数 学 年 刊
3 (2) 1982

拟线性对称双曲组具有特征边界的初边值问题

陈 恕 行
(复旦大学)

拟线性对称双曲组在数学物理中有广泛的应用．例如，流体力学方程组就可化为拟线性对称双曲组进行讨论．在文[1, 2]中，对于拟线性对称双曲组具非特征边界的初边值问题已作了完整的讨论，但对于边界为特征的情形，附加了方程组中未知函数导数项的系数不依赖于u的要求．在等熵、初速为亚音速，初始密度接近于常数的固壁边界问题，Ebin[6] 得到了流体动力学方程的局部可解性．本文进一步讨论边界为特征的情形，并允许未知函数导数项的系数也依赖于u，这里所得到的结果完全可以应用于流体力学方程组，得到某些实际流动问题局部解的存在性．

§1. 问题的提法、主要结果

我们讨论拟线性方程组

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(x, u), \tag{1.1}$$

式中$x_i(i=0, 1, \cdots, n)$为自变量，有时也记x_0为t，记$(x_1, \cdots, x_n)$为x'；u表示含N个分量的未知函数，α_i为$n+1$个$N\times N$对称矩阵，f为含N个分量的向量，它们都是关于x, u为充分光滑的．自变量(t, x')的变化范围为R^{n+1}中的区域$[0, h]\times\Omega$, Ω的边界充分光滑．

给出方程组(1.1)的初边值条件为

$$u=\varphi \quad (t=0), \tag{1.2)'$$

$$Mu=0 \quad (t, x)\in[0, h]\times\partial\Omega, \tag{1.3}$$

条件(1.2)′, (1.3)关于方程组(1.3)是高阶相容的，即按(1.2)′所给出的初始值与方程组(1.1)可以计算得u在$t=0$平面上边界$\partial\Omega$处的各阶导数，它满足(1.3)与由(1.3)导出的一些高阶微分关系式．由于初始条件可以通过预先减去一个已知函数的办法将它化成齐次的，故为简单起见，不妨一开始就取$\varphi=0$，即讨论初始条件为

$$u=0 \quad (t=0) \tag{1.2}$$

的情形．此时，对于方程组的系数与边界条件，我们还要求：

i) 在$t=0$, $u=0$时，矩阵$\alpha^0(x, u)$为正定，即其各主子式均$\geqslant\varepsilon>0$(以下我们常以ε, δ, μ等表示不依赖于u, h的正常数)．

本文1980年3月14日收到，1980年7月5日修改．

ii) 若 $\tilde{u}$ 表示任一满足条件 (1.3) 的函数组，则边界 $[0, h]\times\partial\Omega$ 对于算子 $\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i(x, \tilde{u})\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 而言是非特征或正则特征的. 又若以 $\boldsymbol{\nu}(0, \nu_1, \cdots, \nu_n)$ 表示边界的法向量，则矩阵 $\beta(x, \tilde{u})=\sum\limits_{i=0}^{n}\nu_i\alpha_i(x, \tilde{u})$ 等于一个依赖于 x 的矩阵 β_0，且 $Mu=0$ 是 $u\beta_0u$ 的最大非负子空间.

iii) 在边界 $[0, h]\times\partial\Omega$ 附近存在一个非异的 $N\times N$ 矩阵 $Q(x)$，使作变换 $u=Qv$ 后所得到的 $\tilde{\beta}(x, v)=Q'(x)\beta(x, Q^{-1}v)Q(x)$ 能写成分块矩阵 $\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 的形式，边界条件 (1.3) 也化为

$$v_1=\cdots=v_L=0, \tag{1.4}$$

当 (t, x) 位于边界 $[0, h]\times\partial\Omega$ 上，且以 (1.4) 代入 $\tilde{\beta}(x, v)$ 时，矩阵 B_1 为满秩阵，B_2 为零阵.

显然，当边界 $[0, h]\times\partial\Omega$ 为非特征时，条件 iii) 是自然满足的；又若方程组 (1.1) 为半线性的，则条件 ii) 说明边界条件，而由于 β_0 为对称阵，它总可以化为对角阵，所以条件 iii) 也满足. 因此，下面给出的定理是文[2]中结果的推广. 在本文最后一节，我们将说明条件 i)—iii) 对于某些气体动力学中流动问题是完全满足的.

