数 学 年 刊
3 (2) 1982

随机测度的绝对连续性与相互奇异性

戴 永 隆
(中山大学)

§1. 定义与问题

恒设 (X, d) 是可分完备距离空间. $\mathscr{A}$ 表示 X 上的 Borel 集类(开集产生的 σ 代数). 以 $\mathscr{B}$ 记 $\mathscr{A}$ 中全体有界集组成的集类.

显然 $\mathscr{B}$ 是一环, 但当 X 不是有界距离空间时, $\mathscr{B}$ 就不是 σ 环。虽然 $\mathscr{B}$ 不是 σ 环, 但对任意 $A\in\mathscr{B}$, $A\cap\mathscr{B}$ 是 σ 代数.

设 μ 是 $(X, \mathscr{A})$ 上的测度, 如对任意 $A\in\mathscr{B}$, $\mu(A)<+\infty$. 则称 μ 是局部有限测度. 即 μ 为局部有限测度是指对任意 $A\in\mathscr{B}$, μ 是 $(A, A\cap\mathscr{B})$ 上的全有限测度.

记 $\mathscr{A}$ 上全体局部有限测度为 M, 在 M 上引进 σ 代数 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ 是使得: 对一切 $A\in\mathscr{B}$, 由 M 至 $[0, \infty)$ 的映象

$$\mu\to\mu(A)$$

都是 $\mathfrak{M}$ 至 $\mathscr{B}_{[0,\infty)}$ 可测的最小 σ 代数.

$(M, \mathfrak{M})$ 称为局部有限测度空间.

现设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是任意概率空间. 由 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 至 $(M, \mathfrak{M})$ 的任一可测映象 $\xi(\omega)$ 称为随机测度.

在此也顺便给出点过程的定义: 设 $\mu\in M$, 如 $\mu(A)$ $(A\in\mathscr{B})$ 只取非负整数值, 则称 μ 是计数测度. 全体计数测度记作 N, 且有

$$N\in\mathfrak{M},$$

(这个结果可见 [1, 2]). 于是令

$$\mathscr{N}=N\cap\mathfrak{M},$$

则 $(N, \mathscr{N})$ 称为计数测度空间. 由 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 至 $(N, \mathscr{N})$ 的任一可测映象, 称为随机点过程.

上面所述各定义, 全部可见 [1, 2]. 特别是 [2], 它是研究随机测度很重要的专著.

和测度论的问题一样, 研究随机测度的绝对连续性和相互奇异性的问题也是重要的. 本文直接给出随机测度绝对连续性与相互奇异性的定义如下.

下面恒设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是完备概率空间, 若 ξ, η 是随机测度, 令 $\overline{\Omega}=\{\omega:\xi\perp\eta\}$, 称 $\xi\perp\eta$ 是指

$$P(\Omega-\overline{\Omega})=0.$$

又令 $\tilde{\Omega}=\{\omega:\xi\ll\eta\}$, 称 $\xi\ll\eta$ 是指

本文 1980 年 4 月 7 日收到, 1980 年 12 月 30 日修改.

$$P(\Omega-\tilde{\Omega})=0.$$

由于 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 的完备性，上述定义是可行的．在上述定义之下，应用测度论已有的结果证明了随机测度的勒贝格分解式（定理 1），然后得到随机测度绝对连续性与相互奇异性的几个等价命题(定理 2, 3)，特别是，随机测度的绝对连续性与相互奇异性等价于它们的 Campbell 测度的绝对连续性与相互奇异性，即等价于与随机测度相关联的一个普通测度的绝对连续性与相互奇异性．

