数 学 年 刊
3 (2) 1982

方阵分解为对合阵与对称阵的乘积

屠 伯 壎
(复旦大学)

Gustafson 等[1]证明了，域 Ω 上的任何么模阵(即行列式等于 ± 1 的阵)必可分解为个数不超过 4 个的、Ω 上的对合阵的乘积．而 Wonenburger 则证明了，当域 Ω 的特征数不等于 2 时，Ω 上的方阵可以分解为 Ω 上的两个对合阵的乘积的充分必要条件是，A 非异，且 A 与 A^{-1} 相似[2]，当 Ω 的特征数等于 2 时，Djoković 进一步证明了 Wonenburger 的结论仍然正确[3]．

本文首先给出了域 Ω 上的 Frobenius 阵的一些基本分解式，应用这些基本分解式，对方阵分解为对称阵乘积的问题．得到了与 Gustafson 等相仿的结论，并可把 Wonenburger-Djoković 的结论予以统一证明；应用这些分解式得到的其他结论，又可很快地推导出 Gustafson 等的结论．本文中所有结论的证明都是构造性的．

定义 设 A 是域 Ω 上的方阵，称 A 是对称阵，如果 A 与它的转置阵 A' 相等．称 A 为对合阵，如果 A 与它的逆阵 A^{-1} 相等．称 A 为正交阵，如果 A' 与 A^{-1} 相等．

定义 称域 Ω 上的 $n\times n$ 阵

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

为 Frobenius 阵，其中 1 是 Ω 的单位元素，$-a_i$ 是 a_i 的负元，$a_i\in\Omega$，$i=1, 2\cdots, n$．

记 $n\times n$ 阵

$$J_n=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

定理 1 把 Frobenius 阵作如下分块

$$F=\begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ E_{n-1} & \alpha \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha=(-a_{n-1}, -a_{n-2}, \cdots, -a_1)'$，$E_{n-1}$ 是 $(n-1)\times(n-1)$ 单位阵，则 F 必有下面的基本分解式：

(i) $$F=SJ_nB, \tag{1}$$

其中

本文 1980 年 4 月 28 日收到，1981 年 5 月 19 日修改．

$$S=\begin{pmatrix} -a_n & 0 \\ 0 & J_{n-1} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} E_{n-1} & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

即 S 是对称阵，B 是对合阵

(ii)
$$F=CQD, \tag{3}$$

其中 设 $a_n\neq 0$，而

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_n^{-1}\alpha & E_{n-1} \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \pm a_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

即 C 是对合阵，Q 是正交阵.

证 先证 (i)，下面的证明提供了(1)式的产生过程. 对 F 作"分块阵的初等变换"：把分块阵 F 的第1列右乘以 $n-1$ 维列向量 $-\alpha$，加到 F 的第2列上去，得到方阵

$$\begin{pmatrix} 0 & a_n \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix}=M.$$

于是存在"初等分块阵" $\begin{pmatrix} E_{n-1} & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，使得

$$F\begin{pmatrix} E_{n-1} & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=M=\begin{pmatrix} 0 & a_n \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

以 $\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 右乘(5)式两边，则得

$$FB=F\begin{pmatrix} E_{n-1} & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

易知 B 是对合阵，又因为

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ J_{n-1}^2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_n & 0 \\ 0 & J_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ J_{n-1} & 0 \end{pmatrix}=SJ_n. \tag{7}$$

由(6)式与(7)式，以及 B 的对合性质，即得(1)式.

又用与上面同样的证法，或者直接验证，即可得(3)式. 证毕.

由基本分解式 (i)，显然可得

定理 2 域 Ω 上的任何 $n\times n$ 阵 A 必可分解为两个对称阵与一个对合阵的乘积.

证 把 A 分解为

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_l \end{pmatrix}P, \tag{8}$$

其中 P 是 Ω 上的非异阵，F_i 都是 $n_i\times n_i$ Frobenius 阵，并且 $\sum\limits_{i=1}^{l}n_i=n$①.