本文的主要结果是：

定理 1 对于拟线性对称双曲组边值问题 (1.1)—(1.3)，若其系数满足足够的光滑性条件、相容性条件以及条件 i), ii), iii)，则存在适当小的 δ，使当 $h\leqslant\delta$ 时问题 (1.1)—(1.3) 存在唯一的 C^s 光滑解，s 的大小由系数光滑性与相容性的阶数决定.

以下讨论中利用条件 iii) 中给出的矩阵 $Q(x)$ 对方程组 (1.1) 进行变形. 为叙述简单起见，不妨设 $Q(x)$ 在整个区域 $[0, h]\times\Omega$ 中存在. 作变换 $u=Qv$，则 (1.1) 化为

$$\sum_{i=0}^{n}\tilde{\alpha}_i(x, v)\frac{\partial v}{\partial x_i}=\tilde{f}(x, v). \tag{1.5}$$

仿照文[2]引入下列记号

$\{D_\sigma\}$ $\left(\sigma=0, \cdots, \mu;\ D_0=I,\ D_\sigma=\sum\limits_{i=0}^{n}d_\sigma^i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\ (\sigma\neq 0)\right)$ 为关于边界 $[0, h]\times\partial\Omega$ 切边的完备切边算子系.

$D_q^p u$ 表示 u 的 p 次广义导数，其中含 q 次非切边导数.

H_t^s 表示满足条件 $D_q^p u\in L^2([0, h]\times\Omega)$ $(p\leqslant s,\ q\leqslant t)$ 的函数 u 集合，且记 H_0^s 为 H^s，记 H_s^s 为 H_s.

$$B_p=\bigcap_{d<\frac{p}{2}}H_d^{p-d}([0, h]\times\Omega),$$

$$\|\ \ \|_{B_p}=\Big(\sum_{d<\frac{p}{2}}\|\ \ \|^2_{H_d^{p-d}}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$B_p(\mu)$ 为 B_p 中所有满足 $\|u\|_{B_p}\leqslant\mu$, $\partial_{x_0}^k u|_{x_0=0}=0$ $(k\leqslant p-1)$ 的 C^∞ 函数 u 组成的集合（这与 [2] 中稍有不同).

在证明方程组 (1.5) 具齐次初始条件 $v=0$ 以及边界条件 (1.4) 的解的存在唯一性时，也采用通常处理非线性问题的方法，即引入辅助的线性问题

$$\sum_{i=0}^{n} \tilde{\alpha}_i(x, v) \frac{\partial V}{\partial x_i} = \tilde{f}(x, v); \tag{1.6}$$

$$V|_{t=0} = 0; \tag{1.7}$$

$$V_1 = \cdots = V_L = 0 \quad (t, x) \in [0, h] \times \partial\Omega. \tag{1.8}$$

并将此线性问题的求解视为 $v \mapsto V$ 的映照 T, 下面我们的目的是证明当 h 充分小时 T 在 $B_p(\mu)$ 中存在一个不动点, 此不动点正是原非线性问题的解.

若取 $p \geqslant 8m+8\left(m=\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)$, 则 $B_p \subset H_{4m+4}$, 由嵌入定理知, 若 $v \in B_p(\mu)$, 则 $|v|_{C_{3m+4}} \leqslant C(\mu)$, 因而只要 h 充分小, 关于 $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{f}$ 的光滑性以及 $\tilde{\alpha}_0$ 的正定性是不成问题的.

§2. 基本定理的证明

首先采用局部化处理的技术, 对闭区域 $\bar{\Omega}$ 作有限开复盖 $\{\Omega_\alpha\}$: $\bigcup \Omega_\alpha \supset \bar{\Omega}$. 并作从属于 $\{\Omega_\alpha\}$ 的单位分解 $1 \equiv \sum \eta_\alpha$, $\eta_\alpha \in C^\infty$, $\operatorname{supp} \eta_\alpha \subset \Omega_p$. 由此也自然地导出了 $[0, T] \times \Omega$ 上的单位分解. 令 $V_\alpha = \eta_\alpha V$, 则 $V \equiv \sum V_\alpha$, 且由(1.6)—(1.8)可以导出关于 V_α 的方程与初边值条件

$$\sum_{i=0}^{n} \tilde{\alpha}_i(x, v) \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\alpha}_i(x, v) \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_i} V + \eta_\alpha f(x, v), \tag{2.1}$$

$$V_\alpha|_{t=0} = 0, \tag{2.2}$$

$$V_{\alpha 1} = \cdots = V_{\alpha l} = 0 \quad ([0, h] \times \partial\Omega). \tag{2.3}$$

