数学年刊
3 (2) 1982

关于混合插值样条

黄达人 沙震
(浙江大学)

本文中我们提出一类特殊的 H–B 插值问题[1], 即所谓混合插值. 我们首先讨论五次样条, 它是将 Meir 和 Sharma[2] 的缺插值样条中的二阶导数的逐点插值换成一阶导数与二阶导数的交替插值. 然后又讨论了三次样条, 将[3]中讨论的(p)型插值改成一阶导数及函数值本身在节点处的交替插值. 我们研究了这两类样条的存在、唯一性, 并得到了它们的逼近度的估计, 我们发现这种样条在计算上有特殊的方便之处.

§1. 五次混合插值样条

设区间 $[0, 1]$ 的一个等距分划

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1,$$

$x_k=k/n$, n 为奇数, 且记 $h=1/n$. 我们讨论满足下列条件的五次样条 $s(x)$:

i) $s(x)\in C^3[0, 1]$;

ii) 在每一区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上, $s(x)$ 与某五次多项式重合;

iii)
$$\begin{aligned} &s_k=f_k, && k=0, 1, \cdots, n, \\ &s'_{2k+1}=f'_{2k+1}, && k=0, 1, \cdots, \frac{n-1}{2}, \\ &s''_{2k}=f''_{2k}, && k=0, 1, \cdots, \frac{n-1}{2}; \end{aligned} \tag{1}$$

iv) 边界条件: $s'_0=f'_0$, $s''_n=f''_n$, 这里, s_k, s'_k, s''_k, f_k, f'_k, f''_k 分别表示 $s(x_k)$, $s'(x_k)$, $s''(x_k)$, $f(x_k)$, $f'(x_k)$, $f''(x_k)$.

定理 1 满足 (1) 的五次样条 $s(x)$ 存在且唯一. 若 $f(x)\in C^r[0, 1]$ $(r=3, 4, 5)$, 则有常数 $K^{(1)}_{r.p}$, $K^{(2)}_{r.p}$, 使得成立

$$|s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)|\leqslant K^{(1)}_{r.p}h^{r-p}\|f^{(r)}\|+K^{(2)}_{r.p}h^{r-1-p}\omega_r(f, h), \quad 0\leqslant p\leqslant r-1,$$

$\left(这里 \omega_r(f, h) 表示 f^{(r)} 的连续模, s^{(4)}(x_k)\overset{\text{def.}}{=\!=\!=}\frac{1}{2}[s^{(4)}(x_k^+)+s^{(4)}(x_k^-)], k=1, \cdots, n-1.\right)$.

证 首先我们构作 $u_i(x)$ $(i=1, \cdots, 6)$ 如下

$$\begin{cases} u_1(x)=-6x^5+15x^4-10x^3+1, \\ u_2(x)=6x^5-15x^4+10x^3, \\ u_3(x)=-3x^5+8x^4-6x^3+x, \\ u_4(x)=-3x^5+7x^4-4x^3, \\ u_5(x)=-\dfrac{1}{2}(x^5-3x^4+3x^3-x^2), \\ u_6(x)=\dfrac{1}{2}(x^5-2x^4+x^3). \end{cases} \tag{2}$$

本文 1980 年 3 月 29 日收到, 1980 年 7 月 10 日修改.

$$\begin{cases} u_1^{(3)}(0)=-60, & u_1^{(3)}(1)=-60,\\ u_2^{(3)}(0)=60, & u_2^{(3)}(1)=60,\\ u_3^{(3)}(0)=-36, & u_3^{(3)}(1)=-24,\\ u_4^{(3)}(0)=-24, & u_4^{(3)}(1)=-36,\\ u_5^{(3)}(0)=-9, & u_5^{(3)}(1)=-3,\\ u_6^{(3)}(0)=3, & u_6^{(3)}(1)=9. \end{cases} \tag{3}$$

于是 $s(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式为

$$s(x)=s_i u_1\left(\frac{x-x_i}{h}\right)+s_{i+1}u_2\left(\frac{x-x_i}{h}\right)+hs_i' u_3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$
$$+hs_{i+1}' u_4\left(\frac{x-x_i}{h}\right)+h^2 s_i'' u_5\left(\frac{x-x_i}{h}\right)+h^2 s_{i+1}'' u_6\left(\frac{x-x_i}{h}\right).$$

