2(t). \tag{19}$$

故由(18)和(19)得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)}\geqslant\mu V(x(t))+\rho\sum_{k=1}^{n}x_k^2(t), \tag{20}$$

其中 $\rho=1-\lambda n^2K_1(h'+K_1h'')\sqrt{2}\,\bar{\varDelta}$. 于是，注意到 $\bar{\varDelta}$ 的取值，可证系统 $(2)^*$ 的零解是不稳定的.

事实上，根据题设 $V(x)$ 在 $\|x\|\leqslant h_0$ 内有界；而 $V^*=\rho\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 常正，从而可求得 $t_1\geqslant t_0$，$h_0>0$，使一切 $t\geqslant t_1$ 及 $\|x\|\leqslant h_0$ 有 $|V|<L(L=\text{const.}>0)$，$V^*\geqslant0$；又设 $\delta>0(\delta<\varepsilon)$ 为任意常数，则不论 δ 如何小，总可选取 $\varphi(t)$，$\dot{\varphi}(t)$ 在 $t_1-\varDelta\leqslant t\leqslant t_1$ 上满足 $\|\varphi(t)\|<\delta$，$\|\dot{\varphi}(t)\|<\delta$，$V_0=V(\varphi(t_1))>0$.

于是取初始函数 $x(t)=\varphi(t)$，$\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t)$ 于 $t_1-\varDelta\leqslant t\leqslant t_1$，所确定系统 $(2)^*$ 的解 $x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$，则由于 $\|\varphi(t)\|<\delta<\varepsilon$，故根据解对 t 的连续性推知：当 $t\geqslant t_1$ 而相当接近 t_1 时，有

$$|x_i(t)|<\varepsilon\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{21}$$

但是，因为 $\varepsilon\leqslant h_0$，故对同样这些 t，上述有关结论都成立.

由(20)知，$\frac{dV}{dt}-\mu V\geqslant0$. 因此，若解 $x_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 当 $t\geqslant t_1$ 时不越出邻域(21)，则有如下不等式成立 $V\geqslant V_0\exp[\mu(t-t_1)]$. 由于 $V(x)$ 在 $\|x\|\leqslant h_0$ 内有界，故可求得这样一个正数 $L_{h_0}\leqslant L$，使对同样 t 值，有 $V\leqslant L_{h_0}$. 于是，有

$$L_{h_0}>V_0\exp[\mu(t-t_1)]. \tag{22}$$

但只要注意到 $\mu>0$，(22)的右端当 $V_0>0$ 时为正的单增函数，故必会到达这样的时刻 $t=\tau$，对于这个时刻(22)变成等式，而对 $t>\tau$ 的值，(22)将变为相反意义的不等式，而因不等式(22)不应该比不等式(21)破坏得早，故当 $t=\tau$ 时，在 $|x_i(t)|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个使得 $|x_s(\tau)|=\varepsilon$，故系统 $(2)^*$ 的零解是不稳定的.

注　若在系统 $(2)^*$ 中 $C=0$(即不是中立型的情形)，在[1]中相应的定理为本文定理的的特殊情形.

参 考 文 献

[1] 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社，(1963).

[2] Эльсгольц, Э. Л., УН–Т дружбы народов им. *Патрчоа, лумумбы*, **1**(1962), 114—115.

[3] Эевсгольц, Э. Л., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Иэд. «Наука», (1964).

[4] 刘永清，数学进展，**4**: 2(1958), 297—303.

[5] 李森林，科学通报，**23**: 2(1978), 88—93; 湖南大学学报，**1** (1979), 1—25.

[6] 斯力更，内蒙师院学报(自然科学)，**1**(1964), 7—16.

[7] 斯力更，数学学报，**17**: 3(1974), 197—204.

[8] Барбашин Е. А., Функции Ляпунова, *Физтагмиз*, (1970).

[9] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, *Физматгиз*, (1959)

THE STABILITY OF SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE WITH SMALL TIME LAG

SI LIGENG

(*Neimenggu Normal College*)

ABSTRACT

In this paper, we have obtained the equivalence theorems of stability between the system of differential equations

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{x}_j(t) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

and the system of differential-difference equations of neutral type

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-\varDelta_{ij})+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{x}_j(t-\varDelta_{ij}) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

where a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} are given constants, and $\varDelta_{ij}$ are non-negative real constants.