数 学 年 刊
3 (2) 1982

有限超可解群的两个性质

李 炯 生
(中国科技大学)

依照 Hall, M.[5], 超可解群(supersolvable group)定义如下：设群 G 具有一个有限的正规群列

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_m=1,$$

它的每个商群 $G_i/G_{i+1}(i=0, 1, \cdots, m-1)$ 都是循环群，则群 G 称为超可解群.

本文讨论与超可解群有关的两个问题：

1 Lagrange 定理的逆命题；

2 Wielandt 定理的简单推广.

本文是在曾肯成教授指导下完成的，在成文时承蒙张远达教授提出宝贵意见，谨致感谢.

§1. 关于 Lagrange 定理

Lagrange 定理指出：有限群 G 的子群的阶必是群 G 的阶 $o(G)$ 的一个约数. 反之，对于群 G 的阶 $o(G)$ 的任何一个约数，群 G 是否存在一个子群，使得它的阶恰好就是这个约数？这就是 Lagrange 定理的逆命题. 很明显，Lagrange 定理的逆命题并不是对每个群都成立的. 问题是对那类群成立？这是一个值得关心的问题.

1940 年，Zappa, G. 在[1]中首先证明了以下的定理 1，从而给出了此问题的一个部分的答案.

定理 1 对有限群 G 以及它的任何子群，Lagrange 定理的逆命题成立的充要条件是群 G 为超可解群.

Zappa, G. 的这一定理引起人们的注意，1957 年，Molain, D. H. 在[4]中给出了另一证明. 1966 年与 1968 年 Dorek, K.[7] 及 Deskins, W. E.[8] 又分别给出不同的证明. 这里另给一个证明*).

为此，先证明以下两个引理：

引理 1 设对有限群 G 以及它的任何子群，Lagrange 定理的逆命题成立，且 p_t 是群 G 的阶 $o(G)$ 的最大素因子，则 G 的 Sylow p_t-子群是 G 的正规子群.

证 设 $o(G)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$，其中 $p_1<p_2<\cdots<p_t$ 为素数，且 $\sum\limits_{i=1}^{t}\alpha_i=m$. 由于对群 G 以

本文 1980 年 2 月 26 日收到.

*) Zappa, G. 诸人的证明，我们未曾见到. 承张远达教授指出.

及它的任何子群，Lagrange 定理的逆定理成立，故群 G 具有群列

$$G=A_m\supset A_{m-1}\supset\cdots\supset A_{\alpha_t+1}\supset A_{\alpha_t}=B_{\alpha_t}\supset B_{\alpha_t-1}\supset\cdots\supset B_0=1,$$

其中群 A_i 在群 A_{i+1} 的指数 $[A_{i+1}:A_i]$ 是素数 $p_1, \cdots, p_{t-1}$ 中的一个，而且 $[A_{i+1}:A_i]\leqslant[A_i:A_{i-1}]$，$\alpha_t\leqslant i\leqslant m-1$，而群 B_j 在群 B_{j+1} 中的指数 $[B_{j+1}:B_j]=p_t$，$0\leqslant j\leqslant\alpha_t-1$. 子群 $B_{\alpha_t}=A_{\alpha_t}$ 的阶为 $p_t^{\alpha_t}$，故它是 G 的 Sylow p_t-子群.

我们先证明，子群 A_{α_t} 是 A_{α_t+1} 的正规子群. 事实上，根据 Sylow 定理[6]，群 A_{α_t+1} 的 Sylow p_t-子群的个数为 $1(\mathrm{mod}\ p_t)$；另一方面，它又等于群 A_{α_t} 在群 A_{α_t+1} 中的正规化子 $N_{A_{\alpha_t+1}}(A_{\alpha_t})$ 在群 A_{α_t+1} 的指数 $[A_{\alpha_t+1}:N_{A_{\alpha_t+1}}(A_{\alpha_t})]$，而后者只能是 p_{t-1} 或 1. 因 $p_{t-1}<p_t$，故不可能为 p_{t-1}，因此 $[A_{\alpha_t+1}:N_{A_{\alpha_t+1}}(A_{\alpha_t})]=1$. 这就证明了我们的断言.

