数 学 年 刊
3 (2) 1982

Bihari 不等式的推广及对 Volterra 积分方程的应用

杨 恩 浩
(暨南大学)

Bihari 不等式[1]是著名的 Gronwall-Bellman 积分不等式的最重要的非线性推广. 鉴于 Willett, D.[3] 已经把 Gronwall-Bellman 不等式推广于含有任意有限多个线性积分泛函项的情形, Dhongade, U. D. 和 Deo, S. G. 在[2]中企图对非线性的 Bihari 不等式也作出相仿的推广. 但可惜 [2] 的证明有漏误以致所指的推广以及它对于非线性 Volterra 型积分方程解的估计问题的应用都是尚待证实的. 本文将给出 Bihari 不等式对含任意有限个非线性积分泛函项情形的一个新的推广, 它校正了 [2] 中的全部结果, 并且作为所得不等式的另一应用, 我们将结合 Brauer, F. [2] 中关于 Volterra 积分方程的非线性常数变易公式, 讨论 Volterra 积分方程组的解在干扰作用下的渐近性质.

§1. Bihari 不等式的推广

我们用 $\mathscr{C}[S, N]$ 表示在集 S 上有定义且值域属于集 N 的连续实函数的全体, 并记 $R_+=[0, \infty)$, $I=[0, h)$, $0<h\leqslant\infty$.

定义 1 若 $f(u)\in\mathscr{C}[I, R_+]$ 为一单调不减的函数, 并设存在这样的两个函数 μ, $w\in\mathscr{C}[I, R_+]$, w 单调不减且当 $t>0$ 时 $w(t)>0$, 使得当 u, $v\in I$, 且 $v>0$ 时恒有

$$\frac{1}{v}f(u)\leqslant\mu(v)w\left(\frac{u}{v}\right),$$

则称函数 f 在 I 上属于函数类 $\mathscr{K}[\mu, w]$.

易见 [2] 中的函数类 $\mathscr{F}$ 相当于取 $\mu(v)\equiv1$ 且只要求上列不等式对 $v\geqslant1$ 成立. 我们在后面将指明, 对于[2]中企图达到的目标而言函数类 $\mathscr{F}$ 是不适用的.

引理 1 设

$$u(t)\leqslant a(t)+\int_0^t f(t, s)\Omega[u(s)]ds, \quad t\in I. \tag{1}$$

假若(i) $u(t)$, $a(t)\in\mathscr{C}[I, R_+]$, $a(t)$ 单调不减且当 $t>0$ 时 $a(t)>0$;

(ii) $f(t, s)\in\mathscr{C}[I\times I, R_+]$, 当 $s\in I$ 固定时 $f(t, s)$ 对变元 t 单调不减;

(iii) 在 I 上, $\Omega[\eta]\in\mathscr{K}[\mu, w]$,

则当 $t\in[0, \sigma)$ 时, 必有

$$u(t)\leqslant a(t)W^{-1}\left\{W(1)+\mu(a(t))\int_0^t f(t, s)ds\right\}, \tag{2}$$

本文 1980 年 2 月 22 日收到.

其中 W^{-1} 是 W 的反函数，而后者定义为

$$W(\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{ds}{w(s)},\quad \zeta_0=\text{const}\geqslant 0,\quad \zeta\geqslant\zeta_0; \tag{3}$$

$$\sigma=\sup_{t\in I}\left\{t: W(1)+\mu(a(t))\int_0^t f(t,s)ds\in \operatorname{Dom} W^{-1}\right\}.$$

证 当 $t=0$ 时，估计 (2) 明显成立．今任意选定一个值 $T\in(0,\sigma)$，据假设 (i)，(ii) 从不等式 (1) 可得

$$\frac{u(t)}{a(T)}\leqslant 1+\int_0^t\frac{f(T,s)}{a(T)}\Omega[u(s)]ds,\quad t\in[0,T].$$