以下我们简记 $u_i\left(\frac{x-x_k}{h}\right)$ 为 $u_{i,k}$. 由于 $s_{2k}''=f_{2k}''$, $s_{2k+1}'=f_{2k+1}'$, 所以在 $[x_{2k}, x_{2k+1}]$ 及 $[x_{2k-1}, x_{2k}]$ 上 $s(x)$ 的表达式分别为

$$s(x)=f_{2k}u_{1,2k}+f_{2k+1}u_{2,2k}+hs_{2k}'u_{3,2k}+hf_{2k+1}'u_{4,2k}$$
$$+h^2 f_{2k}'' u_{5,2k}+h^2 s_{2k+1}'' u_{6,2k} \quad x\in[x_{2k}, x_{2k+1}], \tag{4}$$

以及

$$s(x)=f_{2k-1}u_{1,2k-1}+f_{2k}u_{2,2k-1}+hf_{2k-1}'u_{3,2k-1}+hs_{2k}'u_{4,2k-1}$$
$$+h^2 s_{2k-1}'' u_{5,2k-1}+h^2 f_{2k}'' u_{6,2k-1}, \quad x\in[x_{2k-1}, x_{2k}]. \tag{5}$$

因 $s(x)\in C^3[0,1]$, 分别由 x_{2k}, x_{2k+1} 处三阶导数的连续性以及(3)式, 有连续性方程

$$s_{2k+1}''+s_{2k-1}''=\frac{20}{h^2}[-f_{2k-1}+2f_{2k}-f_{2k+1}]$$
$$+\frac{8}{h}[f_{2k+1}'-f_{2k-1}']+6f_{2k}'', \quad k=1, \cdots, \frac{n-1}{2}, \tag{6}$$

$$8h[s_{2k+2}'-s_{2k}']+6h^2 s_{2k+1}''=20[f_{2k}-2f_{2k+1}+f_{2k+2}]+h^2[f_{2k+2}''+f_{2k}''], \quad k=0, \cdots, \frac{n-3}{2}. \tag{7}$$

从(1)的边界条件知 $s_n''=f_n''$, 在(6)式中取 $k=\frac{n-1}{2}$, 可立即解得 s_{n-2}'', 依次取 $k=\frac{n-1}{2}-1, \cdots, 1$, 即可依次解出所有的 s_{2k+1}'', $\left(k=0, 1, \cdots, \frac{n-3}{2}\right)$. 然后在(7)式中取 $k=0$, 考虑到 $s(x)$ 的边界条件 $s_0'=f_0'$, 就可解得 s_2', 再依次取 $k=1, \cdots, \frac{n-3}{2}$, 就可解出所有的 s_{2k}', $k=1, \cdots, \frac{n-1}{2}$. 至此即证得了存在唯一性.

在(7)中取 k, $k-1$ 边边相加, 得

$$8(s_{2k+2}'-s_{2k-2}')=\frac{20}{h}(f_{2k-2}-2f_{2k-1}+2f_{2k}-2f_{2k+1}+f_{2k+2})$$
$$+h(f_{2k+2}''+2f_{2k}''+f_{2k-2}'')-6h(s_{2k+1}''+s_{2k-1}''),$$

将(6)式中 $s_{2k+1}''+s_{2k-1}''$ 的表达式代入得

$$8(s_{2k+2}'-s_{2k-2}')=\frac{20}{h}(f_{2k-2}-2f_{2k-1}+2f_{2k}-2f_{2k+1}+f_{2k+2})+h(f_{2k+2}''+2f_{2k}''+f_{2k-2}'')$$
$$-6h\left[\frac{20}{h^2}(-f_{2k-1}+2f_{2k}-f_{2k+1})+\frac{8}{h}(f_{2k+1}'-f_{2k-1}')+6f_{2k}''\right]$$
$$=\frac{20}{h}I_1+hI_2-6hI_3.$$

于是 $(s'_{2k+2}-f'_{2k+2})-(s'_{2k-2}-f'_{2k-2})=\frac{1}{8}\left(\frac{20}{h}I_1+hI_2-6hI_3\right)-(f'_{2k+2}-f'_{2k-2})$.