其次，作归纳假设：A_{α_t} 是 A_i 的正规子群，$\alpha_t\leqslant i\leqslant m-1$. 我们将证明，$A_{\alpha_t}$ 也是群 A_{i+1} 的正规子群. 事实上，由 Sylow 定理，群 A_{i+1} 中的 Sylow p_t-子群的个数为 $1(\mathrm{mod}\ p_t)$；另一方面，它又等于群 A_{α_t} 在群 A_{i+1} 中的正规化子 $N_{A_{i+1}}(A_{\alpha_t})$ 在群 A_{i+1} 中的指数 $[A_{i+1}:N_{A_{i+1}}(A_{\alpha_t})]$. 由于群 A_{α_t} 是群 A_i 的正规子群，故 $N_{A_{i+1}}(A_{\alpha_t})\supseteq A_i$，因此 $[A_{i+1}:N_{A_{i+1}}(A_{\alpha_t})]$ 只能为 p_j，$1\leqslant j\leqslant t-1$，或为1. 因 $p_j<p_t$，$1\leqslant j\leqslant t$，故前者不可能，因此 $[A_{i+1}:N_{A_{i+1}}(A_{\alpha_t})]=1$. 这表明，群 A_{α_t} 是群 A_{i+1} 的正规子群.　　证毕.

引理 2　设对有限群 G 以及它的任何子群，Lagrange 定理的逆命题成立，并设 p_t 是群 G 的阶 $o(G)$ 的最大素因子，则群 G 必含有 p_t 阶正规子群.

证　对群 G 的阶 $o(G)$ 用归纳法. 由引理 1，群 G 有一个正规的 Sylow p_t-子群 P_t，它的中心记作 Z. 由于中心 Z 是 P_t 的特征子群，而 P_t 是群 G 的正规子群，故 Z 是群 G 的正规子群.

如果 Z 的阶 $o(Z)=p_t$，则引理 2 即已成立. 今设 $o(Z)=p_t^\beta(1<\beta\leqslant\alpha_t)$. 由于 G 适合 Lagrange 定理的逆命题，故群 G 含有 $p_1^{\alpha_1}\cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}$ 阶子群 H. 群 $H\cup Z=HZ$ 的阶 $o(HZ)$ 含有因子 p_t^β，$\beta>1$，且因群 HZ 是群 G 的子群，故由假设，群 HZ 也适合 Lagrange 定理的逆命题，故它具有群列

$$HZ=V_0\supset V_1\supset\cdots\supset H^*\supset\cdots\supset 1,$$

其中群 V_1 在群 $HZ=V_0$ 中的指数 $[V_0:V_1]=p_t$，群 H^* 的阶等于群 H 的阶. 显然群 V_1 严格包含在群 G 中，且群 V_1 本身以及它的任何子群都满足 Lagrange 定理的逆命题，同时因 $[V_0:1]=[V_0:V_1][V_1:1]$，故 p_t 是 V_1 的阶的最大素因子，由归纳法的假设，V_1 含有 p_t 阶正规子群 Q. 由于 $Q\trianglelefteq V_1\subset HZ$，且群 Z 是群 HZ 的正规 Sylow p_t-子群，故 $Q\trianglelefteq Z$. 因为群 Z 是群 P_t 的中心，故 Q 是 P_t 的正规子群. 因此 Q 是 $V_1\cup P_t$ 的正规子群. 而群 $V_1\cup P_t$ 的阶显然等于 $o(G)$，故 $V_1\cup P_t=G$. 即 Q 是群 G 的 p_t 阶正规子群. 引理证毕.

现在我们来证明定理 1.

定理 1 的证明. (1)必要性：对群 G 的阶 $o(G)$ 用归纳法.