因 $\Omega[\eta]\in\mathscr{K}[\mu,w]$

$$\frac{u(t)}{a(T)}\leqslant 1+\int_0^t f(T,s)\mu(a(T))w\left(\frac{u(s)}{a(T)}\right)ds,\quad t\in[0,T].$$

对上式应用 Bihari 不等式，顾及 σ 的定义和 $T\in(0,\sigma)$ 即有

$$u(t)\leqslant a(T)W^{-1}\left\{W(1)+\mu(a(T))\int_0^t f(T,s)\,ds\right\},\quad t\in[0,T].$$

最后在上式中令 $t=T$ 并注意到 $T\in(0,\sigma)$ 的任选性即得证．

定理 1 设已给非线性积分不等式

$$u(t)\leqslant a(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t f_i(t,s)\Omega_i[u(s)]ds,\quad t\in I. \tag{4}$$

假如（i）$u(t)$，$a(t)\in\mathscr{C}[I,R_+]$，$a(t)$ 单调不减且当 $t>0$ 时 $a(t)>0$；

（ii）$f_i(t,s)\in\mathscr{C}[I\times I,R_+]$，$i=1,2,\cdots,m$；而且当 s 固定时都对变元 t 单调不减；

（iii）在区间 I 上 $\Omega_i\in\mathscr{K}[\mu_i,w_i]$，$i=1,2,\cdots,m$．

则当 $t\in[0,\gamma)$ 时必有

$$u(t)\leqslant a(t)\prod_{i=1}^{m}R_i(t), \tag{5}$$

其中 $$R_i(t)=W_i^{-1}\left\{W_i(1)+\mu_i\left(a(t)\prod_{l=1}^{i-1}R_l(t)\right)\left(\prod_{l=1}^{i-1}R_l(t)\right)\int_0^t f_i(t,s)ds\right\},$$

这里对于 $\prod_{l=1}^{0}R_l(t)$ 理解为 1，W_i^{-1} 是 W_i 的反函数而

$$W_i(\eta)=\int_{\eta_{i0}}^{\eta}\frac{ds}{w_i(s)},\quad \eta_{i0}=\text{const}\geqslant 0,\quad \eta\geqslant\eta_{i0},$$

$$\gamma=\min[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m]$$

而 γ_i 由下式决定

$$\gamma_i=\sup_{t\in I}\left\{t: W_i(1)+\mu_i\left(a(t)\prod_{l=1}^{i-1}R_l(t)\right)\left(\prod_{l=1}^{i-1}R_l(t)\right)\int_0^t f_i(t,s)ds\in\operatorname{Dom} W_i^{-1}\right\}$$

证 引理 1 表明当 $m=1$ 时定理为真．现在假定当 $m=k$ 时定理成立，往证当 $m=k+1$ 时定理也成立．

对于 $m=k+1$，我们把 (4) 改记为

$$u(t)\leqslant a^*(t)+\sum_{i=1}^{k}\int_0^t f_i(t,s)\Omega_i[u(s)]ds,\quad t\in I.$$