对任一个 i，由(1)式，F_i 有分解式

$$F_i=S_iJ_{n_i}B_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l,$$

此处 S_i 与 J_{n_i} 是 Ω 上的对称阵，B_i 是对合阵，所以(8)式可以改写成

① 见 [4] 的第三章 § 11.

$$A=\left(P^{-1}\begin{pmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_l\end{pmatrix}P'^{-1}\right)\left(P'\begin{pmatrix} J_{n_1} & & & \\ & J_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_l}\end{pmatrix}P\right)\left(P^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_l\end{pmatrix}P\right),$$

易知上式右边的三个方阵的前两个恰好是 Ω 上的对称阵，而最后一个是 Ω 上的对合阵.

证毕.

由定理 2 即可讨论任意方阵分解为对称阵乘积的问题，先证明下列引理.

引理 1 域 Ω 上的任何对合阵必可分解为其个数不超过 2 个的、Ω 上的对称阵的乘积.

这是 [5] 中的定理 4 的证明过程中的第 ②、③ 两步（Ω 的特征数等于 2 与不等于 2）合并起来的结果. 这里就不重复证明它了.

由引理 1 及定理 2 显然可得

定理 3 域 Ω 上的任何方阵必可分解为其个数不超过 4 个的、Ω 上的对称阵的乘积.

今用基本分解式(ii)证明任意域上的 Wonenburger 定理. 先证

引理 2 设域 Ω 上的 $n-1$ 维列向量 $\alpha=(b_{n-1}, b_{n-2}, \cdots, b_1)'$ 的分量 b_i 满足

$$b_i\pm b_{n-i}=0, \quad i=1, 2, \cdots, n-1,$$

则必有

$$J_{n-1}\alpha\pm\alpha=0. \tag{9}$$

证 由假设 $b_i\pm b_{n-i}=0$, $i=1, 2\cdots, n-1$, 所以

$$J_{n-1}\alpha\pm\alpha=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}=0.$$

证毕.

引理 3 如果域 Ω 上的 Frobenius 阵 F 中的 $a_n=\pm1$, 而 $\alpha=(-a_{n-1}, -a_{n-2}, \cdots, -a_1)'$ 的 a_i 满足 $a_i\mp a_{n-i}=0$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, 则 F 必可分解为 Ω 上的一个对合阵与一个对合、对称阵的乘积.

证 当 $a_n=1$ 时，F 的基本分解式(ii) 可以改写成

$$F=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ E_{n-1} & \alpha\end{pmatrix}=CQ=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_{n-1} & 0\end{pmatrix} \tag{10}$$

(因为 $D=E_n$). 易知(10)式可以改写成

$$F=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ J_{n-1}^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & J_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ J_{n-1} & 0\end{pmatrix}=B_1J_n, \tag{11}$$

此处，$B_1=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & J_{n-1}\end{pmatrix}$. 显然 J_n 是对合、对称阵. 又由假设，$a_i-a_{n-i}=0$, $i=1, 2, \cdots, n-1$. 故由引理 2 可知，$\alpha-J_{n-1}\alpha=0$, 于是

$$B_1^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & J_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & J_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha+J_{n-1}\alpha & E_{n-1}\end{pmatrix}=E_n,$$

即 B_1 是对合阵，故由(11)式可知引理 3，当 $a_n=1$, $a_i-a_{n-i}=0$, $i=1, 2, \cdots, n-1$ 时，是

正确的

同理，当 $a_n=-1$ 时，由基本分解式 (ii)

$$F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ E_{n-1} & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\alpha & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ E_{n-1} & 0\end{pmatrix}, \tag{12}$$

把(12)式再改写成

$$F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & J_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ J_{n-1} & 0\end{pmatrix}=GJ_n. \tag{13}$$

由假设，当 $a_n=-1$ 时，$a_i+a_{n-i}=0$, $i=1, 2, \cdots, n-1$，故由引理 2 易证 $G=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & J_{n-1}\end{pmatrix}$ 也是对合阵.

证毕.