设 p_t 是群 G 的阶 $o(G)$ 的最大素因子. 由引理 2，G 必含有 p_t 阶正规子群 Q. 考虑商群 G/Q. 我们将证明，商群 G/Q 本身以及它的任何子群都适合 Lagrange 定理的逆命题. 为此，只需证明：如果 B/Q 是商群 G/Q 的任意一个子群，h 是其阶 $o(B/Q)$ 的任意一个约数，则 B/Q 必含有 h 阶子群. 我们分以下几种情形来讨论：

情形(i)　$(h, p_t)=1$. 很明显，G 的子群 B 含有 h 阶子群 C，因 $Q\triangleleft G$，故 CQ 构成为

群. 商群 CQ/Q 的阶 $o(CQ/Q)=[CQ:Q]=[C:C\cap Q]$, 因 $C\cap Q=1$, 故得到 $o(CQ/Q)=o(C)=h$. 即商群 B/Q 含有 h 阶子群 CQ/Q;

情形(ii)　$p_t|h$. 同样, G 的子群 B 含有 hp_t 阶子群 C. 如果 $Q\subseteq C$, 则 C/Q 即为 B/Q 的 h 阶子群; 如果 $Q\not\subseteq C$, 则 C 应含有 h 阶子群 D. 因 $Q\not\subseteq C$, 且 Q 是素数阶群, 故 $C\cap Q=1$, 因而 $Q\cap D=1$. 因 $Q\lhd G$, 故 DQ 构成为群. 商群 DQ/Q 的阶 $o(DQ/Q)=[DQ:Q]=[D:D\cap Q]=[D:1]=h$. 因此商群 B/Q 含有 h 阶子群 DQ/Q. 这就证明了商群 G/Q 也满足定理 1 的条件.

由于商群 G/Q 的阶小于群 G 的阶, 且 G/Q 适合定理 1 的条件, 故由归纳法的假设, 商群 G/Q 是超可解群, 因而 G 本身也是超可解群.

(2) 充分性: 仍对群 G 的阶 $o(G)$ 用归纳法.

众所周知, 超可解群 G 的任何一个真子群 H 也必是超可解群. 由归纳假设, 群 H 以及它的任何子群都适合 Lagrange 定理的逆命题. 因此只要证明, 对群 G 本身, Lagrange 定理的逆命题成立.

今设 d 是群 G 的阶 $o(G)$ 的一个因子, 并设 $o(G)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$, p_i 是素数, $1\leqslant i\leqslant t$, 且 $p_1<p_2<\cdots<p_t$. 我们分以下三种情形讨论:

情形 1　$d|p_t^{\alpha_t}$. 根据 Sylow 定理, 群 G 显然有 d 阶子群;

情形 2　$d|p_1^{\alpha_1}\cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}$. 如果 $d=p_1^{\alpha_1}\cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}$, 则由 Schur 定理[3], 群 G 必含有 d 阶子群(因为超可解群 G 的 Sylow p_t-子群必是正规子群); 如果 $d<p_1^{\alpha_1}\cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}$, 则同上, 群 G 具有 $p_1^{\alpha_1}\cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}$ 阶子群 D, 而群 D 是超可解群 G 的真子群, 故也是超可解. 由归纳假设, 群 D 含有 d 阶子群, 从而群 G 也含有 d 阶子群.

情形 3　$d=d_1d_2$, 其中 $d_1|p_1^{\alpha_1}\cdots p_{t-1}^{\alpha_t-1}$, $d_2|p_t^{\alpha_t}$, 但 $d_2\neq 1$. 由于群 G 是超可解群, 故群 G 含有 d_2 阶正规子群 P. 商群 G/P 的阶 $o(G/P)<o(G)$, 且群 G/P 仍是超可解群, 故由归纳假设, 商群 G/P 含有 d_1 阶子群 Q/P, 而群 Q 就是群 G 的 d 阶子群.

定理 1 证毕.

§2. 关于 Wielandt 定理

先引述一下 Hall π-子群的定义. 设 π 是素数集合. 如果群 G 的子群 H 的阶 $o(H)$ 能被 π 中的任何一个素数整除, 但不被 π 以外的任何一个素数整除, 则子群 H 称为 G 的一个 π-子群. 如果 G 的 π-子群 H 在 G 中的指数不被 π 中任何一个素数整除, 则称 H 为 G 的一个 Hall π-子群.

特别, 当 π 仅由一个素数 p 构成时, 则 G 的 Hall π-子群即为 G 的 Sylow p-子群.