这里
$$a^*(t)=a(t)+\int_0^t f_{k+1}(t,\ s)\Omega_{k+1}[u(s)]ds.$$
因为当 $u(t)\in\mathscr{C}[I,\ R_+]$ 时，$a^*(t)\in\mathscr{C}[I,\ R_+]$ 是单调不减的，于是据归纳假设从上面不等式得出
$$u(t)\leqslant a^*(t)\prod_{l=1}^{k}R_l(t),\quad t\in I_k=[0,\ \gamma_1)\cap[0,\ \gamma_2)\cap\cdots\cap[0,\ \gamma_k)$$
上式即
$$u(t)\leqslant\left[a(t)\prod_{l=1}^{k}R_l(t)\right]+\int_0^t\left(f_{k+1}(t,\ s)\prod_{l=1}^{k}R_l(t)\right)\Omega_{k+1}[u(s)]ds,\quad 当\ t\in I_k$$
时对此式应用引理 1 即有
$$\begin{aligned}u(t)&\leqslant\left[a(t)\prod_{l=1}^{k}R_l(t)\right]\cdot W_{k+1}^{-1}\left\{W_{k+1}(1)+\mu_{k+1}\left(a(t)\prod_{l=1}^{k}R_l(t)\right)\right.\\&\quad\left.\times\left(\prod_{l=1}^{k}R_l(t)\right)\cdot\int_0^t f_{k+1}(t,\ s)ds\right\}\\&=a(t)\prod_{l=1}^{k+1}R_l(t),\quad 当\ t\in[0,\ \sigma_1)\ 时,\end{aligned}$$
这里
$$\sigma_1=\sup_{t\in I_k}\left\{t:W_{k+1}(1)+\mu_{k+1}\left(a(t)\prod_{l=1}^{k}R_l(t)\right)\left(\prod_{l=1}^{k}R_l(t)\right)\int_0^t f_{k+1}(t,\ s)ds\in\mathrm{Dom}\ W_{k+1}^{-1}\right\},$$
注意到 $\sigma_1=\gamma$，定理即已得证.

推论 1　设
$$u(t)\leqslant a(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t f_i(t,\ s)u(s)ds,\quad t\in I.$$
如果 $u(t)$，$a(t)$，$f_i(t,\ s)$ 满足定理 1 中要求，则必有不等式（因为 $\Omega[\eta]=\eta\in\mathscr{K}[1,\ \Omega]$）
$$u(t)\leqslant a(t)\prod_{i=1}^{m}E_i(t),\quad t\in I.$$
其中
$$E_i(t)=\exp\left\{\left(\prod_{l=1}^{i-1}E_l(t)\right)\int_0^t f_i(t,\ s)ds\right\},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

以上推论是不同于 Willett[3] 的新结果，[3] 中只讨论 $f_i(t,\ s)=w_i(t)v_i(s)$ 的特殊情形而且其估计式的叠代过程也比较复杂.

推论 2　设
$$u(t)\leqslant a(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t f_i(t,\ s)[u(s)]^{\alpha_i}ds,\quad t\in I.$$
若常数 $\alpha_i\in(0,\ 1]$；$u(t)$，$a(t)$，$f_i(t,\ s)$ 满足定理 1 中的要求，且 $a(t)\geqslant1$ 成立.
由定理 1 立刻得出
$$u(t)\leqslant a(t)\sum_{i=1}^{m}G_i(t),\quad t\in I.$$
其中
$$G_i(t)=V_i^{-1}\left\{V_i(1)+\left(\prod_{l=1}^{i-1}G_l(t)\right)\int_0^t f_i(t,\ s)ds\right\},$$
$$V_i(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha_i}[\xi^{1-\alpha_i}-\xi_0^{1-\alpha_i}], & 0<\alpha_i<1,\\ \ln(\xi/\xi_0), & \alpha_i=1.\end{cases}\quad(0<\xi_0\leqslant1)$$

注 1　(i) 文 [2] 中的引理和定理 1 只假定 Ω 及 Ω_i 属于函数类 $\mathscr{F}$ 是不对的，因为 $f(x)\,g(x)\geqslant 1$ 不一定成立；(ii) 如上面推论 2 内的诸常数 α_i 中，既有属于 $(0, 1]$ 的也有大于 1 的，则过去已知的一切结果对所讨论的不等式都不适用．但只要注意到当 $r>0$ 时 $\Omega[\eta]=\eta^{1+r}\in\mathscr{K}[\mu, \Omega]$，这里 $\mu(v)=v^r$，我们就不难用定理 1 导出所需的估计，这说明引入 $\mathscr{K}[\mu, w]$ 比用 $\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{K}[1, \Omega]$ 优越．

