数学年刊
3 (3) 1982

指数鞅的一致及 L^p-可积性

严加安
(中国科学院应用数学研究所)

§1. 引言

令$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{P}(\mathscr{F}_t))$为一满足通常条件的空间. 设 M 为一零初值局部鞅, 且 $\Delta M\geqslant -1$. 令

$$\mathscr{E}(M)_t=\exp\left\{M_t-\frac{1}{2}\langle M^c,\ M^c\rangle_t\right\}\prod_{s\leqslant t}(1+\Delta M_s)e^{-\Delta M_s}.$$

则 $\mathscr{E}(M)$ 为非负局部鞅. 寻找使 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅的充分条件, 是随机控制及滤波理论中的一个重要问题. 在 M 为连续一致可积鞅情形, Новиков[1] 及 Kazamaki[2] 分别证明: 若 $\mathbf{E}\left[\exp\frac{1}{2}\langle M,\ M\rangle_\infty\right]<\infty$ 或 $\mathbf{E}\left[\exp\frac{1}{2}M_\infty\right]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅. Lépingle 及 Mémin 在[3, 4]中相继推广了这两个结果. 我们在[5]中部分地推广并改进了 Новиков 的结果. 本文综合[4]及[5]的方法, 改进 Lépingle 及 Mémin 的两个结果, 并研究 $\mathscr{E}(M)$ 的 L^p-可积性.

在本文中, 我们将经常用到如下两个基本引理(见[4]):

引理 1.1 设 M 为一致可积鞅 $\alpha>0$. 若 $\mathbf{E}[e^{\alpha M_\infty}]<\infty$, 则$(e^{\alpha M_t})$为一致可积下鞅.

证 由 Jensen 不等式推得.

引理 1.2 设 X、Y、Z 为三个非负右连续适应过程, 使得 $X\leqslant Y^aZ^{1-a}$, 其中 $0<a<1$ (a 为实数). 若 Y 在 L^1 中有界, Z 为类(D)过程, 则 X 为类(D)过程.

证 令 $\mathscr{C}$ 为有界停时全体. 则 $\forall s\in\mathscr{C},\ c\in\mathscr{F}$, 有

$$\mathbf{E}[I_cX_s]\leqslant(\mathbf{E}[Y_s])^a(\mathbf{E}[I_cZ_s])^{1-a}.$$

于是$(X_s)_{s\in\mathscr{C}}$为一致可积族.

现在我们以改进 Kazamaki 结果为例, 说明本文将采用的推理方法.

定理 1.3 设 M 为一连续一致可积鞅. 若 $\forall a,\ 0<a<1,\ \mathbf{E}\left[\exp(\frac{a}{2}M_\infty)\right]<\infty$, 且 $\varliminf\limits_{a\uparrow\uparrow1}\left(\mathbf{E}\left[\exp(\frac{a}{2}M_\infty)\right]\right)^{1-a}=1$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

证 设 $0<a<1$ 我们有

$$\mathscr{E}(aM)_t=\exp\left(aM_t-\frac{a^2}{2}\langle M,\ M\rangle_t\right)=\mathscr{E}(M)_t^{a^2}\left(\exp\left(\frac{a}{1+a}M_t\right)\right)^{1-a^2}.$$

由于 $\frac{a}{1+a}<\frac{1}{2}$. 故由引理 1.1 及 1.2 知, $\mathscr{E}(aM)$为一致可积鞅, 即 $\mathbf{E}[\mathscr{E}(aM)_\infty]=1$. 于是由 Hölder 不等式有

本文 1980 年 3 月 3 日收到.

$$1=\mathbf{E}[\mathscr{E}(aM)_\infty]\leqslant(\mathbf{E}[\mathscr{E}(M)_\infty])^{a^2}\left(\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+a}M_\infty\right)\right]\right)^{1-a^2} \tag{*}$$