下面讨论的步骤是从 $v \in B_p(\mu)$ 出发, 讨论 V 的性质. 而 V 的性质可以利用由 (2.1)—(2.3) 所推知的 V_α 之性质合成得到. 又因为完备切边算子系 $\{D_\sigma\}$ 在内部区域 Ω_α 中包含一切方向, 此时不需多作讨论, 下面集中处理边界区域就行了. 若 Ω_α 为包含 Ω 的边界点的区域, 不妨设局部地可以作一个坐标变换 $x = x(y)$, 使 Ω 的边界展平为 $y_n = 0$. 适当选取比例因子后可以有 $\frac{\partial y_n}{\partial x_i} = n_i$, 则方程 (2.1) 左端变成

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \tilde{\alpha}_i(x, v) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_\alpha}{\partial y_j} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} \tilde{\alpha}_i(x, v) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial V_\alpha}{\partial y_j} + \tilde{\beta}(x, v) \frac{\partial V_\alpha}{\partial y_n}, \tag{2.4}$$

从而将(2.1)式化成

$$L_1 V_\alpha \equiv \sum_{j=0}^{n} A_j \frac{\partial V_\alpha}{\partial y_j} = EV + F, \tag{2.5}$$

其中 A_j, E, F 不难用原来的系数表出. 由前节的条件 ii) 知, 算子 $\sum_{\alpha=0}^{n} \alpha_i(x, v) \frac{\partial}{\partial x_i}$ 以边界 $[0, h] \times \partial\Omega$ 为非特征或正则特征, 因而由 [2] 中的定理 2 可知, 当 h 充分小时, 方程组 (2.5) 存在唯一的 C^ρ 光滑解, 其中 ρ 与 (2.5) 的系数光滑性有关. 由于 $v \in B_p(\mu) \subset C^\infty$. 故不妨设问题 (1.1)—(1.3) 满足充分高阶的光滑性条件与相容性条件, 使 (2.5) 的解 $V \in C^\rho$. 仍由上节条件 iii) 知, $\tilde{\beta}(x, v) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, 因此我们可以记 $V_\alpha^1 = (V_{\alpha,1}, \cdots, V_{\alpha,N_1})$, $V_\alpha^2 = (V_{\alpha,N_1+1}, \cdots, V_{\alpha,N})$, (其中 N_1 为 B_1 的阶数), 并将方程组(2.5)分写为两组

$$L_1^1 V_\alpha = \sum_{j=0}^{n-1} A_j^1 \frac{\partial V_\alpha}{\partial y_j} + B_1 \frac{\partial V_\alpha^1}{\partial y_n} = E^1 V + F^1, \tag{2.6}$$

$$L_1^2 V_\alpha = \sum_{j=0}^{n-1} A_j^2 \frac{\partial V_\alpha}{\partial y_j} + B_2 \frac{\partial V_\alpha^2}{\partial y_n} = E^2 V + F^2. \tag{2.7}$$

为以下运算简单起见,不妨取切边算子系 $\{D_\sigma\}$ 的形式是

$$\eta_\alpha \frac{\partial}{\partial t},\ \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial x_n},\quad (\text{若 } \Omega_\alpha \text{ 为内部区域}) \tag{2.8}$$

$$\eta_\alpha \frac{\partial}{\partial t},\ \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial y_1},\ \cdots,\ \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial y_{n-1}},\ \eta_\alpha y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\quad (\text{若 } \Omega_\alpha \text{ 为边界区域}), \tag{2.9}$$

再加上 $D_0=I$. 文[3]已指出, $\{D_\sigma\}$ 是完备的切边算子系, 当涉及到 V_α 的切边导数估计时,只需考察(2.9)型的算子对它的作用.

若 $M_i=e_i(x, v)\dfrac{\partial}{\partial y_i}\,(i<n)$, $M_n=e_n(x, v)y_n\dfrac{\partial}{\partial y_n}$, 则 $[D_\sigma, M_i]$ 也是切边算子, 它可以用 $\{D_\sigma\}$ 表示为

$$[D_\sigma, M_i]=\sum_{\tau=1}^{M} p_{\sigma_i}^{\tau} D_\tau \quad (i\leqslant n). \tag{2.10}$$

其中 $p_{\sigma_i}^{\tau}$ 仅依赖于 v 以及 v 的切边导数.