文献[5]对非常广泛的随机测度进行了研究，特别也讨论了绝对连续性与相互奇异性的问题，然而本文的定义与结果与[5]都是有区别的，不难看出这种区别．

§2. Kakutani 距离

设 $\mu, \lambda\in M$，任取 $\gamma\in M$，使 $\mu\ll\gamma$, $\lambda\ll\gamma$，(例如取 $\gamma=\mu+\lambda$) 并令

$$\rho(\mu, \lambda)(A)=\int_A\sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma}\frac{d\lambda}{d\gamma}}\,d\gamma, \quad A\in\mathscr{B}, \tag{1}$$

其中 $\frac{d\mu}{d\gamma}$, $\frac{d\lambda}{d\gamma}$ 分别是 μ, λ 相对于 γ 的 Radon-Nikodym 导数．容易证明 $\rho(\mu, \lambda)(\cdot)$ 具有如下性质．

1) $\rho(\mu, \lambda)(\cdot)$ 是 $\mathscr{A}$ 上的局部有限测度，即 $\rho(\mu, \lambda)(\cdot)\in M$；

2) $\rho(\mu, \lambda)(\cdot)$ 与 γ 的选取无关．(参阅 [3] §1.4)；

3) $\rho(\mu, \lambda)(\cdot)\equiv 0$ 当且仅当 $\mu\perp\lambda$，见([3] §1.4)．

§3. Campbell 测度

设 ξ 是随机测度，令

$$I_\xi(A)=\int\xi(\omega, A)P(d\omega), \quad A\in\mathscr{B}, \tag{2}$$

并称它为 ξ 的强度测度，强度这一概念来自点过程(见 [1, 2])．

显然 $I_\xi(\cdot)$ 是 $(X, \mathscr{A})$ 上的测度，如果 $I_\xi\in M$，则称 ξ 有局部有限的强度测度．

如果 ξ 是随机测度，$I_\xi\in M$，在可测空间 $(\Omega\times X, \mathscr{F}\times\mathscr{A})$ 上定义

$$b_\xi(\Lambda\times A)=E(1_\Lambda(\omega)\xi(\omega, A))=\int_\Lambda\xi(\omega, A)P(d\omega), \quad \Lambda\in\mathscr{F}, A\in\mathscr{A}, \tag{3}$$

b_ξ 可以扩张为 $\mathscr{F}\times\mathscr{A}$ 上的测度，这个测度叫作 ξ 的 Campbell 测度(见 [2] §10, 或[1]第 5 章)．由 (2)、(3) 易见

$$b_\xi(\Omega\times A)=I_\xi(A). \tag{4}$$

$\Omega\times X$ 上定义的对 $\mathscr{F}\times\mathscr{A}$ 二元可测的非负函数 $f(\omega, x)$，如对任意 $A\in\mathscr{B}$ 满足条件

$$\int_{\Omega\times A}f(\omega, x)b_\xi(d\omega\times dx)<+\infty, \quad A\in\mathscr{B}, \tag{5}$$

则称 $f(\omega, x)$ 是局部可积的．当然，局部可积未必可积．记全体相对于 b_ξ 局部可积的非负二元可测函数为 L_ξ．

设 $f\in L_\xi$，则对任意 $A\in\mathscr{B}$，有

$$\int_A\int_A f(\omega,\ x)\xi(\omega,\ dx)\,P(d\omega)=\int_{A\times A}f(\omega,\ x)\,b_\xi(d\omega\times dx).\tag{6}$$

这个结果，也称为 Campbell 定理.

§4. 相互奇异性

记
$$\overline{M\times M}=\{(\mu,\ \lambda):\mu\in M,\ \lambda\in M,\ \mu\perp\lambda\}.$$

设 ξ, η 是随机测度，如果

$$P(\omega:(\xi,\ \eta)\notin\overline{M\times M})=0,$$

则称 ξ, η 相互奇异，记作 $\xi\perp\eta$. 由于 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 是完备的，上述定义表明 $(\omega:(\xi,\ \eta)\notin\overline{M\times M})$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个零测度. 从而当 $\xi\perp\eta$ 时，$\{\omega:(\xi,\ \eta)\in\overline{M\times M}\}$ 是可测集，且

$$P(\omega:(\xi,\ \eta)\in\overline{M\times M})=1.$$

引理 1　$\xi\perp\eta$ 当且仅当 $E(\rho(\xi,\ \eta)(A))=0,\ A\in\mathscr{B}$.