但易知$\left(令 b=\dfrac{2a}{1+a}\right)$

$$\lim_{a\uparrow\uparrow1}\left(\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+a}M_\infty\right)\right]\right)^{1-a^2}=1\Leftrightarrow\lim_{a\uparrow\uparrow1}\left(\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{b}{2}M_\infty\right)\right]\right)^{1-b}=1.$$

故由(*)得 $\mathbf{E}[\mathscr{E}(M)_\infty]\geqslant1$. 但由于 $\mathscr{E}(M)$ 为非负上鞅, 恒有 $\mathbf{E}[\mathscr{E}(M)_\infty]\leqslant1$. 故得 $\mathbf{E}[\mathscr{E}(M)_\infty]=1$. 即 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

§2. 若干分析不等式

引理 2.1 设 $x>-1$, $0<a<1$, 则有

$$(1+x)e^{-\frac{x}{1+x}}\geqslant(1+ax)e^{-\frac{ax}{1+x}}\geqslant1. \tag{1}$$

证 令 $f(a)=\log(1+ax)-\dfrac{ax}{1+x}$, 则 $f(0)=0$,

$$f'(a)=\frac{x}{1+ax}-\frac{x}{1+x}=\frac{(1-a)x^2}{(1+x)(1+ax)}>0.$$

于是 $f(1)>f(a)>f(0)$. 由此推得(1)式.

引理 2.2 设 $0\geqslant x>-1$, $0<a<1$, 则有

$$\log(1+x)\leqslant\frac{2x}{2+x} \tag{2}$$

$$\frac{1+ax}{(1+x)^a}\leqslant(1+x)^{a(1-a)}e^{-\frac{a(1-a)x}{1+x}} \tag{3}$$

$$\frac{1+ax}{(1+x)^a}\leqslant\exp\frac{a(1-a)x^2}{(2+x)(1+x)} \tag{4}$$

证 令 $f(x)=\log(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}=\log(1+x)-2+\dfrac{4}{2+x}$, 则 $f(0)=0$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(2+x)^2}=\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}>0.\quad(0>x>-1).$$

于是当 $0>x>-1$ 时, 有 $f(x)<f(0)=0$. (2)式得证.

为证(3)式, 令

$$g(x)=\log(1+ax)-a(2-a)\log(1+x)+a(1-a)\frac{x}{1+x}.$$

则 $g(0)=0$

$$g'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{a(2-a)}{1+x}+\frac{a(1-a)}{(1+x)^2}=\frac{a(1-a)x}{(1+x)(1+ax)}-\frac{a(1-a)x}{(1+x)^2}$$
$$=\frac{a(1-a)^2x^2}{(1+x)^2(1+ax)}.$$

于是当 $0>x>-1$ 时, 有 $g'(x)>0$, 从而 $g(x)<g(0)=0$. 此即(3)式.

最后, 我们有

$$\frac{2x}{2+x}=\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{(2+x)(1+x)}.$$

于是由(2)得

$$(1+x)e^{-\frac{x}{1+x}} \leqslant \exp \frac{x^2}{(2+x)(1+x)}.$$

由此利用(3)立得(4).

引理 2.3 设 $0<a<1$, $0<\delta\leqslant 1$, $x\geqslant -1+\delta$,则有

$$\frac{1+ax}{(1+x)^a} \leqslant \exp \frac{a(1-a)x^2}{(1+\delta)\delta}. \tag{5}$$

证 若 $x\leqslant 0$, 则由(4)推得(5). 若 $x\geqslant 0$, 则易证

$$\frac{1+ax}{(1+x)^a} \leqslant \exp \frac{a(1-a)x^2}{2}.$$

由于 $(1+\delta)\delta\leqslant 2$,故由上式推得(5).