设 $f(x)\in C^5[0,1]$，利用泰勒展开式，易得

$$I_1=2h^2f''_{2k}+\frac{7}{6}h^4f^{(4)}_{2k}+\varphi_1^{(2k)}\frac{4(2^5+1)}{5!}\omega_5(f,h),$$

$$I_2=4f''_{2k}+4h^2f^{(4)}_{2k}+\varphi_2^{(2k)}\frac{2^5}{3!}h^3\omega_5(f,h),$$

$$I_3=2f''_{2k}+h^2f^{(4)}_{2k}+\varphi_3^{(2k)}h^3\omega_5(f,h),$$

$$f'_{2k+2}-f'_{2k-2}=4hf''_{2k}+\frac{8}{3}h^3f^{(4)}_{2k}+\varphi_4^{(2k)}\frac{8}{3}h^4\omega_5(f,h),$$

(这里 $|\varphi_j^{(m)}|\leqslant 1$, ($m$, j 为自然数)，以下出现的 $\theta_j^{(m)}$, $\theta^{(m)}$ 等都是满足 $|\theta_j^{(m)}|\leqslant 1$, $|\theta^{(m)}|\leqslant 1$ 的数，不再一一说明.）故所以

$$(s'_{2k+2}-f'_{2k+2})-(s'_{2k-2}-f'_{2k-2})=\theta_1^{(2k)}K_1h^4\omega_5(f,h), \tag{8}$$

取 $k=1, 3, \cdots, 2p-1$ 求和，利用 $s'_0=f'_0$，即得

$$s'_{4p}-f'_{4p}=\theta^{(4p)}\frac{K_1}{2}h^3\omega_5(f,h),\quad p=1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{4}\right], \tag{9}$$

在 (6) 中取 $k=\frac{n-1}{2}$，并记住 $s''_n=f''_n$，可得

$$s''_{n-2}=-f''_n+\frac{20}{h^2}(-f_{n-2}+2f_{n-1}-f_n)+\frac{8}{h}(f'_n-f'_{n-2})+6f''_{n-1} \tag{10}$$

在 (7) 中取 $k=\frac{n-1}{2}-1$，如果 $n-1=4m$，则写成

$$s'_{n-3}=s'_{n-1}+\frac{1}{8h}[6h^2s''_{n-2}-20(f_{n-3}-2f_{n-2}+f_{n-1})-h^2(f''_{n-1}+f''_{n-3})],$$

将 $s'_{n-1}=f'_{n-1}+\theta^{(n-1)}\frac{K_1}{2}h^3\omega_5(f,h)$ 代入，并将 s''_{n-2} 用 (10) 式代入，还是用泰勒展开式，得

$$s'_{n-3}-f'_{n-3}=\theta^{(n-1)}\frac{K_1}{2}h^3\omega_5(f,h)+\theta_1^{(n-3)}K_2h^4\omega_5(f,h).$$

(如果 $n-1=4m+2$，则 $n-3=4m$，从而 $s'_{n-3}=f'_{n-3}+\theta^{(n-3)}\frac{K_1}{2}h^3\omega_5(f,h)$，就对 $s'_{n-1}-f'_{n-1}$ 进行计算，以下讨论类似，我们仅讨论 $n-1=4m$ 的情形.)

再于 (8) 式中取 $k=\frac{n-2}{2}-2, \frac{n-1}{2}-4, \cdots, 2p$，并求和，联系到

$$s'_{n-3}-f'_{n-3}=\theta^{(n-1)}\frac{K_1}{2}h^3\omega_5(f,h)+\theta_1^{(n-3)}K_2h^4\omega_5(f,h),$$

并记 $\max(K_1, K_2)=K$，可得

$$s'_{4p-2}-f'_{4p-2}=\theta^{(4p-2)}Kh^3\omega_5(f,h)$$

连同 (9) 式，我们已证得了

$$s'_{2k}-f'_{2k}=\theta^{(2k)}Kh^3\omega_5(f,h),\quad k=1, \cdots, \frac{n-1}{2}. \tag{11}$$