§2. Volterra 积分方程组解的估计

考察非线性 Volterra 型积分方程组

$$y(t)=a(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t K_i(t, s)\Psi_i[y(s)]ds, \quad t\in I. \tag{6}$$

这里 $y(t)$, $a(t)\in\mathscr{C}[I, R^n]$, $\Psi_i[\eta]\in\mathscr{C}[R^n, R^n]$, 而且矩阵 $K_i(t, s)\in\mathscr{C}[I\times I, R^{n\times n}]$．我们将用 $\|\cdot\|$ 同时表示 n 维矢量及 $n\times n$ 矩阵的欧氏模．

定理 2　假设积分方程 (6) 满足条件：

(i) $\|a(t)\|$ 当 $t\in I$ 时单调不减，当 $t>0$ 时大于零；

(ii) 存在函数 $k_i(t, s)$ 及 $f_i(t, s)\in\mathscr{C}[I\times I, R_+]$, f_i 当 s 固定时对 t 单调不减，使得

$$\begin{cases}\|K_i(t, s)\|\leqslant k_i(t, s), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}k_i(t, s)\leqslant f_i(t, s),\end{cases}\quad t,\ s\in I,\ i=1, 2, \cdots, m.$$

(iii) 存在次可加函数 Φ_i，在 I 上 $\Phi_i\in\mathscr{K}[\mu_i, w_i]$, $i=1, 2, \cdots, m$, 使得

$$\|\Psi_i(\eta)\|\leqslant\Phi_i(\|\eta\|), \quad \eta\in R^n.$$

于是若 $y(t)$ 是 (6) 在某区间 $J=[0, \tau)\subseteq I$ 上的一个连续解，则它必满足估计式

$$\|y(t)\|\leqslant\|a(t)\|+p(t)\prod_{l=1}^{2m}Z_l(t), \quad 当\ t\in[0, \rho)时.$$

其中
$$p(t)=\sum_{i=1}^{m}\left[\int_0^t k_i(s, s)\,\Phi_i(\|a(s)\|)\,ds+\int_0^t\int_0^{\xi}f_i(\xi, s)\,\Phi_i(\|a(s)\|)\,ds\,d\xi\right];$$

$$Z_j(t)=\overline{W}_j^{-1}\left\{\overline{W}_j(1)+\mu_j\left(\|a(t)\|\prod_{l=1}^{j-1}Z_l(t)\right)\left(\prod_{l=1}^{j-1}Z_l(t)\right)\int_0^t f_j^*(t, s)ds\right\}.$$

$$[\mu_{m+i}(\xi)=\mu_i(\xi)] \quad (j=1, 2, \cdots, 2m).$$

$$f_j^*(t, s)=\begin{cases}k_j(s, s), & 当\ 1\leqslant j\leqslant m\ 时, \\ tf_{j-m}(t, s), & 当\ m+1\leqslant j\leqslant 2m\ 时.\end{cases}$$

$\overline{W}_j^{-1}$ 为 $\overline{W}_j$ 的反函数，$\overline{W}_{m+i}(\zeta)\equiv\overline{W}_i(\zeta)\ (i=1, 2, \cdots, m)$,

$$\overline{W}_i(\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{ds}{w_i(s)}, \quad \zeta_0=\text{const}\geqslant 0, \quad \zeta\geqslant\zeta_0, \quad i=1, 2, \cdots, m.$$

$$\rho=\min[\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{2m}]$$

而 ρ_j 的定义是

$$\rho_j=\sup_{t\in J}\left\{t:\overline{W}_j(1)+\mu_j\left(\|a(t)\|\prod_{l=1}^{j-1}Z_l(t)\right)\left(\prod_{l=1}^{j-1}Z_l(t)\right)\int_0^t f_j^*(t, s)ds\in\text{Dom}\ \overline{W}_j^{-1}\right\}.$$