若 $M_n'=e_n'(x, v)\dfrac{\partial}{\partial y_n}$ 为切边算子, 则当它用 (2.9) 型算子表出时, 其系数依赖于 $\dfrac{e_n'(x, v)}{y_n}$, 亦即与 $\dfrac{\partial v}{\partial y_n}$ 在 $y_n=0$ 时的值有关. 而

$$\begin{aligned}&\left[\eta_\alpha \frac{\partial}{\partial y_j},\ e_n'\frac{\partial}{\partial y_n}\right]=\eta_\alpha \frac{\partial e_n'}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_n}-e_n'\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial y_j};\\&\left[\eta_\alpha y_n \frac{\partial}{\partial y_n},\ e_n'\frac{\partial}{\partial y_n}\right]=\eta_\alpha\left(\frac{\partial e_n'}{\partial y_n}\right)y_n\frac{\partial}{\partial y_n}-\eta_\alpha e_n'\frac{\partial}{\partial y_n}-e_n'\left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial y_n}\right)y_n\frac{\partial}{\partial y_n}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

将(2.11)右端视为 $y_n\dfrac{\partial}{\partial y_n}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial y_j}\,(j<n)$ 的多项式, 则第二式右端的系数仅依赖于 e_n' 的一阶导数. 而在第一式右端的系数, 除 e_n' 的一阶导数外,还会出现 $\dfrac{1}{y_n}\dfrac{\partial e_n'}{\partial y_j}$, 这与 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_n}$ 在 $y_n=0$ 的值有关, 但若仅将第一式右端视为 $\dfrac{\partial}{\partial y_n}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ $(j<n)$的多项式,则系数就只依赖于 e_n 的切向导数.

类似地对 $i\leqslant n$, 考察 $[D_{\sigma_1}, \cdots, D_{\sigma_s}, M_i]$, 它可以表为

$$\sum_{l\leqslant s} p_{\sigma_1,\cdots,\sigma_s,i}^{\tau_1,\cdots,\tau_l} D_{\tau_1}\cdots D_{\tau_l}, \tag{2.12}$$

其中 $p_{\sigma_1\cdots\sigma_s,i}^{\tau_1\cdots\tau_l}$ 依赖于 v 以及 v 的直到 $s-l+1\,(l\geqslant 1)$ 阶切边导数. 又若考察 $[D_{\sigma_1}\cdots D_{\sigma_s}, M_n']$, 它亦可表示为

$$\sum_{l\leqslant s} q_{\sigma_1,\cdots,\sigma_s,n}^{\tau_1,\cdots,\tau_l} D_{\tau_1}\cdots D_{\tau_l}, \tag{2.13}$$

其中 $q_{\sigma_1,\cdots,\sigma_s,n}^{\tau_1,\cdots,\tau_l}$ 至多依赖于 v 及 v 的直到 $s-l+2\,(l\geqslant 1)$ 阶导数, 其中至多含一次法向导数. 但若允许 (2.13) 的表示式中出现一个法向算子, 则其系数就至多依赖于 $s-l+1\,(l=1)$ 阶导数, 也至多含一次法向导数.

现在将切边算子作用于(2.6), (2.7)式两端, 并利用能量积分法对 V_α 进行估计.

若 $v\in B_p(\mu)$, 则 $\|v\|_{H_{4m+4}}\leqslant\mu$, 由嵌入定理知 $|v|_{C_{3m+4}}\leqslant C(\mu)$, 在(2.6), (2.7) 两边作用 $2m+4$ 个切边算子, 再用能量积分法可知 $\|v_\alpha\|_{H^{4m+4}}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}$.