1954 年, Wielandt, H.[2] 曾经证明, 如果群 G 具有一个幂零的 Hall π-子群, 则 G 的所有 Hall π-子群都彼此共轭, 并且群 G 的任何一个 π-子群必包含在群 G 的某个 Hall π-子群里面.

问题是: Wielandt, H. 的这一定理中的"幂零"条件换成别的条件, 这一定理是否还成立?

168 阶射影单群 $PSL_2(7)$ 表明，Wielandt 定理中的"幂零"条件不能改成"超可解"。尽管如此，我们仍可证明：

定理 2 设群 G 含有一个 Hall π-子群 H，它的任何一个 Sylow 子群都是循环群，则 G 的任何 Hall π-子群都彼此共轭，并且 G 的任何一个 π-子群必包含在 G 的某个 Hall π-子群中。

由于每个 Sylow 子群都是循环群的群必是超可解群，故 Wielandt 定理对这种特殊的超可解群仍是成立的。

为证明定理 2，我们需要一个引理。在叙述引理前，先引进两个记号。

E^c_π：设群 G 含有一个 Hall π-子群，而且这个 Hall π-子群的每个 Sylow 子群都是循环群，则称群 G 适合 E^c_π。

$\pi_1=\pi(p'\leqslant p)$：p 为素数集合 π 中的某个素数，π_1 表示 π 中所有不大于 p 的素数 p' 所构成的素数集合。

引理 设群 G 适合 E^c_π，P 是群 G 的任意一个 p-子群，$p\in\pi$，则群 P 在群 G 中的正规化子 $N_G(P)$ 适合 $E^c_{\pi(p'\leqslant p)}$。

证 设群 H 是群 G 的一个 Hall π-子群，它的每个 Sylow 子群都是循环群。由此即知，H 是超可解群。故 H 含有超可解 Hall π_1-子群 K，且 K 的每个 Sylow 子群都是循环群。

因 K 是超可解群，故 K 的 Sylow p-子群 S_p 是 K 的正规子群(只要注意，p 是 K 的阶 $o(K)$ 中的最大素因子即可)，而且 K 含有 $o(P)$ 阶的正规子群 P^*。

由 Sylow 定理，群 P 包含在某个与群 S_p 共轭的子群 S_p^x 中，这里 $x\in G$。由于群 S_p 是循环群，故 $P^{*x}=P$。因此群 K^x 属于群 P 在 G 的正规化子 $N_G(P)=N$。这表明 N 含有 Hall π_1-子群 K^x，而且它的每个 Sylow 子群都是循环群。这就证明了引理。

定理 2 的证明。对群 G 的阶 $o(G)$ 用归纳法。显然，只需证明，群 G 的任意一个 π-子群 K 都属于 $H^x(x\in G)$ 即可。

首先，群 G 的 π-子群 K 必是超可解群。事实上，由 Sylow 定理，K 的每个 Sylow 子群都包含在 H 的某个 Sylow 子群的共轭子群中，而这些 Sylow 子群都是循环群，故 K 的每个 Sylow 子群也都是循环群，从而 K 是超可解群。

设 K 的阶 $o(K)=p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}$，$p_i$ 为素数，$1\leqslant i\leqslant t$，且 $p_1<p_2<\cdots<p_t$。因 K 为超可解群，故 K 的 Sylow p_t-子群 P_t 必是 K 的正规子群。

现在考虑 P_t 在群 G 中的正规化子 $N_G(P_t)=N$。

情形 1 $N=G$。此时 $P_t\lhd G$，商群 G/P_t 显然也适合定理 2 的条件，且它的阶 $o(G/P_t)<o(G)$。由归纳假设，定理 2 对商群 G/P_t 成立，故 π-子群 K/P_t 包含在 G/P_t 的 Hall π-子群 $(H/P_t)^{\bar{x}}$ 中，$\bar{x}\in G/P_t$。(这里可设 P_t 属于 H，否则只要用某个与 H 共轭的子群来代替群 H 即可)。故 $K\subseteq H^x$，$x\in G$。