引理 4 设域 Ω 上的多项式 $d(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 的友阵是 Frobenius 阵 F, a_n 是 Ω 的非零元素，又设 F^{-1} 的特征多项式 $|\lambda E_n-F^{-1}|=d(\lambda)$，则必 $a_n=\pm1$，且 $a_i\mp a_{n-i}=0$, $i=1, 2, \cdots, n-1$.

证 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $d(\lambda)$ 的根，也就是 F 的特征值，故 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ 是 F^{-1} 的特征值，所以 $d(\lambda)$ 与 $|\lambda E_n-F^{-1}|$ 在 $d(\lambda)$ 的分解域 $\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\supseteq\Omega$ 上分别分解为

$$d(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda^{n-i}\quad(a_0=1), \tag{14}$$

$$|\lambda E_n-F^{-1}|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^{-1})=\sum_{i=1}^{n}b_i\lambda^{n-i}\quad(b_0=1), \tag{15}$$

且由 Vieta 公式可知

$$b_n=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}=a_n^{-1},$$

$$\begin{aligned}b_i&=(-1)^i\sum\lambda_{j_1}^{-1}\lambda_{j_2}^{-1}\cdots\lambda_{j_i}^{-1}=(-1)^i\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}\right)\sum\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\cdots\lambda_{k_{n-i}}\\&=a_n^{-1}a_{n-i},\quad i=1, \cdots, n-1.\end{aligned}$$

由假设 $d(\lambda)=|\lambda E_n-F^{-1}|$，故得

$$a_n=a_n^{-1},\quad a_i=a_n^{-1}a_{n-i},\quad i=1, 2, \cdots, n-1.$$

证毕.

由引理 3 与引理 4 可得下面的

定理 4(Wonenburger-Djoković) 域 Ω 上的方阵 A 可以分解为 Ω 上的两个对合阵乘积的充分必要条件是，A 非异，并且 A 与 A^{-1} 相似.

证 必要性是显然的，今证充分性.

设 A 的不变因子组（即 λ-阵 $\lambda E-A$ 的不变因子组）是 $1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_l(\lambda)$, $F_1, \cdots, F_l$ 是 $d_1(\lambda), \cdots, d_l(\lambda)$ 的友阵，则 A 应相似于它的 Frobenius 标准形，即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_l\end{pmatrix}$$

于是

$$P^{-1}A^{-1}P=\begin{pmatrix}F_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & F_l^{-1}\end{pmatrix}=K. \tag{16}$$

记 $\mu_i(\lambda)=|\lambda E_{n_i}-F_i^{-1}|$，则对任意 $F_i=\begin{pmatrix}0 & a_{n_i}\\ E_{n_i-1} & a_i\end{pmatrix}$，由于

$$F_i^{-1}=\begin{pmatrix}-a_ia_{n_i}^{-1} & E_{n_i-1}\\ -a_{n_i} & 0\end{pmatrix},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l,$$

故
$$\mu_i(\lambda)=\left|\lambda E_{n_i}-\begin{pmatrix}-d_ia_{n_i}^{-1} & E_{n_i-1}\\ -a_{n_i} & 0\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}* & -E_{n_i-1}\\ a_{n_i} & \lambda\end{vmatrix},\quad i=1,\ \cdots,\ l,$$

上式的 $*$ 号由于用不到，故不必写出，由上式 $\mu_i(\lambda)$ 有一个 n_i-1 阶子式等于 $(-1)^{n_i-1}$，故 $\lambda E_{n_i}-F_i^{-1}$ 的第 n_i-1 个行列式因子为 1，因而 $\lambda E_{n_i}-F_i^{-1}$ 的不变因子组是 $1,\ \cdots,\ 1,\ \mu_i(\lambda)$，故易知下列矩阵相抵

$$(\lambda E-K)=\begin{pmatrix}\lambda E_{n_1}-F_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda E_{n_l}-F_l^{-1}\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_l(\lambda)\end{pmatrix},\tag{17}$$