由(2.6)式可以将 $\frac{\partial V_\alpha^1}{\partial y_n}$ 解出，得到

$$\frac{\partial V_\alpha^1}{\partial y_n}=B_1^{-1}\Big(E^1V+F^1+\sum_{j=0}^{n-1}A_j^1\frac{\partial V_\alpha^1}{\partial y_j}\Big). \tag{2.14}$$

故 $\|V_\alpha^1\|_{H_1^{2m+4}}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}$. 在(2.7)两边作用算子 $\frac{\partial}{\partial y_n}$，得到关于 $V_{\alpha n}^2=\frac{\partial}{\partial y_n}V_\alpha^2$ 的方程

$$\sum_{i=0}^{n-1}A_j^{22}\frac{\partial V_{\alpha n}^2}{\partial y_j}+B_2\frac{\partial V_{\alpha n}^2}{\partial y_n}=\frac{\partial}{\partial y_n}(E^2V+F^2)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial A_j^2}{\partial y_n}\frac{\partial V_\alpha}{\partial y_j}-\frac{\partial B_2}{\partial y_n}\frac{\partial V_\alpha^2}{\partial y_n}-\sum_{j=0}^{n-1}A_j^{21}\frac{\partial V_{\alpha n}^1}{\partial y_j}. \tag{2.15}$$

注意到 B_2 在 $y_n=0$ 上为零阵，则可以由能量积分法得到 $\|V_{\alpha n}^2\|_{H^{2m+2}}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}$，因而 $\|V_\alpha^2\|_{H_1^{2m+3}}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}$，再代入(2.14)，得 $\|V_\alpha^1\|_{H_2^{2m+3}}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}$，如此等等. 最后可得 $\|V_\alpha\|_{H_{m+2}}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}$，并由嵌入定理得知 $|V_\alpha|_{C_2}\leqslant C(\mu)$.

再回头考察(2.6)、(2.7). 关于方程组两端求 p 次切边导数，得

$$\sum_{j=0}^{n}A_j(y,\ v)\frac{\partial}{\partial y_j}(D_{\sigma_1}\cdots D_{\sigma_p}V_\alpha)=R, \tag{2.16}$$

其中 R 为关于 v 及 V_α 的微分表达式. 据前面关于换位算子的分析可知，若保留关于 V_α 的一次法向微商，则 R 的系数中就只出现关于 v 的切向微商，从而若 R 中关于 V_α 的求导次数超过 $\frac{p}{2}$，则我们仅保留关于 V_α 的切向导数，若关于 V_α 的求导次数小于 $\frac{p}{2}$，则保留 V_α 关于的法向导数. 于是，由 $v\in B_p(\mu)$，$|v_\alpha|_{C_2}\leqslant C(\mu)$ 以及文[2]中的引理 2(由 $f_1,\ \cdots,\ f_l\in B_p(\mu)$ 可推得 $\prod_{i=1}^{l}f_i\in B_p(\mu)$)，可以得到

$$\|R\|_{L^2}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}(\|V\|_{B_p}+1). \tag{2.17}$$

从而有

$$\|V_\alpha\|_{H^p}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}(\|V\|_{B_p}+1). \tag{2.18}$$

再将 V_α 分成两组 V_α^1 与 V_α^2，反复利用(2.14)与(2.15)式，可以得到

$$\|V_\alpha\|_{B_p}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}(\|V\|_{B_p}+1). \tag{2.19}$$

对每个 Ω_α 都作如此估计，由 $\sum V_\alpha=V$，即可导出

$$\|V\|_{B_p}\leqslant\sum\|V_\alpha\|_{B_p}\leqslant C(\mu)h^{\frac{1}{2}}(\|V_{B_p}+1). \tag{2.20}$$

于是，取 h 充分小，即有 $\|V\|_{B_p}\leqslant\mu$.

往后的证明可以与文[2, 4]中给出的办法类似地进行，为完整起见，在此再简述如下：

取 $B_p(\mu)$ 按 B_p 范数作出的闭包为 K，对于 $u\in K$，就有 $u_n\in B_p(\mu)$，$\|u_n-u\|_{B_p}\to 0$，记 $U_n=T(u_n)$，则 $W=U_{n_1}-U_{n_2}$ 满足方程

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x,\ u_{n_1})\frac{\partial W}{\partial x_i}=f(x,\ u_{n_1})-f(x,\ u_{n_2})+\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i(x,\ u_{n_1})-\alpha_i(x,\ u_{n_2}))\frac{\partial U_{n_2}}{\partial x_i}. \tag{2.21}$$

利用与前面讨论类似的方法可知

$$\|W|_{B_{p-2}}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}}\|u_{n_1}-u_{n_2}\|_{B_{p-2}}. \tag{2.22}$$