引理 2.4 设 $0<a<1$, $0<\delta\leqslant 1$, $\beta\leqslant\frac{a^2\delta}{1-a+a\delta}$. 则对任何 $x\geqslant -1+\delta$, 有

$$\frac{1+ax}{(1+x)^\beta} e^{-(a-\beta)x} \leqslant 1. \tag{6}$$

证 首先易证 $\beta\leqslant a^2<a$. 令

$$f(x)=\log(1+ax)-\beta\log(1+x)-(a-\beta)x,$$

则 $f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{\beta}{1+x}-(a-\beta)=\frac{\beta x}{1+x}-\frac{a^2x}{1+ax}=\frac{-x[a^2-\beta+a(a-\beta)x]}{(1+x)(1+ax)}$$

于是当 $x>0$ 时,有 $f'(x)<0$,从而 $f(x)<f(0)=0$; 当 $0>x>-\frac{a^2-\beta}{a(a-\beta)}$ 且 $x>-1$ 时,有 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)<f(0)=0$, 但当 $\beta\leqslant\frac{a^2\delta}{1-a+a\delta}$ 时,我们有 $\frac{a^2-\beta}{a(a-\beta)}\geqslant 1-\delta$,于是当 $0>x>-1+\delta$ 时,有 $f(x)<0$. (6)式得证.

引理 2.5 设 $0<\delta\leqslant 1$, $1<\alpha<\frac{1}{1-\delta}$, $\lambda\geqslant\frac{\alpha^2\delta}{1-\alpha+\alpha\delta}$. 则对任何 $x\geqslant -1+\delta$, 有

$$\frac{(1+x)^\lambda}{1+\alpha x} e^{-(\lambda-\alpha)x} \leqslant 1. \tag{7}$$

证 与(6)式证明完全类似.

§3. 指数鞅的一致可积性

定理 3.1 设 M 为一零初值局部鞅,且 $\Delta M>-1$. 令

$$W_t(a)=\exp\left(\frac{a}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leqslant t}(1+a\Delta M_s)\exp\left(-\frac{a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\right). \tag{8}$$

其中 $0<a\leqslant 1$,则 $(W_t(a))$ 为增过程. 若 $\forall 0<a<1$,有 $\mathbf{E}[W_\infty(a)]<\infty$,且

$$\lim_{a\uparrow 1}(\mathbf{E}[W_\infty(a)])^{1-a}=1,$$

则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

证 设 $0<a<1$, 由指数公式,我们有

$$\mathscr{E}(aM)_t=\exp\Big(aM_t-\frac{a^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\Big)\prod_{s\leqslant t}(1+a\Delta M_s)e^{-a\Delta M_s}$$

$$=\mathscr{E}(M)_t^a\exp\Big(\frac{a(1-a)}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\Big)\prod_{s\leqslant t}\frac{1+a\Delta M_s}{(1+\Delta M_s)^a}$$

$$=\mathscr{E}(M)_t^a W_t(a)^{1-a}\prod_{s\leqslant t}\Big(\frac{1+a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\exp\Big(\frac{(1-a)\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\Big)\Big)^a. \tag{9}$$

令 $x=\dfrac{1+a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}$, 则 $x>0$. 由初等不等式 $e^x\geqslant ex$ 得

$$\frac{1+a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\exp\Big(\frac{(1-a)\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\Big)=xe^{1-x}\leqslant 1.$$

故由(9)得

$$\mathscr{E}(aM)_t\leqslant\mathscr{E}(M)_t^a W_t(a)^{1-a}. \tag{10}$$

由(1)式知 $(W_t(a))$ 为增过程. 故按定理1.3的证明推理知 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

系 设 M 为一零初值局部鞅, 且 $\Delta M>-1$. 令

$$\overline{W}_t(a)=\exp\Big(\frac{a}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\Big)\prod_{s\leqslant t}(1+\Delta M_s)\exp\frac{-\Delta M_s}{1+\Delta M_s}. \tag{11}$$

若 $\forall 0<a<1$, 有 $\mathbf{E}[\overline{W}_\infty(a)]<\infty$, 且 $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1}(\mathbf{E}[\overline{W}_\infty(a)])^{1-a}=1$. 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅. 特别, 若 $\mathbf{E}[\overline{W}_\infty(1)]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅(见[3]或[4]).