证　若 $\xi\perp\eta$，则对几乎所有 ω

$$\xi(\omega,\ \cdot)\perp\eta(\omega,\ \cdot)$$

由 §2 的 3) 推知，对任意 $A\in\mathscr{B}$ 有

$$\rho(\xi,\ \eta)(A)=0,\quad (\text{a. e. P}).$$

反之，如 $E(\rho(\xi,\ \eta)(A))=0$. 在 $(X,\ d)$ 上选取有界开集组成的可数基 $\mathscr{U}$，对任意 $c\in\mathscr{U}$，存在 $A_0\in\mathscr{F}$ 使 $P(A_0)=0$，且当 $\omega\notin A_0$ 时有

$$\rho(\xi(\omega,\ \cdot),\ \eta(\omega,\ \cdot))(c)=0.$$

令 $A=\bigcup A_0$，则当 $\omega\notin A$ 时，有

$$\xi(\omega,\ \cdot)\perp\eta(\omega,\ \cdot),$$

故 $\xi\perp\eta$.　　证毕.

引理 2　若 ξ, η 是随机测度，$b_\xi\perp b_\eta$，则 $\xi\perp\eta$.

证　由 $b_\xi\perp b_\eta$，故存在 $H\in\mathscr{F}\times\mathscr{A}$ 使

$$b_\xi(H)=0,\quad b_\eta(\Omega\times X-H)=0.$$

H 的几乎所有 ω 截口 H_ω 都可测且 $\xi(H_\omega)=0$，同时 $\eta(H^c_\omega)=0$ $(H^c_\omega=X-H_\omega)$. 故

$$\xi(\omega,\cdot)\perp\eta(\omega,\cdot)\quad(\text{a. e. P}),$$

即 $\xi\perp\eta$.　　证毕.

引理 2 之逆也是对的(见 §6 定理 3).

§5. Lebesgue 分解定理

定理 1　设 ξ、η 是随机测度，$I_\xi\in M$, $I_\eta\in M$，则存在唯一的 $f^*\in L_\eta$(在 a. e. b_η 意义之下)和唯一的随机测度 λ(在 a. e. P 意义之下)使 $\lambda\perp\eta$，且对任意 $A\in\mathscr{B}$ 成立

$$\xi(\omega,\ A)=\int_A f^*(\omega,\ x)\eta(\omega,\ dx)+\lambda(\omega,\ A).$$

证 记

$$F=\left\{f(\cdot,\ \cdot):f(\cdot,\ \cdot)\geqslant 0,\ \int_H f(\omega,\ x)b_\eta(d\omega\times dx)\leqslant b_\xi(H),\ H\in\mathscr{F}\times\mathscr{A}\right\}.$$

设 $f\in F$, 若令 $H=\Omega\times A$, $A\in\mathscr{B}$, 由 $b_\xi(\Omega\times A)=I_\xi(A)<\infty$(见(4), (5)式)就知 $F\subset L_\eta$. 对测度 b_η 几乎处处相等的 L_η 中的元看作是相同的.

由测度论的 Lebesgue 分解定理, 存在唯一的 $f\in F$, 使

$$b_\xi(H)=\int_H f(\omega,\ x)b_\eta(d\omega\times dx)+\varphi(H),\quad H\in\mathscr{F}\times\mathscr{A},\tag{8}$$

其中 $\varphi(\cdot)\perp b_\eta(\cdot)$. 令

$$\bar\lambda(\omega,\ A)=\xi(\omega,\ A)-\int_A f(\omega,\ x)\eta(\omega,\ dx),\quad A\in\mathscr{B}.$$