故当 h 充分小时，T 按 B_{p-2} 的范数来说是一个压缩算子，从而 $\{U_n\}$ 按 B_{p-2} 范数是一个收敛序列，极限为 U，但 $\|U_n\|_{B_p}$ 一致有界，故由 Banach-Saks 定理知 $U\in K$，即 T 为 $K\to K$ 的映照．再从任一元素 $u_0\in K$ 出发，作

$$u_{n+1}=Tu_n, \tag{2.23}$$

则 $\|u_n\|_{B_p}$ 一致有界．利用 T 在 B_{p-2} 中的压缩性，可得到 $u_n\to u(B_{p-2})$．在(2.23)两边取极限得

$$u=Tu,$$

就此得到了问题(1.1)—(1.3)的解的存在性．这个解 u 的 B_{p-2} 范数有界，故 $u\in H_{4m+3}\subset C_{3m+3}$，它是古典解．

关于唯一性的证明亦可按通常处理非线性方程的方法导出．这里从略．

§3. 对气体动力学方程组的应用

前面建立的定理可以应用于气体动力学方程组．已知三维空间中的无粘定常流方程组在柱坐标系(r, θ, z)中的形式为

$$\begin{pmatrix} \rho u_z & & & 1 \\ & \rho u_z & & \\ & & \rho u_z & \\ 1 & & & a^{-2}\rho^{-1}u_z \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} u_z \\ u_r \\ u_\theta \\ p \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} \rho u_r & & & 1 \\ & \rho u_r & & \\ & & \rho u_r & \\ 1 & & & a^{-2}\rho^{-1}u_r \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} u_z \\ u_r \\ u_\theta \\ p \end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{r}\begin{pmatrix} \rho u_\theta & & & \\ & \rho u_\theta & & \\ & & \rho u_\theta & 1 \\ & & 1 & a^{-2}\rho^{-1}u_\theta \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \theta}\begin{pmatrix} u_z \\ u_r \\ u_\theta \\ p \end{pmatrix}+\frac{1}{r}\begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_z u_r \\ \rho(u_r^2-u_\theta^2) \\ 2\rho u_r u_\theta \end{pmatrix}=0, \tag{3.1}$$

其中 u_z, u_r, u_θ 表示流体速度在 z, r, θ 方向的分量，p, ρ, a 分别表示压力、密度与音速，它们还满足代数关系式

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(u_z^2+u_r^2+u_\theta^2)+\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}=\text{常数}, \\ a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

考察在区域 $[0, h]\times\Omega$ 中的流动，其中 Ω 为 $z=0$ 平面上的一个有界区域，且设 Ω 的边界包含两部分：Γ_1 与 Γ_2，在 $t=0$ 上给出初始条件

$$u=\varphi. \tag{3.3}$$

这个初始条件自然应当是有物理意义的，故由此决定的 p, ρ 均大于 0，我们又要求由它决

定的 u_z 是超音速的：$u_z>a$. 并设边界 $[0, h]\times\Gamma_i(i=1, 2)$ 为固壁边界，则流体沿壁面流动. 于是边界条件为

$$n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta=0, \tag{3.4}$$

其中 (n_z, n_r, n_θ) 为 $[0, h]\times\Gamma_i$ 的法向.

今逐一验证第一节中条件 i)—iii) 对问题 (3.1)—(3.4) 是满足的. 由于 $z=0$ 时 $u_z>a$, 则 (3.1) 中 $\frac{\partial}{\partial z}$ 的系数阵是正定的. 因此，当 $\|u\|_{B_p}\leqslant\mu$ 时，只要 h 充分小，$\frac{\partial}{\partial z}$ 的系数阵恒为正定，故条件 i) 成立. 又对于 $[0, h]\times\Gamma_i$ 上的边界点作出的 β 矩阵为

$$\beta=\sum_{i=1}^{3}n_iA^i$$
$$=k\begin{pmatrix}\rho(n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta) & & & n_z\\ & \rho(n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta) & & n_r\\ & & \rho(n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta) & n_\theta\\ n_z & n_r & n_\theta & a^{-2}\rho^{-1}(n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta)\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