证　在所作假定下由 (6) 式易得

$$\|y(t)\|\leqslant\|a(t)\|+\Theta(t), \quad t\in J, \tag{7}$$

其中
$$\Theta(t)=\sum_{i=1}^{m}\int_0^t k_i(t,\ s)\Phi(\|y(s)\|)ds$$
上式对 t 求导给出
$$\Theta'(t)=\sum_{i=1}^{m}\left[k_i(t,\ t)\Phi_i(\|y(t)\|)+\int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial t}k_i(t,\ s)\right)\Phi_i(\|y(s)\|)ds\right].$$
利用(7)式及 Φ_i 的单调性和次可加性即
$$\Theta'(t)\leqslant\sum_{i=1}^{m}k_i(t,\ t)\left[\Phi_i(\|a(t)\|)+\Phi_i(\Theta(t))\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t f_i(t,\ s)\left[\Phi_i(\|a(s)\|)+\Phi_i(\Theta(s))\right]ds,\quad t\in J.$$
得把上式两边从 0 到 t 积分，利用 $p(t)$ 的表达式及 $\Theta(0)=0$ 得到
$$\Theta(t)\leqslant p(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t k_i(s,\ s)\Phi_i(\Theta(s))ds+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t\int_0^{\xi}f_i(\xi,\ s)\Phi_i(\Theta(s))dsd\xi,\quad t\in J.$$
为对上式引用定理 1，我们置
$$\Phi_{m+i}=\Phi_i,\quad(\text{从而 }\widetilde{W}_{m+i}=\widetilde{W}_i),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$
利用 $f_i(t,\ s)$ 对 t 的单调不减性和辅助函数 $f_j^*(t,\ s)$，即可把上面的积分不等式写成
$$\Theta(t)\leqslant p(t)+\sum_{j=1}^{2m}\int_0^t f_j^*(t,\ s)\Phi_j(\Theta(s))ds,\quad t\in J.$$
由定理的假设及 $\Phi_{m+i}\in\mathscr{K}[\mu_i,\ w_i]$，对以上不等式应用定理 1 得出
$$\Theta(t)\leqslant p(t)\prod_{l=1}^{2m}Z_l(t),\quad \text{当 } t\in[0,\ \rho)\text{ 时}.$$
最后将上式代入(7)即得定理的证明.

推论 3　已给数量积分方程式
$$y(x)=f(x)+\int_0^x k(x,\ s)\Phi[y(s)]ds,\quad x\in R_+,\ y\in R. \tag{8}$$
如果(i) $f(x)\in\mathscr{C}[R_+,\ R_+]$ 单调不减且当 $x>0$ 时 $f(x)>0$；

(ii) $k(x,\ s)\in\mathscr{C}[R_+\times R_+,\ R_+]$ 且满足条件
$$\begin{cases}k(x,\ x)\leqslant h_1(x),\\ \dfrac{\partial}{\partial x}k(x,\ s)\leqslant g(x)h_2(s),\end{cases}$$
$g,\ h_1,\ h_2\in\mathscr{C}[R_+,\ R_+]$ 且 g 单调不减；

(iii) Φ 具有次可加性并且在 R_+ 上属于函数类 $\mathscr{K}[1,\ w]$；

若 $y(x)$ 为 (8) 在某区间 $J=[0,\ \tau)\subseteq I$ 上的连续解，则它必满足估计式
$$\|y(x)\|\leqslant f(x)+q(x)\Lambda_1(x)\Lambda_2(x),\quad \text{当 } x\in[0,\ \sigma')\text{ 时},$$
其中
$$q(x)=\int_0^x h_1(s)\Phi(f(s))ds+\int_0^x g(\xi)\left(\int_0^{\xi}h_2(s)\Phi(f(s))ds\right)d\xi,$$
$$\Lambda_1(x)=W^{-1}\left\{W(1)+\int_0^x h_1(s)ds\right\},$$
$$\Lambda_2(x)=W^{-1}\left\{W(1)+xg(x)\Lambda_1(x)\int_0^x h_2(s)ds\right\},$$
这里 $W,\ W^{-1}$ 的意义同于(3)，而 $[0,\ \sigma')\subseteq J$ 是使 $\Lambda_1(x),\ \Lambda_2(x)$ 同时都有意义的最大子区间.