将 (7) 式中的 s'_{2k+2}, s'_{2k} 分别以 $f'_{2k+2}+\theta^{(2k+2)}Kh^3\omega_5(f,h)$ 及 $f'_{2k}+\theta^{(2k)}Kh^3\omega_5(f,h)$ 代入，得

$$s''_{2k+1}-f''_{2k+1}=\frac{1}{6h^2}[20(f_{2k}-2f_{2k+1}+f_{2k+2})+h^2(f''_{2k+2}+f''_{2k})-8h(f'_{2k+2}-f'_{2k})]$$
$$-f''_{2k+1}-\frac{4}{3}(\theta^{(2k+2)}-\theta^{(2k)})Kh^2\omega_5(f,h),$$

仍用泰勒展开式，容易得到

$$|s''_{2k+1}-f''_{2k+1}|\leqslant\frac{8}{3}Kh^2\omega_5(f,h)+\frac{61}{18}h^3\omega_5(f,h)$$
$$\leqslant\widetilde{K}h^2\omega_5(f,h),\quad k=0,1,\cdots,\frac{n-3}{2},\quad(\widetilde{K}\text{ 为某常数}).\tag{12}$$

现在可以来估计 $s(x)-f(x)$ 了，并不失一般性，可设 $x\in[x_{2k},x_{2k+1}]$，在(4)式中分别以 $s'_{2k}=f'_{2k}+\theta^{(2k)}Kh^3\omega_5(f,h)$，$s''_{2k+1}=f''_{2k+1}+\theta^{(2k+1)}\widetilde{K}h^2\omega_5(f,h)$ 代入，并分别将 f_{2k+1}，f'_{2k+1}，f''_{2k+1} 在 x_{2k} 处展开，得

$$s(x)=f_{2k}(u_{1,2k}+u_{2,2k})+hf'_{2k}(u_{2,2k}+u_{3,2k}+u_{4,2k})$$
$$+h^2f''_{2k}\left(\frac{1}{2}u_{2,2k}+u_{4,2k}+u_{5,2k}+u_{6,2k}\right)+h^3f^{(3)}_{2k}\left(\frac{1}{6}u_{2,2k}+\frac{1}{2}u_{4,2k}+u_{6,2k}\right)$$
$$+h^4f^{(4)}_{2k}\left(\frac{1}{24}u_{2,2k}+\frac{1}{6}u_{4,2k}+\frac{1}{2}u_{6,2k}\right)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x_{2k}+\zeta^{(1)}_{2k}h)u_{2,2k}$$
$$+\frac{h^5}{4!}f^{(5)}(x_{2k}+\zeta^{(2)}_{2k}h)u_{4,2k}+h^4(\theta^{(2k)}Ku_{3,2k}+\theta^{(2k+1)}\widetilde{K}u_{6,2k})\omega_5(f,h),$$

这里 $0<\zeta^{(1)}_{2k}<1$，$0<\zeta^{(2)}_{2k}<1$，而 $u_{i,2k}$ 表示 $u_i\left(\frac{x-x_{2k}}{h}\right)$，将 $u_i(x)$ 的表达式代入，计算得

$$s(x)=f_{2k}+(x-x_{2k})f'_{2k}+\frac{1}{2}(x-x_{2k})^2f''_{2k}+\frac{1}{6}(x-x_{2k})^3f'''_{2k}+\frac{1}{24}(x-x_{2k})^4f^{(4)}_{2k}$$
$$+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x_{2k}+\zeta^{(1)}_{2k}h)u_{2,2k}+\frac{h^5}{4!}f^{(5)}(x_{2k}+\zeta^{(2)}_{2k}h)u_{4,2k}$$
$$+h^4(\theta^{(2k)}Ku_{3,2k}+\theta^{(2k+1)}\widetilde{K}u_{6,2k})\omega_5(f,h),$$

因 $|u_i(x)|$ 一致有界 $(x\in[0,1])$，故而有常数 $K^{(1)}_{5,0}$，$K^{(2)}_{5,0}$，使

$$|s(x)-f(x)|\leqslant h^5K^{(1)}_{5,0}\|f^{(5)}\|+h^4K^{(2)}_{5,0}\omega_5(f,h).$$