又因为 $d_i(\lambda)\,|\,d_{i+1}(\lambda)$，故 $d_i(\lambda)$ 的任一根必是 $d_{i+1}(\lambda)$ 的根，但 $\mu_i(\lambda)$ 的任一根是 $d_i(\lambda)$ 的任一根的逆元，故 $\mu_i(\lambda)$ 的任一根也必是 $\mu_{i+1}(\lambda)$ 的根，于是 $\mu_i(\lambda)\,|\,\mu_{i+1}(\lambda)$，$i=1,\cdots,l-1$，所以由 (17)，可知 $1,\ \cdots,\ 1,\ \mu_1(\lambda),\ \cdots,\ \mu_l(\lambda)$ 是 K 的不变因子组，再由 (16)，$1,\ \cdots,\ 1,\ \mu_1(\lambda),\ \cdots,\ \mu_l(\lambda)$ 也是 A^{-1} 的不变因子组．但由假设，A 与 A^{-1} 相似，故 $1,\ \cdots,\ 1,\ \mu_1(\lambda),\ \cdots,\ \mu_l(\lambda)$ 就是 A 的不变因子组．而 A 的不变因子是由 A 所唯一决定．故由 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，$\mu_i(\lambda)\,|\,\mu_{i+1}(\lambda)$ 可知，必有

$$d_i(\lambda)=\mu_i(\lambda)=|\lambda E_{n_i}-F_i|,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l.$$

于是由引理 4 及引理 3 即得

$$F_i=B_iJ_{n_i},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l.$$

此处 B_i，J_{n_i} 都是对合阵，所以

$$G_1=P\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_l\end{pmatrix}P^{-1},\quad G_2=P\begin{pmatrix}J_{n_1} & & & \\ & J_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_l}\end{pmatrix}P^{-1}$$

都是对合阵，且由(15)式可知 $A=G_1G_2$．　　证毕．

定理 4 的证明不仅把 Wonenburger 与 Djoković 的两个证明用另外的方法加以统一处理，而且明确指出了，求么模阵分解式的具体过程．

例　有理数域上的 3×3 阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 1/3 & 0 & 1\\ 1/3 & -7/2 & 7/2\end{pmatrix}$$

的不变因子是 $1,\ 1,\ \lambda^3-\frac{7}{2}\lambda^2+\frac{7}{2}\lambda-1$，由此可知 A 不但是么模阵，且 A 与 A^{-1} 相似，因为 A 与它的 Frobenius 阵相似 $A=P^{-1}FP$，而

$$F=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-7/2\\0&1&7/2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

于是由定理 4 的证明过程可知

$$A=\left(P^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\-7/2&0&1\\7/2&1&0\end{pmatrix}P\right)\left(P^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}P\right),$$

也即 A 可分解为如下两个对合阵的乘积.

$$A=\begin{pmatrix}0&3&-3\\1/3&0&1\\1/3&-7/2&7/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-7/6&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&-3\\1/3&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由定理 4 易得

系 1　域 Ω 上的正交阵必可分解为 Ω 上的两个对合阵的乘积.

证　由假设 $A'=A^{-1}$, 但 A 与 A' 在 Ω 上相似, 所以 A 与 A^{-1} 在 Ω 上相似, 而由定理 4 的充分性可知, A 可分解为 Ω 上两个对合阵的乘积.　证毕.

如果限制 Ω 为实数域, 则可得更强的结论, 即 A 可分解为两个对称、对合阵的乘积①.

今再用基本分解式(ii)证明其他一些结论, 并推导出 Gustafson 等的结论. 先证一个有用的引理.

引理 5　对任何正整数 $m>1$, $b_i\in\Omega$, 如果 $\prod\limits_{i=1}^{m}b_i\neq 0$, 0 是域 Ω 的零元素, 则 Ω 上的 Frobenius 阵必有分解式

$$F=\begin{pmatrix}0&-b_m\\E_{m-1}&\alpha\end{pmatrix}=TCQDT^{-1},\tag{18}$$

其中的 C、Q、D 分别是下面的对合阵, 正交阵与对角阵

$$C=\begin{pmatrix}-1&0\\\left(\prod\limits_{i=1}^{m}b_i\right)^{-1}\alpha&E_{m-1}\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&1\\E_{m-1}&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\left(\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i\right)^{-1}&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\\&&&&\prod\limits_{i=1}^{m}b_i\end{pmatrix}\tag{19}$$