证 由(1)知 $W_t(a)\leqslant\overline{W}_t(a)$. 故定理3.1的条件满足. (或者, 直接证明 $\mathscr{E}(aM)_t\leqslant\mathscr{E}(M)_t^a\overline{W}_t(a)^{1-a}$)

定理3.2 设 M 为一零初值局部鞅, 且 $\Delta M\geqslant -1+\delta$. 其中 $0<\delta\leqslant 1$. 令

$$H_t(a)=\exp\Big\{\frac{a}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t+\frac{a}{(1+\delta)\delta}[M^d, M^d]_t\Big\} \tag{12}$$

若 $\forall 0<a<1$, 有 $\mathbf{E}[H_\infty(a)]<\infty$, 且 $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1}(\mathbf{E}[H_\infty(a)])^{1-a}=1$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅. 特别, 若 $\mathbf{E}[H_\infty(1)]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

证 设 $0<a<1$. 由(9)我们有

$$\mathscr{E}(aM)_t=\mathscr{E}(M)_t^a\exp\Big(\frac{a(1-a)}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\Big)\prod_{s\leqslant t}\frac{1+a\Delta M_s}{(1+\Delta M_s)^a}.$$

利用不等式(5), 我们得到

$$\mathscr{E}(aM)_t\leqslant\mathscr{E}(M)_t^a H_t(a)^{1-a}. \tag{13}$$

由此推知 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅.

注　这一定理推广了[5]的定理2.

定理3.3 设 M 为一零初值一致可积鞅, 且 $\Delta M\geqslant -1+\delta$, 其中 $0<\delta\leqslant 1$. 若 $\forall 0<a<1$, 有 $\mathbf{E}\Big[\exp\Big(\frac{a}{1+\delta}M_\infty\Big)\Big]<\infty$, 且 $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1}\Big(\mathbf{E}\Big[\exp\Big(\frac{a}{1+\delta}M_\infty\Big)\Big]\Big)^{1-a}=1$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅. 特别, 若 $\mathbf{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{1+\delta}M_\infty\Big)\Big]<\infty$, 则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅(见[4]).

证 设 $0<a<1$, $\beta=\dfrac{a^2\delta}{1-a+a\delta}$. 由指数公式, 我们有

$$\mathscr{E}(aM)_t=\exp\left(aM_t-\frac{a^2}{2}\langle M^c,\ M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leqslant t}(1+a\Delta M_s)e^{-a\Delta M_s}$$

$$=\mathscr{E}(M)_t^\beta\exp\left[(a-\beta)M_t+\frac{\beta-a^2}{2}\langle M^c,\ M^c\rangle_t\right]\prod_{s\leqslant t}\frac{1+a\Delta M_s}{(1+\Delta M_s)^\beta}e^{-(a-\beta)\Delta M_s}.$$

由引理 2.4 及 $\beta\leqslant a^2$ 这一事实得

$$\mathscr{E}(aM)_t\leqslant\mathscr{E}(M)_t^\beta\exp(a-\beta)M_t=\mathscr{E}(M)_t^\beta\left(\exp\left(\frac{a-\beta}{1-\beta}M_t\right)\right)^{1-\beta}\tag{14}$$

注意 $\frac{a-\beta}{1-\beta}=\frac{a}{1+a\delta}<\frac{1}{1+\delta}$，故由引理 1.1 及 1.2 知，$\mathscr{E}(aM)$ 为一致可积鞅．此外，易知

$$\lim_{a\uparrow\uparrow 1}\left(\mathbf{E}\left[\exp\frac{a}{1+\delta}M_\infty\right]\right)^{1-a}=1\Leftrightarrow\lim_{a\uparrow\uparrow 1}\left(\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+a\delta}M_\infty\right)\right]\right)^{1-\beta}=1.$$

故按定理 1.3 的证明推理可证 $\mathbf{E}[\mathscr{E}(M)_\infty]=1$．即 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅．