情形 2 $N\subset G$，但 $N\neq G$。由引理，N 适合 $E^c_{\pi_1}$，故把定理 2 关于 π 的结论换为关于 π_1 的结论，定理 2 对 N 成立。因 P 为 K 的正规子群，故 K 属于 N，因此 K 应属于 H 的某个 π_1-子群的共轭子群，从而 K 包含在某个与 H 共轭的子群中。

这就证明了定理 2。

参 考 文 献

[1] Zappa, G., A remark on a recent paper of O. Ore, *Duke Math. Jour.*, **6**(1940), 511—512.
[2] Wielandt, H., Zum Satz von Sylow, *Math. Zeit.*, **60**(1954), 407—408.
[3] Hall, P., Like Sylow's theorems, *Proc. London, Math. Soc.*, **VI**(1956), 286—304.
[4] Mclain, D. H., The existence of subgroups of given order in finite groups, *Proc. can. Philo. Soc.*, **53** (1957), 278—285.
[5] Hall, M., The Theory of Groups, Macmillan Company, (1959), 149.
[6] Hall, M., The Theory of Groups, Macmillan Company, (1959), 45.
[7] Dorek, K., Minimal nicht überauflöslare endliche Gruppen, *Math. Zeit.*, **91**(1966), 198—205.
[8] Deskins, W. E., A characterization of finite supersolable groups, *Amer. Math. Monthly*, **75** (1968), 180—182.

NOTES ON FINITE SUPERSOLVABLE GROUPS

LI JIONGSHENG
(*Chinese University of Science and Technology*)

ABSTRACT

Let's recall the definition of supersolvable groups. A group G is called supersolvable if it has a finite normal series

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_m=1,$$

such that in which each factor G_i/G_{i+1} $(i=0, 1, \cdots, m-1)$ are all cyclic. In this paper, we will discuss two properties for finite supersolvable groups.

1. On Lagrange theorem

Zappa, G.[1] proved the following theorem in 1940.

Theorem 1. The inverse proposition of Lagrange theorem holds for a finite group G and any of its subgroups if and only if the group G is supersolvable.

Mclian, D. H.[4] has given a proof for the preceding theorem of Zappa in 1957. Again, Dorek, K.[7] and Deskins, W. E.[8] gave proves for Zappa's theorem in 1966 and 1968 respectively. We shall give a proof for this theorem here, which seems to be new.

We need the following lemmas.

Lemma 1. Suppose that the inverse proposition of Lagrange theorem holds for a finite group G and any of its subgroups, and let p_t be the largest prime which is a factor of order $o(G)$ of group G, then the Sylow p_t-subgroup of group G is normal in G.

Lemma 2. Assume that the inverse proposition of Lagrange theorem holds for a finite group G and any of its subgroups, and let p_t be the largest prime which is a factor of order $o(G)$ of group G then, the group G has a normal subgroup with order p_t.

2. On Wielandt theorem

Wielandt, H.[2] proved in 1954 that if a group G has a niloptent Hall π-subgroup, then all Hall π-subgroups of the group G are conjugate, and for each π-subgroup of the group G there exists one Hall π-subgroup of G which contains the π-subgroup.

We have the following result for this theorem of Wielandt, H.

Theorem 2. Assume a group G has a Hall π-subgroup H, and let each Sylow p-subgroup of H be cyclic, then the Hall π-subgroups of G form a single conjugacy class of subgroups of G, and for each π-subgroup of G there exists one Hall π-subgroup of G which contains the π-subgroup.

We first introduce some symbols as follows:

1. Condition E_π^c. Let π be a set of primes. If a group G has a Hall π-subgroup H, and each Sylow p-subgroup of H is cyclic, then the group G is said to have satisfied condition E_π^c.

2. $\pi_1=\pi(p'\leqslant p)$. Let π be a set of primes, p be a given prime in π, and let p' be a prime in π. We write

$$\pi_1=\pi(p'\leqslant p)=\{p'\in\pi\,|\,p'\leqslant p\}.$$

We need the following

Lemma. Suppose that a group G satisfied condetion E_π^c, and let P be any p-subgroup of the group G, $p\in\pi$, then the normalizer $N_G(P)$ of P in G satisfied $E_\pi^c(p'\leqslant p)$.