而

$$T=\begin{pmatrix}\left(\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i\right)^{-1}&0\\0&E_{m-1}\end{pmatrix}.$$

证　用"送取法", 即作 F 的相似变换: 把 F 的第 1 行乘以 $\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i$, F 的第 1 列乘以 $\left(\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i\right)^{-1}$ (送入一对互逆元素) 于是

① 见 [5] 的定理 5

$$F=\begin{pmatrix}\left(\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i\right)^{-1} & 0\\ 0 & E_{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \prod\limits_{i=1}^{m}b_i\\ \left(\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i\right)^{-1} & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{m-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i & 0\\ 0 & E_{m-1}\end{pmatrix}, \tag{20}$$

再把(20)式右边的一个中间矩阵的元素 $\left(\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i\right)^{-1}$, $\prod\limits_{i=1}^{m}b_i$ 提(取)出来，即得

$$F=T\begin{pmatrix}0 & 1\\ E_{m-1} & \left(\prod\limits_{i=1}^{m}b_i\right)^{-1}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\prod\limits_{i=1}^{m-1}b_i\right)^{-1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \prod\limits_{i=1}^{m}b_i\end{pmatrix}T^{-1}, \tag{21}$$

把基本分解式(ii)应用于(21)式右边的第2个矩阵，即得(18)式.　　证毕.

引理 6　设域 Ω 上的对角阵 D 的每一主对角元的逆元也是一个主对角元(显然，当 D 为奇数阶阵时，D 至少必有一个主对角元是1或 -1)，则 D 必可分解为 Ω 上的一个正交阵与一个对合阵的乘积.

证　设 D 的主对角元是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 由假设 $a_j=a_i^{-1}$, 故必可找到 Ω 上的排列阵 P, 使

$$D=P\begin{pmatrix}a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_1^{-1} & \\ & & & & a_2^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}=(PJ_nP^{-1})P\begin{pmatrix} & & & & a_1^{-1}\\ & & & a_2^{-1} & \\ & & ⋰ & & \\ & a_2 & & & \\ a_1 & & & & \end{pmatrix}P^{-1}.$$

因为排列阵必是正交阵，而 J_n 也是正交阵，故 PJ_nP^{-1} 也是正交阵，易知

$$G=\begin{pmatrix} & & & & a_1^{-1}\\ & & & a_2^{-1} & \\ & & ⋰ & & \\ & a_2 & & & \\ a_1 & & & & \end{pmatrix}$$

是对合阵，故 PGP^{-1} 也是对合阵.　　证毕.

由引理5与引理6可得

定理 5　如果域 Ω 上的方阵 A 是幺模阵，则 A 必相似于方阵 CQB, 而 C, B 都是对合阵，Q 是正交阵.

证　因为 $n\times n$ 阵相似于它的 Frobenius 标准形

$$\begin{pmatrix}F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_l\end{pmatrix},$$

此处，F_i 为 $n_i\times n_i$ 阵，$\sum\limits_{i=1}^{l}n_i=n$, 而

$$F_i=\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ E_{n_i-1} & a_i \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \cdots, l.$$

由假设 A 是幺模阵, 故 $|A|=\pm 1$, 即 $\prod\limits_{i=1}^{l} a_i=\pm 1$, 由基本分解式(ii), 先把 F_1 写成

$$F_1=E_{n_1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_1^{-1}a_1 & E_{n_1-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_{n_1-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n_1-1} & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}E_{n_1}^{-1}=E_{n_1}(C_1Q_1D_1)E_{n_1}^{-1}. \tag{21}$$

又由引理5的(18)式与(19)式, F_i 可以写成

$$F_i=T_i(C_iQ_iD_i)T_i^{-1}, \quad i=2, \cdots, l, \tag{22}$$

而

$$D_i=\begin{pmatrix} \left(\prod\limits_{k=1}^{i-1} a_k\right)^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \prod\limits_{k=1}^{i-1} a_k \end{pmatrix}. \tag{23}$$