式中 n_1、n_2、n_3 是边界 $[0, h]\times\Gamma_i$ 在以 (z, r, θ) 为自变量的三维欧氏空间中对应面的法向分量. 它与物理空间中曲面 $[0, h]\times\Gamma_i$ 的法向分量 n_z, n_r, n_θ 有关系

$$n_z:n_r:n_\theta=n_1:n_2:\frac{1}{r}n_3. \tag{3.6}$$

因此，(3.5) 中 $k=\left(n_1^2+n_2^2+\left(\frac{1}{r}n_3\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 它是一个有界的正数. 由边界条件 (3.4) 知

$$\beta_0=k\begin{pmatrix}0 & & & n_z\\ & 0 & & n_r\\ & & 0 & n_\theta\\ n_z & n_r & n_\theta & 0\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

它与未知函数无关，且 $u\beta_0u=2k(n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta)p$ 而条件 (3.4) 又是 $u\beta_0u$ 的最大非负平面，故条件 ii) 满足.

不妨设 n_z, n_r, n_θ 已经以某种方式光滑地延拓到边界 $[0, h]\times\Omega$ 的邻域，则我们可令

$$g=\begin{pmatrix}-n_r & n_z & \\ & n_\theta & -n_r\\ n_z & n_r & n_\theta\end{pmatrix}; \tag{3.8}$$

$$Q=\left(\begin{array}{c|c}g^{-1} & 0\\ \hline 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1-n_z^2}{n_r} & \frac{n_zn_\theta}{n_r} & n_z & 0\\ n_z & n_\theta & n_r & 0\\ \frac{n_zn_\theta}{n_r} & -\frac{1-n_\theta^2}{n_r} & n_\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

通过矩阵乘法运算可得

$$Q'\beta(x,\ u)Q=Q'\left(k\rho(n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta)\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&a^{-2}\rho^{-2}\end{pmatrix}+\beta_0\right)Q$$

$$=k\rho(n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta)\left(\begin{array}{c|c}(g^{-1})'\cdot g^{-1}&\\\hline&a^{-2}\rho^{-2}\end{array}\right)+Q'\beta_0Q$$

$$=k\rho(n_zu_z+n_ru_r+n_\theta u_\theta)\begin{pmatrix}*&*&0&\\ *&*&&\\&&1&0\\0&&0&a^{-2}\rho^{-2}\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

在作变换 $u=Qv$ 以后边界条件 (3.4) 化为 $v_3=0$, 如有必要也容易转为未知函数的第一分量为 0, 所以条件 iii) 满足.

于是, 应用前已建立的存在定理 1 可得:

定理 2 对于问题 (3.1)—(3.4), 若初始条件 (3.3) 与边界条件 (3.4) 相容, 且由 (3.3) 决定的 $p,\ \rho>0,\ u_z>a$, 那末该问题的局部光滑解存在唯一.

注 1 若 $[0,\ h]\times\Gamma_i$ 之一个改为非特征. 则只要在非特征边界上取 [2] 中列举的稳定合格边界条件, 仍可以有局部光滑解的存在唯一性.

注 2 也可以不限于在 R^{n+1} 的乘积集 $[0,\ h]\times\Omega$ 中考察方程组 (1, 1), 可以将所讨论的区域改成由上底 $t=h$, 下底 $t=0$ 与光滑侧曲面 S 所围成的区域. 此时, 若 $t=0$ 上第一节条件 i) 成立, 又当 S 为非特征时, 边界条件取为稳定合格边界条件, 当 S 为特征时, 它与边界条件满足第一节给出的条件 ii), iii), 则我们可用相仿的方法证明当 h 充分小时初边值问题局部光滑解的存在唯一性. 应用于前例 (3.1), 所讨论的区域也可改为上底 $z=h$, 下底 $z=0$ 与光滑侧曲面 S 围成的区域, S 可以是固壁边界, 但不必是具有平行于 z 轴的母线的柱面. 这种情况在超音速绕流问题中特别有用(参见 [5])

最后, 我们指出, 定理 1 也可应用于非定常气流的气体动力学方程组

$$\begin{pmatrix}\rho&&&&\\&\rho&&&\\&&\rho&&\\&&&a^{-2}\rho^{-1}&\\&&&&1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\p\\s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\rho u_1&&&1&\\&\rho u_1&&&\\&&\rho u_1&&\\1&&&a^{-2}\rho^{-1}u_1&\\&&&&u_1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\p\\s\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\rho u_2&&&&\\&\rho u_2&&1&\\&&\rho u_2&&\\&1&&a^{-2}\rho^{-1}u_2&\\&&&&u_2\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\p\\s\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\rho u_3&&&&\\&\rho u_3&&&\\&&\rho u_3&1&\\&&1&a^{-2}\rho^{-1}u_3&\\&&&&u_3\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\p\\s\end{pmatrix}=0, \quad (3.11)$$