注2 以上推论更正了[2]对积分方程(8)给出的估计。在[2]中，由于第215页第17行关于$R(x)$的积分不等式的最末一项带有系数$m(x)=\int_0^x g(s)ds$，它不一定有界，所以[2]中本来已经是未获证明的定理1也对此不等式不适用。

§3. Volterra 积分方程组的扰动

考虑非线性 Volterra 积分方程组

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} h[t,\ s,\ x(s)]ds,\quad t\in J_0=[t_0,\ \infty),\ t_0\geqslant 0 \tag{N}$$

和它的受扰组

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} h[t,\ s,\ y(s)]ds+\int_{t_0}^{t}\psi[t,\ s,\ y(s)]ds,\quad t\in J_0, \tag{NP}$$

这里x_0, y_0; x, $y\in R^n$. 我们假定：(i) h, h_t, ψ 及 $\psi_t\in\mathscr{C}[J_0\times J_0\times R^n,\ R^n]$, $h[t,\ s,\ 0]\equiv 0$; (ii) h_x 及 h_{tx} 属于 $\mathscr{C}[J_0\times J_0\times R^n,\ R^{n\times n}]$.

Brauer, F.[5] 曾证明：在上述假定下对每个$\xi_0\in R^n$, (N)和(NP)过$(t_0,\ \xi_0)$的解$x(t)=x(t,\ t_0,\ \xi_0)$和$y(t)=y(t,\ t_0,\ \xi_0)$必满足如下非线性常数变易公式

$$y(t)=x(t)+\int_{t_0}^{t} U(t,\ s,\ y(s))\left\{\frac{d}{ds}\int_{t_0}^{s}\psi[s,\ \tau,\ y(\tau)]d\tau\right\}ds,$$
$$\text{当 } t\in I_x(\xi_0)\cap I_y(\xi_0) \text{ 时}, \tag{9}$$

其中$I_x(\xi_0)$及$I_y(\xi_0)$分别是$x(t)$和$y(t)$在t_0右侧的最大存在区间，而$U(t,\ t_0,\ \xi_0)$是下列矩阵变分方程的解

$$U(t,\ t_0,\ \xi_0)=E+\int_{t_0}^{t} h_x[t,\ s,\ x(s,\ t_0,\ \xi_0)]U(s,\ t_0,\ \xi_0)ds,\quad \text{当 } t\in I_x(\xi_0) \text{ 时}, \tag{10}$$

这里E是$n\times n$恒等矩阵.

由[5]可知，由于变分方程(10)是线性组，所以当(N)的解$x(t,\ t_0,\ \xi_0)$及$I_x(\xi_0)$为已知时，(10)的解U可利用豫解核表达出来.

定义 2[6] 如果$Z(t)\in\mathscr{C}[J_0,\ R^n]$(或$\mathscr{C}[J_0,\ R^{n\times n}]$)，且对任给的正数$\varepsilon$恒存在常数$M(\varepsilon)>0$，使得

$$\|Z(t)\|\leqslant M(\varepsilon)\exp[\varepsilon t],\quad t\in J_0,$$

则称$Z(t)$在J_0上是缓增的.

定义 3 若对每个$\varepsilon>0$恒存在常数$K(\varepsilon)>0$，使得对一切$\xi_0\in R^n$都有

$$\left.\begin{array}{l}\|U(t,\ t_0,\ \xi_0)\|\leqslant K(\varepsilon)\exp[\varepsilon(t-t_0)],\\ \|x(t,\ t_0,\ \xi_0)\|\leqslant K(\varepsilon)\|\xi_0\|\exp[\varepsilon(t-t_0)],\end{array}\right\}\ t\in J_0,$$

则称组(N)的解在J_0上变分缓增.