用同样的方法还可以估计 $s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)$，$p=1,2,3,4$，$\left(\text{其中 } s^{(4)}(x_k)\overset{\text{def.}}{=\!=}\frac{1}{2}[s^{(4)}(x_k^+)+s^{(4)}(x_k^-)],\ k=1,\cdots,n-1\right)$，例如，将(4)式求导两次，仍设 $x\in[x_{2k},x_{2k+1}]$，

$$s''(x)=\frac{f_{2k}}{h^2}u''_{1,2k}+\frac{f_{2k+1}}{h^2}u''_{2,2k}+\frac{s'_{2k}}{h}u''_{3,2k}+\frac{f'_{2k+1}}{h}u''_{4,2k}+f''_{2k}u''_{5,2k}+s''_{2k+1}u''_{6,2k},$$

(这里 $u''_{i,2k}$ 表示 $u''_i(t)\big|_{t=\frac{x-x_{2k}}{h}}$)，以 $s'_{2k}=f'_{2k}+\theta^{(2k)}Kh^3\omega_5(f,h)$，$s''_{2k+1}=f''_{2k+1}+\theta^{(2k+1)}\widetilde{K}h^2\omega_5(f,h)$ 代入，并将 f_{2k+1}，f'_{2k+1}，f''_{2k+1} 分别在 x_{2k} 处展开，容易得

$$|s''(x)-f''(x)|\leqslant K^{(1)}_{5,2}h^3\|f^{(5)}\|+K^{(2)}_{5,2}h^2\omega_5(f,L),$$

$K^{(1)}_{5,2}$，$K^{(2)}_{5,2}$ 为与 f，n 无关的正常数。

类似地处理，即证得

$$|s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)|\leqslant K^{(1)}_{5,p}h^{5-p}\|f^{(5)}\|+K^{(2)}_{5,p}h^{4-p}\omega_5(f,h).$$

对 $f(x)\in C^r[0,1]$，$r=3,4$ 的证明类似。 证毕。

推论 当$f\in C^6[0,1]$时

$$s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)=O(h^{5-p}),\quad p=0,1,\cdots,4.$$

§2. 三次混合插值样条

仍设$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，表示$[0,1]$的一个等距分划，n为奇数，$x_k=\frac{k}{n}$，$h=\frac{1}{n}$. 我们讨论满足如下条件的三次样条$s(x)$：

i) $s(x)\in C^2[0,1]$,

ii) 在每一区间$[x_k,x_{k+1}]$上，$s(x)$与某三次多项式重合，

iii)
$$s_{2k-1}=f_{2k-1},\quad k=1,\cdots,\frac{n+1}{2},\tag{13}$$
$$s'_{2k}=f'_{2k},\quad k=0,\cdots,\frac{n-1}{2},$$

iv) 边界条件：$s'_n=f'_n$，$s_0=f_0$

定理 2 满足(13)的三次样条$s(x)$存在且唯一. 当$f\in C^r[0,1]$时，有常数$\overline{K}^{(1)}_{r,p}$，$\overline{K}^{(2)}_{r,p}$，成立着：

$$|s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)|\leqslant\overline{K}^{(1)}_{r,p}h^{r-p}\|f^{(r)}\|+\overline{K}^{(2)}_{r,p}h^{r-1-p}\omega_r(f,h),\quad 0\leqslant p\leqslant r-1,\ 2\leqslant r\leqslant 4.$$

$\left(\text{这里 } s^{(3)}(x_k)\overset{\text{def.}}{=\!=}\frac{1}{2}[s^{(3)}(x_k^+)+s^{(3)}(x_k^-)],\ k=1,\cdots,n-1\right).$

证 设$u_{ij}(x)$是三次多项式，满足

$$u_{ij}^{(l)}(k)=\begin{cases}1, & i=l\text{ 且 }j=k;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\quad(i,j,k,l\text{ 均只取 }0,1),$$

于是

$$\begin{cases}u_{00}(x)=2x^3-3x^2+1,\\ u_{10}(x)=x^3-2x^2+x,\\ u_{01}(x)=-2x^3+3x^2,\\ u_{11}(x)=x^3-x^2.\end{cases}\tag{14}$$