我们首先证明, 对任意固定的 $A\in\mathscr{B}$, $\bar\lambda(\omega,\ A)\geqslant 0$(a. e. P). 事实上, 若令

$$\Lambda=\{\omega:\bar\lambda(\omega,\ A)<0\},$$

如 $P(\Lambda)>0$, 则

$$\int_\Lambda\int_A f(\omega,\ x)\eta(\omega,\ dx)>\int_\Lambda \xi(\omega,\ A)P(d\omega)=b_\xi(\Lambda\times A),$$

这与 $f\in F$ 矛盾. 进而设 $\mathscr{U}$ 是有界开集组成的可数基. 对于每个 $c\in\mathscr{U}$. 令 $\Lambda_c=\{\omega:\bar\lambda(\omega,\ c)<0\}$, 则 $P(\Lambda_c)=0$. 又令 $\bar\Lambda=\bigcup_{c\in\mathscr{U}}\Lambda_c$. 得 $P(\bar\Lambda)=0$. 而对 $\omega\notin\bar\Lambda$, 均有 $\bar\lambda(\omega,\ A)\geqslant 0(A\in\mathscr{B})$. 现令

$$f^*(\omega,\ x)=\begin{cases}0, & \omega\in\bar\Lambda\\ f(\omega,\ x), & \omega\notin\bar\Lambda.\end{cases}$$

又令

$$\lambda(\omega,\ A)=\begin{cases}\bar\lambda(\omega,\ A), & \omega\in\Omega-\bar\Lambda,\\ 0, & \omega\in\bar\Lambda,\end{cases}$$

则 $\bar\lambda(\omega,\ \cdot)$ 是随机测度, 且容易算出

$$\varphi(H)=b_\lambda(H),\quad H\in\mathscr{F}\times\mathscr{A}.$$

由于 $\varphi(\cdot)\perp b_\eta(\cdot)$, 即 $b_\lambda(\cdot)\perp b_\eta(\cdot)$, 由引理 2, $\lambda\perp\eta$. **证毕.**

§6. 绝对连续性

记

$$\widetilde{M\times M}=\{(\mu,\ \lambda):\mu\in M,\ \lambda\in M,\ \mu\ll\lambda\}.$$

若 ξ, η 是随机测度, 满足

$$P(\omega:(\xi,\ \eta)\notin\widetilde{M\times M})=0,$$

则称 ξ 相对于 η 绝对连续. 记作 $\xi\ll\eta$. 由于 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 是完备的, 所以 $\xi\ll\eta$ 即 $\{\omega:(\xi,\ \eta)\notin\widetilde{M\times M})$ 是 $\mathscr{F}$ 零测集. 或者 $P(\omega:(\xi,\ \eta)\in\widetilde{M\times M})=1$.

定理 2 设 ξ, η 是随机测度, $I_\xi\in M$, $I_\eta\in M$, 则下述命题等价:

i) $\xi\ll\eta$;

ii) $b_\xi\ll b_\eta$;

iii) 存在 $f(\cdot,\cdot)\in L_\eta$ 使

$$\xi(\omega, A)=\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx), \quad \forall A\in\mathscr{B}\text{ (a. e. P)}.$$

证　(i)⇔(iii)．由定理 1，存在 $f(\cdot, \cdot)\in L_\eta$，使

$$\xi(\omega, A)=\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx)+\lambda(\omega, A), \quad \forall A\in\mathscr{B}\text{ (a. e. P)}.$$

若设 $\xi\ll\eta$，则存在 ω 零测集 Λ，使当 $\omega\notin\Lambda$ 时，$\xi(\omega, \cdot)\ll\eta(\omega, \cdot)$，故当 $\omega\notin\Lambda$ 时，$\lambda(\omega, A)\equiv 0$，$\forall A\in\mathscr{B}$．从而 (iii) 成立．反之，若 (iii) 成立，则显然有 (i)．