定义 4 若对每个$\varepsilon>0$都存在这样的三个正数c, $\delta=\delta(\varepsilon)$及$M=M(\varepsilon,\ \delta)$，使得当$x_0\in R^n$, $\|x_0\|\leqslant\delta$时恒有不等式

$$\left.\begin{array}{l}\|U(t,\ t_0,\ x_0)\|\leqslant M\exp[-c(t-t_0)],\\ \|x(t,\ t_0,\ x_0)\|\leqslant M\|x_0\|\exp[-c(t-t_0)],\end{array}\right\}\ t\in J_0,$$

则称组(N)对应于$x_0=0$的平凡解$x(t)\equiv 0$依指数c变分稳定. 如果δ可取得随意地大

且 M 的选取可不依赖于 δ，则称(N)的平凡解是全局依指数 c 变分稳定的.

定义 5　若定义 4 中要求只对于 $c=0$ 才成立，则相应地称组(N)的平凡解是局部(或全局)变分稳定的.

如果定义 3 至 5 中不等式对于任取的 $t_0\geqslant 0$ 都成立，则称相应概念是对 t_0 一致成立的. 易见 Pachpatte [6] 中对微分方程引进的变分缓增及变分稳定性概念是本文的特款.

定理 3　设(N)和(NP)满足本节开头的条件，假设对每个 $\eta(t)\in\mathscr{C}[J_0, R^n]$

$$\left\|\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\psi[t, \tau, \eta(\tau)]d\tau\right\|\leqslant a(t)+\sum_{i=1}^{m}b_i(t)w_i(\|\eta(t)\|),\quad t\in J_0. \tag{11}$$

此处(i) $a(t)\in\mathscr{C}[J_0, R_+]$，当 $t>t_0$ 时 $a(t)>0$；

(ii) $b_i(t)\in\mathscr{C}[J_0, R_+]\cap\mathscr{L}_1(t_0, \infty)$，$i=1, 2, \cdots, m$；

(iii) $w_i(\xi)\in\mathscr{C}[R_+, R_+]\cap\mathscr{K}[1, w_i]$；当 $\xi>0$ 时 $w_i(\xi)>0$，并且使得 $W_i(\zeta)$ 在整个 R_+ 上都存在

$$W_i(\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{ds}{w_i(s)},\quad \zeta_0=\text{const}\geqslant 0,\ \zeta\geqslant\zeta_0,\ i=1, 2, \cdots, m,$$

则以下各结论成立

(I) 若$(N)(NP)$的解都在 J_0 上存在而且(N)的解在 J_0 上变分缓增，对每个正数 ε 有 $a(t)e^{-\varepsilon t}\in\mathscr{L}_1(t_0, \infty)$，则$(NP)$的一切解在 J_0 上缓增.

(II) 若(N)的平凡解局部(或全局)依指数 c 变分稳定，$a(t)e^{ct}\in\mathscr{L}_1(t_0, \infty)$，则$(NP)$的一切具有充分小初值 $\|y_0\|$ 的(或全部的)解 $y(t, t_0, \xi_0)$ 都满足

$$\|y(t)\|=O[\exp(-ct)],\quad t\to\infty. \tag{12}$$

(III) 若(N)的平凡解局部(或全局)变分稳定而且 $a(t)\in\mathscr{L}_1(t_0, \infty)$，则组$(NP)$的一切具有充分小初值的解(或一切解)都在 J_0 上保持有界.

证　因为三个结论的证明彼此相似，这里我们将只就局部指数变分稳定的情形对(II)加以证明，其余从略.