由于 C_i 都是对合阵, Q_i 都是正交阵, 故

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & & \\ & C_2 & \\ & & \ddots \\ & & & C_l \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & Q_2 & \\ & & \ddots \\ & & & Q_l \end{pmatrix}$$

分别是对合阵与正交阵, 且由(23)及 $\prod\limits_{k=1}^{l} a_k=\pm 1$ 易知矩阵

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & \\ & & \ddots \\ & & & D_l \end{pmatrix}$$

是主对角元两两互逆的对角阵. (显然, 当 $\sum\limits_{k=1}^{l} a_k=-1$ 时, D 的最后一个主对角元为 -1, 它与自己互逆). 记

$$T=\begin{pmatrix} E_{n_1} & & \\ & T_2 & \\ & & \ddots \\ & & & T_l \end{pmatrix}.$$

故由(21)式与(22)式可得

$$\begin{pmatrix} F_1 & & \\ & F_2 & \\ & & \ddots \\ & & & F_l \end{pmatrix}=TCUDT^{-1}. \tag{24}$$

由引理6, $D=VB$, 而 V 是正交阵, B 是对合阵, 记 $Q=UV$, 则 Q 也是正交阵, 且(24)式右边可写成 $TCQBT^{-1}$, 故 A 相似于 CQB. 证毕.

今由定理5立刻可得 Gustafson 等的结论, 即

定理6(Gustafson 等) 域 Ω 上的任何幺模阵必可分解为个数不超过4个的、Ω 上的对合阵的乘积.

证　由定理5，幺模阵 A 必有分解式

$$A=RCQBR^{-1} \tag{25}$$

此处 C, B 都是对合阵，而 Q 是正交阵，由系1，Q 可分解为两个对合阵 B_1 与 B_2 的乘积 $Q=B_1B_2$，把它代入(25)式，即得

$$A=(RCR^{-1})(RB_1R^{-1})(RB_2R^{-1})(RBR^{-1}).$$

证毕.

Gustafson 等提出，幺模阵是否可以分解为三个对合阵的乘积？① 今给出一个充分条件，即

定理7　设 A 是域 Ω 上的幺模阵，如果

(i) A 的不变因子组中只有一个非常数多项式；

或者，

(ii) A 的不变因子组中有两个次数相同的非常数多项式，且 $|A|=1$，

则 A 必可分解为 Ω 上的三个对合阵的乘积.

证　当 A 的不变因子组中只有一个非常数多项式，则 $A=PFP^{-1}$，而由基本分解式(ii)

$$F=\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ E_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \pm\alpha & E_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ E_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \pm\alpha & E_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ J_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{n-1} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

故 A 可分解为三个对合阵的乘积.

当 A 的不变因子组中有两个次数相同的非常数多项式，并且 $|A|=1$，则

$$A=P\begin{pmatrix} F_1 & \\ & F_2 \end{pmatrix}P^{-1} \tag{26}$$

而 F_1 与 F_2 必是

$$F_1=\begin{pmatrix} 0 & a \\ E_s & \alpha_1 \end{pmatrix},\quad F_2=\begin{pmatrix} 0 & -a^{-1} \\ E_s & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

于是仿照引理5的证法，用"送取法"把 F_1 写成

$$F_1=T_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ E_s & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}T_1^{-1},$$

于是由基本分解式(ii)，F_1 与 F_2 可分别写成

$$F_1=T_1\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha_1 & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_s & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}T_1^{-1}, \tag{27}$$

$$F_2=E_{s+1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha_2 & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_s & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix}E_{s+1}^{-1}, \tag{28}$$

① 见[1]

记
$$R=P\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & E_{s+1}\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \alpha_1 & E_s\end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix}-1 & 0\\ \alpha_2 & E_s\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$B_2=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ E_s & 0\end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix}0 & 1\\ E_s & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}J_{2s+2},\quad B_3=\begin{pmatrix} & & & a^{-1}\\ & & 1 & \\ & 1^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & & \\ a & & & \end{pmatrix}.$$