(ii)⇒(iii)．若 $b_\xi\ll b_\eta$，由测度论的 Lebesgne 分解定理，存在 $f(\cdot, \cdot)\in L_\eta$（相对 b_η 几乎处处意义下唯一）使

$$b_\xi(H)=\int_H f(\omega, x)b_\eta(d\omega\times dx), \quad H\in\mathscr{F}\times\mathscr{A}.$$

特别令 $H=\Lambda\times A$，$\Lambda\in\mathscr{F}$，$A\in\mathscr{B}$ 有

$$\int_\Lambda \xi(\omega, A)P(d\omega)=\int_\Lambda\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx)P(d\omega). \tag{9}$$

我们证明，当 A 固定时

$$\xi(\omega, A)=\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx) \quad \text{(a. e. P)}. \tag{10}$$

事实上，利用 (9) 这是显然的，因为若设

$$\Lambda=\left\{\omega:\xi(\omega, A)>\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx)\right\},$$

对于这个 Λ，若 $P(\Lambda)>0$，(9) 式就不成立．

问题是，(10) 式中的例外集是依赖于 A 的．现在要选定一个不依赖于 A 的零测集 Λ^*，使当 $\omega\notin\Lambda^*$ 时，恒有

$$\xi(\omega, A)=\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx), \quad A\in\mathscr{B}. \tag{11}$$

选取 (X, d) 的由可列个有界开集所组成的基 $\mathscr{U}$．由于 $\xi(\omega, \cdot)$ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度（固定 $\omega\in\Omega$），当 $f(\omega, x)$ 选定时，$\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx)$ 也是 $\mathscr{A}$ 上的测度（$\omega\in\Omega$ 固定）．这两个测度被 $\mathscr{U}$ 上的集所完全确定．因此，对任意 $c\in\mathscr{U}$，选取 Λ_c，使当 $\omega\notin\Lambda_c$ 时有

$$\xi(\omega, c)=\int_c f(\omega, x)\eta(\omega, dx),$$

而 $P(\Lambda_c)=0$．令 $\Lambda^*=\bigcup\limits_{c\in\mathscr{U}}\Lambda_c$，则 Λ^* 显然符合我们的要求，即当 $\omega\notin\Lambda^*$ 时，(11) 成立而 $P(\Lambda^*)=0$．于是证明了 (ii)⇒(iii)．

(iii)⇒(ii) 由 Campbell 定理推出（§ 3）．　　证毕．

最后，对于相互奇异性，也将它写成下面较完整的形式．

定理 3　设 ξ, η 是随机测度，$I_\xi\in M$，$I_\eta\in M$，则下述命题等价：

i) $\xi\perp\eta$;

ii) $b_\xi\perp b_\eta$;

iii) $E(\rho(\xi, \eta)(A))=0$，$A\in\mathscr{B}$.

证　(i)⇔(iii) 即引理 1，(ii)⇒(i) 即引理 2．现只须证 (i)⇒(ii)．由于 Lebesgue 分

解定理，存在 $f(\cdot, \cdot)\in L_\eta$ 使

$$\xi(\omega, A)=\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx)+\lambda(\omega, A), \quad \forall A\in\mathscr{B}\ (\text{a. e. P}),$$

其中 $\lambda\perp\eta$，故 $\lambda(\omega,\cdot)\perp\eta(\omega,\cdot)$ (a. e. P)，又因 $\xi\perp\eta$，故 $\xi(\omega,\cdot)\perp\eta(\omega,\cdot)$ (a. e. P)，从而存在 $\Lambda\in\mathscr{F}$，$P(\Lambda)=0$，当 $\omega\notin\Lambda$ 时 $f(\omega,\cdot)=0$ (a. e. $\eta(\omega,\cdot)$)．于是当 $\omega\notin\Lambda$ 时，$\xi(\omega, A)=\lambda(\omega, A)$，$\forall A\in\mathscr{B}$．故 $b_\xi=b_\lambda\perp b_\eta$． 证毕.