$s(x)$有表达式. $\left(u_{ij,2k}\text{ 表示 }u_{ij}\left(\frac{x-x_{2k}}{h}\right)\right).$

$$s(x)=s_{2k}u_{00,2k}+f_{2k+1}u_{01,2k}+hf'_{2k}u_{10,2k}+hs'_{2k+1}u_{11,2k},\quad x_{2k}\leqslant x\leqslant x_{2k+1},\ k=0,1,\cdots,\frac{n-1}{2},\tag{15}$$

$$s(x)=f_{2k-1}u_{00,2k-1}+s_{2k}u_{01,2k-1}+hs'_{2k-1}u_{10,2k-1}+hf'_{2k}u_{11,2k-1},\quad x_{2k-1}\leqslant x\leqslant x_{2k},\ k=1,\cdots,\frac{n-1}{2}.\tag{16}$$

因$s(x)\in C^2[0,1]$，由x_{2k+1}，x_{2k}处二阶导数的连续性，有方程组

$$\frac{3}{h}(s_{2k+2}-s_{2k})-4s'_{2k+1}=f'_{2k+2}+f'_{2k},\quad\left(k=0,1,\cdots,\frac{n-3}{2}\right).\tag{17}$$

$$s'_{2k+1}-s'_{2k-1}=\frac{3}{h}(f_{2k+1}-f_{2k-1})-4f'_{2k},\quad\left(k=1,\cdots,\frac{n-1}{2}\right).\tag{18}$$

从(18),注意到边界条件 $s'_n=f'_n$, 可逐个解得 s'_{2k+1}, $k=0, 1, \cdots, \frac{n-3}{2}$, 再代入(17),注意到边界条件 $s_0=f_0$, 即可逐个解得 s_{2k}, $k=1, \cdots, \frac{n-1}{2}$, 这就证明了存在唯一性.

从(17)易得

$$\frac{3}{h}(s_{4p}-s_{4p-4})=4(s'_{4p-1}+s'_{4p-3})+f'_{4p}+2f'_{4p-2}+f'_{4p-4}$$

$$=\frac{12}{h}(f_{4p-1}-f_{4p-3})+f'_{4p}-14f'_{4p-2}+f'_{4p-4},$$

后一等式是将 $s'_{4p-1}+s'_{4p-3}$ 用(18)式代而得到,从而

$$(s_{4p}-f_{4p})-(s_{4p-4}-f_{4p-4})=4(f_{4p-1}-f_{4p-3})-(f_{4p}-f_{4p-4})$$
$$+\frac{h}{3}(f'_{4p}-14f'_{4p-2}+f'_{4p-4}).$$

设 $f(x)\in C^4[0, 1]$, 把右边各项分别在 x_{4p-2} 处展开,就得

$$(s_{4p}-f_{4p})-(s_{4p-4}-f_{4p-4})=\theta_1^{(4p-2)}K_1^*h^4\omega_4(f, h). \tag{19}$$

于是(以下 K_1^*, K_2^*, K^*, $\widetilde{K}^*$ 都表示某个正的常数)

$$s_{4p}-f_{4p}=\theta^{(4p)}\frac{K_1^*}{2}h^3\omega_4(f, h), \quad p=1, \cdots, \left[\frac{n}{4}\right]. \tag{20}$$

完全类同五次样条的做法,设 $n-1=4m$(或 $n-1=4m-2$),可得

$$s_{n-3}-f_{n-3}=\theta^{(n-1)}\frac{K_1^*}{2}h^3\omega_4(f, h)+\theta_1^{(n-3)}K_2^*h^4\omega_4(f, h),$$

$\left(\text{或 } s_{n-1}-f_{n-1}=\theta^{(n-3)}\frac{K_1^*}{2}h^3\omega_4(f, h)+\theta_1^{(n-1)}K_2^*h^4\omega_4(f, h)\right)$, 结合(19)式,就得

$$s_{4p-2}-f_{4p-2}=\theta^{(4p-2)}K^*h^3\omega_4(f, h),$$

结合(20)式知有

$$|s_{2k}-f_{2k}|\leqslant K^*h^3\omega_4(f, h), \quad k=1, \cdots, \frac{n-1}{2}.$$