对每个 $\xi_0\in R^n$，由 Brauer 公式(9)及(11)式得

$$\|y(t)\|=\|y(t, t_0, \xi_0)\|$$

$$\leqslant\|x(t, t_0, \xi_0)\|+\int_{t_0}^{t}\|U(t, s, y(s))\|\times\left(a(s)+\sum_{i=1}^{m}b_i(s)w_i(\|y(s)\|)\right)ds,$$

当 $t\in I_x(\xi_0)\cap I_y(\xi_0)$ 时，如果(N)的平凡解依指数 c 局部变分稳定，则由定义 4 中第二个不等式和解的局部存在性知，当 $\xi_0\in R^n$，$\|\xi_0\|\leqslant\delta$ 时 $x(t, t_0, \xi_0)$ 在整个 J_0 上存在，于是对上面积分不等式利用定义 4 内的两个不等式和 $w_i\in\mathscr{K}[1, w_i]$，即得

$$\zeta(t)\leqslant\varphi(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t}M(\varepsilon, \delta)b_i(s)w_i(\zeta(s))ds,\quad t\in I_y(\xi_0). \tag{13}$$

其中

$$\zeta(t)=e^{ct}\|y(t)\|$$

$$\varphi(t)=M(\varepsilon, \delta)\left(\|\xi_0\|e^{ct_0}+\int_{t_0}^{t}a(s)e^{cs}ds\right)$$

易验(13)满足前面定理中各项条件，故得

$$e^{ct}\|y(t, t_0, \xi_0)\|\leqslant\varphi(t)\prod_{i=1}^{m}Q_i(t),\quad \text{当 } \xi_0\in R^n,\ \|\xi_0\|\leqslant\delta;\ t\in J_0\ \text{时}, \tag{14}$$

此处
$$Q_i(t)=W_i^{-1}\left\{W_i(1)+M(\varepsilon,\ \delta)\left(\prod_{l=1}^{i-1}Q_l\ (t)\right)\int_{t_0}^{t}b_i(s)ds\right\}.$$

W_i, W_i^{-1} 的意义同于定理1. 在所作假设下 $\varphi(t)$, $Q_i(t)$, 当 $t\in J_0$ 时恒有界, 由解的局部存在性及(14)知, 当 $\xi_0\in R^n$, $\|\xi_0\|\leqslant\delta$ 时恒有 $I_y(\xi_0)=J_0$, 故在(14)两边令 $t\to\infty$ 即得所要的(12)式,

证毕.

参 考 文 献

[1] Bihari, I., A generalization of lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **7**(1956), 81—94.

[2] Dhongade, U. D. and Deo, S. G., A nonlinear generalization of Bihari's inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54**: 199(1976), 211—216.

[3] Willett, D., A generalization of Gronwall inequality. *ibid.*, **16**: 4(1965), 774—778.

[4] Dhongade, U. D. and Deo, S. G., Pointwise estimates of solutions of some Volterra integral equatoins, *Journ. Math. Anal. Appl.*, **45**(1974), 615—628.

[5] Brauer, F., A nonlinear variation of constants formula for Volterra equations, *Math. Systems Thecry*, **6**: 3 (1972), 226—234.

[6] Pachpatte, B. G., Perturbations of nonlinear systems of differential equations, *Journ. Math. Anal, Appl.*, **51**: 3(1975), 550—556.

A GENERALIZATION OF BIHARI'S INEQUALITY AND ITS APPLICATIONS TO NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

YANG ENHAO

(*Jinan University*)

ABSTRACT

In a recent paper of Dhongade, U. D. and Deo, S. G.[2], the well-known improtant integral inequality due to Bihari[1] was generalized to the case of having finite terms of nonlinear integral functionals. Certainly, the generalizations of this type are very useful in treating many problems. Unfortunately the theorems given in [2] are not quite correct.

The purpose of the present paper is first to prove the validity of another generalization of Bihari's inequality, which corrects and extends all of the results in [2], and then as a further application of the obtained inequality, we consider here the perturbations of nonlinear Volterra integral equations by combining with the nonlinear variation of constants formula established by Brauer, F.[5] for the Volterra equations.