注 当 I_ξ, I_η 不属于 M 时，通常的 Lebesgue 分解定理不能应用．上述定理的结论是否成立不得而知.

参 考 文 献

[1] Matthes, K., Kerstan, J. and Mecke, J., Infinitely Divisible Point Processes, Wiley. New York (1978).
[2] Kallenberg, O., Randon Measures, Akademie-verlag, Berlin, (1976).
[3] 夏道行，无穷维空间上测度与积分论(上册)，上海科学技术出版社，上海，(1965).
[4] 伊藤清，(刘璋温译)概率论，科学出版社，北京，(1963).
[5] 陈培德，随机测度论，数学学报，**19**: 3 (1976), 210—216.

ON ABSOLUTE CONTINUITY AND SINGULARITY OF RANDOM MEASURES

DAI YONGLONG
(*Zhongshan University*)

ABSTRACT

Let (X, d) be a separable complete metric space. Denote by $\mathscr{A}$ the class of all Borel sets of X, and let $\mathscr{B}$ be the subclass of all bounded sets in $\mathscr{A}$.

Let M be the set of those measures on $\mathscr{A}$ which are finite on $\mathscr{B}$. Denote by $\mathfrak{M}$ the smallest σ-algebra of M with respect to which the real-valued function $\mu \to \mu(A)$ $(\mu \in M)$ is measurable for all A in $\mathscr{B}$.

Suppose $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ is a complete probility space. By a random measure we mean any measurable mapping of $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ into $(M, \mathfrak{M})$.

Let ξ and η be random measures, say that ξ and η are singular to each other if

$$P(\omega:\xi \perp \eta)=1$$

and say that ξ is absolute continuous with respect to η if

$$P(\omega:\xi \ll \eta)=1.$$

For any random measure ξ, we define the Campbell measure by

$$b_\xi(\Lambda \times A)=\int_\Lambda \xi(\omega, A)P(d\omega), \quad \Lambda \in \mathscr{F},\ A \in \mathscr{B}$$

and the intensity measure by $I_\xi(A)=b_\xi(\Omega \times A)$. Say that I_ξ is local finite if $I_\xi \in M$.

A non-negative measurable function $f(\omega, x)$ on $\Omega \times X$ is called locally integrable with respect to ξ if the condition

$$\int_{\Omega \times A} f(\omega, x) b_\xi(d\omega \times dx) < \infty,$$

for all $A \in \mathscr{B}$ is satisfied. Denote by L_ξ the set of all locally integrable function with respect to ξ.

Theorem 1. Suppose ξ and η are random measures, $I_\xi \in M$ and $I_\eta \in M$. Then there exist a unique function $f \in I_\eta$ (in the meaning of a. e. b_η) and a unique random measure λ which is singular with respect to η, and satisfies

$$\xi(\omega, A)=\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx)+\lambda(\omega, A),$$

for all $A \in \mathscr{B}$.

Theorem 2. Suppose ξ and η are random measures, $I_\xi \in M$ and $I_\eta \in M$, then the following statements are equivalent:

(i) $\xi\ll\eta$;

(ii) $b_\xi\ll b_\eta$;

(iii) There exists a unique function $f\in L_\eta$ which satisfies

$$\xi(\omega, A)=\int_A f(\omega, x)\eta(\omega, dx), \quad A\in\mathscr{B}\,(\text{a. e. P}).$$

Theorem 3. Subject to the assumptions of Theorem 2, the following statements are equivalent:

(i) $\xi\perp\eta$;

(ii) $b_\xi\perp b_\eta$;

(iii) $E(\rho(\xi, \eta)(A))=0,\ A\in\mathscr{B}$,

where $\rho(\xi, \eta)(\cdot)$ is the Kakutani inner product between $\xi(\omega, \cdot)$ and $\eta(\omega, \cdot)$.