将此结果代入(17)式,可得

$$|s'_{2k+1}-f'_{2k+1}|\leqslant\widetilde{K}^*h^2\omega_4(f, h), \quad k=0, 1\cdots, \frac{n-3}{2}.$$

为估计 $s(x)$ 对 $f(x)$ 的逼近度,不失一般性,可设 $x\in[x_{2k-1}, x_{2k}]$, 在(16)式中以 $s_{2k}=f_{2k}+\theta^{(2k)}K^*h^3\omega_4(f, h)$, $s'_{2k-1}=f'_{2k-1}+\theta^{(2k-1)}\widetilde{K}^*h^2\omega_4(f, h)$ 代入,并将 f_{2k}, f'_{2k} 在 x_{2k-1} 处展开,得

$$\begin{aligned}s(x)=&f_{2k-1}(u_{00,2k-1}+u_{01,2k-1})+hf'_{2k-1}(u_{01,2k-1}+u_{10,2k-1}+u_{11,2k-1})\\&+h^2f''_{2k-1}\left(\frac{1}{2}u_{01,2k-1}+u_{11,2k-1}\right)+h^3f'''_{2k-1}\left(\frac{1}{3!}u_{01,2k-1}+\frac{1}{2}u_{11,2k-1}\right)\\&+\frac{1}{3!}f^{(4)}(x_{2k-1}+\eta_{2k-1}^{(1)}h)h^4u_{11,2k-1}+\frac{1}{4!}f^{(4)}(x_{2k-1}+\eta_{2k-1}^{(2)}h)h^4u_{01,2k-1}\\&+h^3(\theta^{(2k)}K^*u_{01,2k-1}+\theta^{(2k-1)}\widetilde{K}^*u_{10,2k-1})\omega_4(f, h),\end{aligned}$$

这里 $0<\eta_{2k-1}^{(1)}<1$, $0<\eta_{2k-1}^{(2)}<1$, $u_{ij,2k-1}$ 表示 $u_{ij}\left(\frac{x-x_{2k-1}}{h}\right)$, 由 $|u_{ij}(x)|$ 关于 $x\in[0, 1]$ 的一致有界性,有常数 $\overline{K}_{40}^{(1)}$, $\overline{K}_{40}^{(2)}$, 使得成立

$$|s(x)-f(x)|\leqslant\overline{K}_{40}^{(1)}h^4\|f^{(4)}\|+\overline{K}_{40}^{(2)}h^3\omega_4(f, h).$$

类似地可得

$$|s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)|\leqslant \overline{K}_{4,p}^{(1)}h^{4-p}\|f^{(4)}\|+\overline{K}_{4p}^{(2)}h^{3-p}\omega_4(f,\ h)\quad 1\leqslant p\leqslant 3$$

对 $f\in C^r[0,\ 1]$，$r=2,\ 3$ 的结论同样可证．证毕．

推论 当 $f\in C^5[0,\ 1]$ 时

$$s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)=O(h^{4-p}),\quad 0\leqslant p\leqslant 3.$$

从前面证明过程中可以看出，上述两类样条函数的相应参数很容易求得，而且每次都只须解一个一元一次方程，这是它们的优点．

最后我们讨论当分划为偶数时的情况．

设 Δ: $0=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=1$，$x_{k+1}-x_k=\frac{1}{2n}$，$k=0,\ \cdots 2n-1$，记 $h=\frac{1}{2n}$，我们是否可以找到对应于 Δ 的三次样条 $s(x)\in C^2[0,\ 1]$，使满足

$$\begin{cases} s_i=y_i, & i=1,\ 3,\ \cdots,\ 2n-1,\ 0,\ 2n, \\ s_i'=m_i, & i=0,\ 2,\ \cdots,\ 2n-2,\ 2n. \end{cases}\tag{21}$$

定理 3 仅当 $2n=4r+2$（r 是自然数）时，满足 (21) 的三次样条存在唯一．

证 利用等距节点时三次样条的基本关系式

$$m_{j-1}+4m_j+m_{j+1}=\frac{3}{h}(y_j-y_{j-1})+\frac{3}{h}(y_{j+1}-y_j),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-1,$$