式中(u_1, u_2, u_3)表示流速，p, ρ, a 的意义同(3.1)式，s 表示熵，结合文[2]可以得到

定理 3 设给定了区域 Ω，它的边界由光滑曲面 S_+, S_-, S_0 组成，已知区域边界 S_0 为固壁边界，S_- 上气体流入 Ω，S_+ 上气体流出 Ω. 在 $S_\pm$ 上的法向分速不等于音速. 又若 $S_\pm$ 与 S_0 相邻. 则要求 $S_\pm$ 上法向分速必定是超音速的(这时 β 矩阵为正定或负定)，那末，只要在 $S_\pm$ 上的边界条件为稳定合格，S_0 上流动的法向速度为零，则在已知 $t=0$ 时的流动状态后，可到局部光滑解的存在唯一性.

参 考 文 献

[1] 谷超豪，正对称型方程组理论的一些发展和应用，复旦大学数学所数学论文集，(1964), 42—58.

[2] 陈恕行，拟线性对称双曲组的初边值问题及其应用，数学年刊，1: 3, 4 (1980), 511.

[3] Fn'edrichs, K. O., *Symmetric positive linear differential equations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418.

[4] 谷超豪，拟线性正对称方程组的边值问题及其对混合型方程的应用，数学学报 **21**: 2 (1978), 119—129.

[5] 谷超豪、陈恕行、陈光宇，用差分法解拟线性方程组的不定边界问题，应用数学学报，**1** (1978), 250—265.

[6] Ebin, D. G., *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1979), 1—20.

ON THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR QUASILINEAR SYMMETRIC HYPERBOLIC SYSTEM WITH CHARACTERISTIC BOUNDARY

CHEN SHUXING

(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper we discuss the initial-boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic system with characteristic boundary. Suppose Ω is a bounded domain, its boundary $\partial\Omega$ is sufficiently smooth. We consider the quasilinear symmetric hyperbolic system

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x, u), \tag{1}$$

in the domain $[0, h] \times \Omega$. The initial-boundary conditions are

$$u|_{x_0=0} = 0, \tag{2}$$

$$Mu|_{[0,h]\times\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

(No loss of generality, the initial condition may be considered as homogeneous one). We assume the coefficients of (1), (3) are sufficiently smooth, the compatibility condition and the following conditions are satisfied.

1) when $t=0$, $u=0$, the $a_0(x, u)$ is a positive definite matrix.

2) If $\tilde{u}$ denotes any vector function satisfying the condition (3), the boundary

$[0, h]\times\partial\Omega$ is non-characteristic or regular characteristic for the operator $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x, \tilde{u})\times\frac{\partial}{\partial x_i}$. and if $\nu(0, \nu_1, \cdots, \nu_n)$ denotes the normal direction to the boundary, the matrix $\beta(x, \tilde{u})=\sum_{i=0}^{n}\nu_i\alpha_i(x, \tilde{u})$ is equal to β_0, which only depends on x, and $Mu=0$ is a maximum non-negative subspace of quanratic form $u\beta_0 u$.

3) There exists a non-singular matrix $Q(x)$, such that the matrix

$$\tilde{\beta}(x, v)=Q'(x)\beta(x, Q^{-1}v)Q(x)$$

may be reduced to a block diagonal matrix $\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ and the boundary condition may be reduced to

$$v_1=\cdots=v_L=0, \tag{4}$$

when (t, x) lies on the boundary $[0, h]\times\partial\Omega$, and v satisfies (4), the block B_1 will be equal to a non-singular matrix B_{10} and B_2 will vanish.

Under these assumptions, we have proved:

Theorem I. There exists a sufficiently small number δ, such that if $h\leqslant\delta$, the local smooth solution of the initial-boundary value problem (1)—(3) uniquely exists.

This theorem has been applied to gas dynamics. For both steady flow and unsteady flow in three dimentional space we can use Theorem I to obtain the result of the unique existance of local smooth solution for the correponding system of equations, if there isn't any shock wave.