系　设 M 为一零初值一致可积鞅，且 $\Delta M\geqslant-1+\delta$，其中 $0<\delta\leqslant1$，若存在自然数 k，使得当 $n\to\infty$ 时，有 $P(M_\infty>n)\sim n^ke^{-\frac{n}{1+\delta}}$，则 $\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅．

证　设 $\alpha>0$．由 Fubini 定理，我们有

$$\mathbf{E}[e^{\alpha M_\infty}]=\mathbf{E}\left[\int_{-\infty}^{M_\infty}\alpha e^{\alpha t}dt\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{\alpha t}\mathbf{P}(M_\infty>t)dt$$

故有

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}e^{\alpha n}\mathbf{P}(M_\infty>n+1)\leqslant\mathbf{E}[e^{\alpha M_\infty}]\leqslant1+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}e^{\alpha(n+1)}\mathbf{P}(M_\infty>n).$$

于是当 $a\uparrow\uparrow1$ 时，有

$$\mathbf{E}[e^{\frac{a}{1+\delta}M_\infty}]\sim\sum_{n=0}^{\infty}n^ke^{-\frac{1-a}{1+\delta}n}\sim\frac{k!}{(1-e^{-\frac{1-a}{1+\delta}})^{k+1}},$$

从而 $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow1}(\mathbf{E}[e^{\frac{a}{1+\delta}M_\infty}])^{1-a}=1$．于是由定理 3.3 知，$\mathscr{E}(M)$ 为一致可积鞅．

§4．指数鞅的 L^r-可积性

设 $r>1$．我们用 $\mathscr{H}^r$ 表示 L^r-可积鞅空间，并令 $\mathscr{H}^{r-}=\bigcap\limits_{1<\alpha<r}\mathscr{H}^\alpha$．

定理 4.1　设 $0<\delta\leqslant1$，$\Delta M\geqslant-1+\delta$．若存在 k，$1<k<\frac{1}{1-\delta}$，使得

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{k^2}{2}\langle M^c,\ M^c\rangle_\infty\right)\prod_s(1+\Delta M_s)^ke^{-\frac{k\Delta M_s}{1+k\Delta M_s}}\right]<\infty.$$

则 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$，其中 $r=\frac{k^2}{2k-1}$．

证　我们有

$$\mathscr{E}(M)_t^k=\exp\left(kM_t-\frac{k}{2}\langle M^c,\ M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leqslant t}(1+\Delta M_s)^ke^{-k\Delta M_s}$$

$$=\mathscr{E}(kM)_t\exp\left(\frac{k(k-1)}{2}\langle M^c,\ M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leqslant t}(1+\Delta M_s)^{k-1}e^{-\frac{(k-1)\Delta M_s}{1+k\Delta M_s}}$$

$$\cdot\prod_{s\leqslant t}\frac{1+\Delta M_s}{1+k\Delta M_s}e^{\frac{(k-1)\Delta M_s}{1+k\Delta M_s}}\leqslant\mathscr{E}(kM)_tA_t^{1-\frac{1}{k}},\tag{15}$$

其中 $$A_t=\exp\left(\frac{k^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leq t}(1+\Delta M_s)^k e^{-\frac{k\Delta M_s}{1+k\Delta M_s}}.$$

令 $r=\frac{k^2}{2k-1}$，则 $1<r<K$，且有

$$\frac{r}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{2k-1}=1-\frac{r}{k}.$$

故由(15)得

$$\mathscr{E}(M)_t^r\leq\mathscr{E}(kM)_t^{\frac{r}{k}}A_t^{1-\frac{r}{k}}.$$

但易知(A_t)为增过程，故由假定及引理1.2知，$\mathscr{E}(M)^r$为类(D)过程，即$\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$.

定理 4.2 设 $0<\delta\leq 1$, $\Delta M\geq -1+\delta$. 若存在 k, $1<k<\frac{1}{1-\delta}$，使得

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{\frac{k^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_\infty+\frac{k^2}{(1+\delta)\delta}[M^d, M^d]_\infty\right\}\right]<\infty.$$

则存在 $r>1$，使得 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$.