把(27)式与(28)式代入(26)式,即得

$$A=RB_1B_2B_3R^{-1}. \tag{29}$$

易知 B_1 与 B_3 都是对合阵,而

$$B_2=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ E_s & 0\end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix}0 & 1\\ E_s & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}J_{2s+2}=\begin{pmatrix}0 & \begin{pmatrix}0 & 1\\ E_s & 0\end{pmatrix}J_{s+1}\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ E_s & 0\end{pmatrix}J_{s+1} & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & J_s\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & J_s\end{pmatrix} & 0\end{pmatrix}.$$

易证 $B_2^2=E_{2s+2}$,故 B_2 也是对合阵,由(29)式即得

$$A=(RB_1R^{-1})(RB_2R^{-1})(RB_3R^{-1}) \tag{30}$$

(30)式右边的三个方阵显然都是对合阵. 证毕.

系 2 如果域 Ω 上的 $n\times n$ 么模阵 A 在 Ω 上有 n 个不同的特征根,则 A 必可分解为 Ω 上三个对合阵的乘积.

这是明显的. 因为在这个假设下, A 的不变因子中只有一个是非常数多项式,即 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, 此处的 $\lambda_1, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征根,所以由定理 7 的 (i) 可知, A 必能分解为 Ω 上三个对合阵的乘积.

参 考 文 献

[1] Gustafson, W. H., Halmos. F. R., Radjavi, H., Products of Involutions, *Lin. Alg. Appl.*, **13** (1976), 157—162.

[2] Wonenburger, M. J., Transformations which are products of two Involutions, *J. Math. Mech.*, **16** (1966), 327—338.

[3] Djokovic, P. Z., Products of two Involutions, *Arch. Math.*, **18** (1967), 582—584.

[4] Jacobson, N., Lectures in abstruct Algebra, V. II, Linear Algebra (1953).

[5] 屠伯壎,关于矩阵分解为对称阵的乘积,复旦学报, **19**: 3(1980), 239—248.

DECOMPOSITION OF MATRICES INTO INVOLUTORY MATRICES AND SYMMETRIC MATRICES

TU BOXUN
(*Fudan Universety*)

ABSTRACT

Let Ω be a field, and let F denote the Frobenius matrix:

$$F=\begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ E_{n-1} & \alpha \end{pmatrix},$$

where α is an $n-1$ dimentional vector over Ω, and E_{n-1} is identity matrix over Ω.

Theorem 1. There hold two elementary decompositions of Frobenius matrix:

(i) $$F=SJB,$$

where S, J are two symmetric matrices, and B is an involutory matrix;

(ii) $$F=CQD,$$

where C is an involutory matrix, Q is an orthogonal matrix over Ω, and D is a diagonal matrix.

We use the decomposition (i) to deduce the following two theorems:

Theorem 2. Every square matrix over Ω is a product of twe symmetric matrices and one involutory matrix.

Theorem 3. Every square matrix over Ω is a product of not more than four symmetric matrices.

By using the decomposition (ii), we easily verify the following

Theorem 4(Wonenburger-Djokovic'). The necessary and sufficient condition that a square matrix A may be decomposed as a product of two involutory matrices is that A is nonsingular and similar to its inverse A^{-1} over Ω (See [2, 3]).

We also use the decomosition (ii) to obtain

Theorem 5. Every unimodular matrix is similar to the matrix CQB, where C, B are two involutory matrices, and Q is an orthogonal matrix over Ω.

As a consequence of Theorem 5. we deduce immediately the following

Theorem 6 (Gustafson-Halmos-Radjavi). Every unimodular matrix may be decomposed as a product of not more than four involutory matrices (See [1]).

Finally, we use the decomposition (ii) to derive the following

Thoerem 7. If the unimodular matrix A possesses one invariant factor which is not constant polynomial, or the determinant of the unimodular matrix A is I and A possesses two invariant factors with the same degree (>0), then A may be decomposed as a product of three involutory matrices.

All of the proofs of the above theorems are constructive.