可得方程组

$$\begin{cases} 4hs_1'-3s_2=-3y_0-hm_0-hm_2 \\ hs_1'+hs_3'=-3y_1+3y_3-4hm_2 \\ 3s_2+4hs_3'-3s_4=-hm_2-hm_4 \\ hm_3+hm_5=-3y_3+3y_5-4hm_4 \\ \cdots\cdots \\ 3s_{2k-2}+4hs_{2k-1}'-3s_{2k}=-hm_{2k-2}-hm_{2k} \\ hm_{2k-1}'+hs_{3k+1}'=-3y_{2k-1}+3y_{2k+1}-4hm_{2k} \\ \cdots\cdots \\ hs_{2n-3}'+hs_{2n-1}'=-3y_{2n-1}+3y_{2n-1}-4hm_{2n-2} \\ 3s_{2n-2}+4hs_{2n-1}'=3y_{2n}-hm_{2n-2}-hm_{2n} \end{cases}$$

计有 $(2n-1)$ 个方程，相应的系数矩阵我们记为 G_{2n-1}，用 $|G_{2n-1}|$ 表示它的行列式．通过直接计算，易得 $|G_3|=0$，$|G_5|=36h^2$．

一般的有递推关系式

$$|G_{2n-1}|=(3h)^2|G_{2n-5}|,$$

故而仅当 $2n-1=4r+1$（r 是自然数）时 G_{2n-1} 才满秩，这就证明了定理．

参 考 文 献

[1] Melkman, A. A., Hermite-Birkhoff interpolation by splines, *J. Approx. Theory*, **19** (1977), 259—279.

[2] Meir, A. and Sharma, A., Lacunary interpolation by splines, *SIAM J. Numer. Anal.*, 10 (1973), 433—442.

[3] 沙震，(P)、(Q) 型插值样条的逼近度（尚未发表）．

ON MIXED INTERPOLATING SPLINES

HUANG DAREN SHA ZHEN
(*Zhejiang University*)

ABSTRACT

Suppose that n is odd and $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ is an equality spaced partition of the interval $[0, 1]$. We deal with the follwing mixed interpolating splines:

(1) Quintic spline $s(x)$ satisfying

i) $s(x)\in C_3[0, 1]$,

ii) $s(x_k)=f(x_k)$, $k=0, 1, \cdots, n$,

$s'(x_{2k+1})=f'(x_{2k+1})$, $k=0, 1, \cdots, \dfrac{n-1}{2}$.

$s''(x_{2k})=f''(x_{2k})$, $k=0, 1, \cdots, \dfrac{n-1}{2}$,

iii) $s'(x_0)=f'(x_0)$, $s''(x_n)=f''(x_n)$;

(2) Cubic spline $s(x)$ satisfying

i) $s(x)\in C^2[0, 1]$,

ii) $s(x_{2k-1})=f(x_{2k-1})$, $k=1, \cdots, \dfrac{n+1}{2}$,

$s'(x_{2k})=f'(x_{2k})$, $k=0, \cdots, \dfrac{n-1}{2}$

iii) $s'(x_n)=f'(x_n)$; $s(x_0)=f(x_0)$

The main results are as follows:

Theorem 1. There exists a unique quintic spline $s(x)$ satisfying (1). If $f(x)\in C^r[0, 1]$, then

$$|s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)|\leqslant K^{(1)}_{r,p}h^{r-p}\|f^{(r)}\|+K^{(2)}_{r,p}h^{r-1-p}\omega_r(f, h),\quad 0\leqslant p\leqslant r-1,\ 3\leqslant r\leqslant 5,$$

here, $K^{(1)}_{r,p}$, $K^{(2)}_{r,p}$ are constants.

Theorm 2. There exists a unique cubic spline $s(x)$ satisfying (2). If $f(x)\in C^r[0, 1]$, then

$$|s^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)|\leqslant \overline{K}^{(1)}_{r,p}h^{r-p}\|f^{(r)}\|+\overline{K}^{(2)}_{r-p}h^{r-1-p}\omega_r(f, h),\quad 0\leqslant p\leqslant r-1,\ 2\leqslant r\leqslant 4,$$

here, $\overline{K}^{(1)}_{r,p}$, $\overline{K}^{(2)}_{r,p}$ are constants.

Furthermore, there is some special convenience in determining the coefficients of those splines.