证 设 $1<\lambda<\frac{2}{1-\delta}$. 令 $\overline{M}=\lambda M$. 则 $\Delta\overline{M}\geq\lambda(-1+\delta)=-1+(1-\lambda+\lambda\delta)$. 令 $a=\frac{1}{\lambda}$. 则由(13)得

$$\mathscr{E}(M)_t\leq\mathscr{E}(\overline{M})_t^{\frac{1}{\lambda}}\overline{H}_t(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}}. \tag{16}$$

其中 $$\overline{H}_t(\lambda)=\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t+\frac{\lambda^2}{(2-\lambda+\lambda\delta)(1-\lambda+\lambda\delta)}[M^d, M^d]_t\right\}$$

故由(16)得

$$\mathscr{E}(M)_t^\lambda\leq\mathscr{E}(\lambda M)_t\overline{H}_t(\lambda)^{1-\frac{1}{\lambda}} \tag{17}$$

易知，存在 λ, $1<\lambda\leq k$，使得

$$\frac{\lambda^2}{(2-\lambda+\lambda\delta)(1-\lambda+\lambda\delta)}\leq\frac{k}{(1+\delta)\delta}$$

于是，如同定理4.1，由(17)推知$\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$，其中 $r=\frac{\lambda^2}{2\lambda-1}$.

注 这一定理推广了[5]的定理1.

定理 4.3 设 M 为一零初值一致可积鞅，且 $\Delta M\geq -1+\delta$，其中 $0<\delta\leq 1$. 若存在 $k>1$，使得 $\mathbf{E}\left[\exp\frac{k}{1+\delta}M_\infty\right]<\infty$，则当 $k<\frac{1}{1-\delta}$ 时，有 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$，其中 $r=\frac{k^2}{2k-1}$；当 $k\geq\frac{1}{1-\delta}$，有 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^{r-}$，其中 $r=\frac{1}{1-\delta^2}$.

证 设 $1<\alpha<\frac{1}{1-\delta}$，$\lambda=\frac{\alpha^2\delta}{1-\alpha+\alpha\delta}$. 由指数公式，有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(M)_t^\lambda&=\exp\left(\lambda M_t-\frac{\lambda}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leq t}(1+\Delta M_s)^\lambda e^{-\lambda\Delta M_s}\\&=\mathscr{E}(\alpha M)_t\exp\left((\lambda-\alpha)M_t+\frac{\alpha^2-\lambda}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leq t}\frac{(1+\Delta M_s)^\lambda}{1+\alpha\Delta M_s}e^{-(\lambda-\alpha)\Delta M_s}\end{aligned}$$

由引理2.5及 $\lambda\geq\alpha^2$ 这一事实得

$$\mathscr{E}(M)_t^\lambda\leq\mathscr{E}(\alpha M)_t\exp[(\lambda-\alpha)M_t].$$

令 $1<r<\lambda$. 则有

$$\mathscr{E}(M)_t^r \leqslant \mathscr{E}(\alpha M)_t^{\frac{r}{\lambda}} \Big(\exp\Big(\frac{r(\lambda-\alpha)}{\lambda-r} M_t\Big)\Big)^{1-\frac{r}{\lambda}}. \tag{18}$$

现设 $k<\frac{1}{1-\delta}$，在(18)中，令 $\alpha=k$，$r=\frac{k^2}{2k-1}$，则 $1\leqslant r<\lambda$，且 $\frac{r(\lambda-\alpha)}{\lambda-r}=\frac{k}{1+\delta}$，于是由引理 1.1 及引理 1.2 知，$\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$. 定理的另一结论显然.

设 M 为一零初值一致可积鞅，且 $\Delta M\geqslant -1$. 若存在 $k\geqslant 1$，使得 $\mathbf{E}[\exp(kM_\infty)]<\infty$，则 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}_k$.

事实上，对 $k=1$ 情形，这一结论已在[3]中证明. 现设 $k>1$. 由指数公式，我们有

$$\mathscr{E}(M)_t^k \leqslant \exp kM_t$$

于是由引理 1.1 知，$\mathscr{E}(M)^k$ 为类(D)过程. 这表明 $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^k$.

参 考 文 献

[1] Новиков, А. А., Об однам тождества для стохастических инегралов. Теория вероят. и её примен., XVII, 4 (1972).

[2] Kazamaki, N., On a problem of Girsanov, *Tôhoku Math. J.*, **29**: 4(1977), 597—600.

[3] Lépingle, D., Mémin, J., Sur l'integrabilite uniforme des martingales exponentielles, Z. W. **42** (1978), 175—203.

[4] Lepingle, D., Mémin, J., Intégrabilité uniforme et dans L^r des martingales exponentielles, á paraître.

[5] 严加安，指数鞅一致可积性准则，*Acta Math. Sinica*, **23**: 2(1980), 311—318.

UNIFORM AND L^r-INTEGRABILITY OF EXPONENTIAL MARTINGALES

YAN JIAAN

(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this note we improve two conditions given by Lépingle and Mémin[3,4] for the uniform integrability of exponential martingales, and given some conditions for their L^r-integrability.

Theorem 1. Let M be a martingale such that $\Delta M > -1$. Set

$$W_t(a) = \exp\left(\frac{a}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leqslant t}(1+a\Delta M_s)\exp\left(-\frac{a\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\right).$$

If $\boldsymbol{E}[W_\infty(a)]<\infty$ for any $a\in]0, 1[$, and $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1}(\boldsymbol{E}[W_\infty(a)])^{1-a}=1$, then $\mathscr{E}(M)$ is a uniformly integrable u. i. martingale.

Theorem 2. Let M be a martingale such that $\Delta M\geqslant -1+\delta$ with $0<\delta\leqslant 1$. Set

$$H_t(a) = \exp\left\{\frac{a}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t + \frac{a}{(1+\delta)\delta}[M^d, M^d]_t\right\}.$$

If $E[H_\infty(a)]<\infty$ for any $a\in]0, 1[$, and $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1}(\boldsymbol{E}[H(a)])^{1-a}=1$, then $\mathscr{E}(M)$ is a u. i. martingale.

Theorem 3. Let M be a u. i. martingale such that $\Delta M\geqslant -1+\delta$ with $0<\delta\leqslant 1$. If $\boldsymbol{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+\delta}M_\infty\right)\right]<\infty$ for any $a\in]0, 1[$, and $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1}\left(\boldsymbol{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+\delta}M_\infty\right)\right)^{1-a}=1$, then $\mathscr{E}(M)$ is a u. i. martingale.

Theorem 4. Let M be a martingale such that $\Delta M\geqslant -1+\delta$ with $0<\delta\leqslant 1$. If there exists a real k $\left(1<k<\frac{1}{1-\delta}\right)$, such that

$$\boldsymbol{E}\left[\exp\left\{\frac{k^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_\infty + \frac{k^2}{(1+\delta)\delta}[M^d, M^d]_\infty\right\}\right]<\infty,$$

then $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$ for some $r>1$.

For a real $r>1$, we set $\mathscr{H}^{r-}=\bigcap\limits_{1<\alpha<r}\mathscr{H}^\alpha$.

Theorem 5. Let M be a u. i. martingale such that $\Delta M\geqslant -1+\delta$ with $0<\delta\leqslant 1$. If there exists a real $k>1$ such that $\boldsymbol{E}\left[\exp\left(\frac{k}{1+\delta}M_\infty\right)\right]<\infty$, then $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^r$ with $r=\frac{k^2}{2k-1}$ for $k<\frac{1}{1-\delta}$, and $\mathscr{E}(M)\in\mathscr{H}^{r-}$ with $r=\frac{1}{1-\delta^2}$ for $k\geqslant\frac{1}{1-\delta}$.