数 学 年 刊
3 (3) 1982

关于非正常算子的谱子空间

李 绍 宽
(复旦大学数学研究所)

设 $\mathscr{H}$ 是可析的复 Hilbert 空间, T 是 $\mathscr{H}$ 上有界线性算子. $\sigma(T)$、$\rho(T)$ 分别表示 T 的谱集和正则集. 对 $f\in\mathscr{H}$,我们称 $\mathscr{H}$-值解析函数

$$f(\lambda)=(T-\lambda)^{-1}f,\ \lambda\in\rho(T) \tag{1}$$

为 T 的关于向量 f 的局部豫解式. 一般地说, $f(\lambda)$ 可以解析延拓到 $\sigma(T)$ 的部分上去,但这种延拓不一定唯一. 我们称算子 T 具有单值延拓性质是指: 对复平面的开集上定义的 $\mathscr{H}$-值解析函数 $g(\lambda)$ 若满足 $(T-\lambda)g(\lambda)\equiv0$ 必有 $g(\lambda)\equiv0$. 如果 T 有单值延拓性质, 这时(1)式定义的 $f(\lambda)$ 允许有唯一的一个极大解析延拓, 它的定义域记为 $\rho_T(f)$, 我们称它为 T 对 f 的局部正则集, 而余集 $\sigma_T(f)=\mathbf{C}\backslash\rho_T(f)$ 称为 f 的局部谱. 对复平面 $\mathbf{C}$ 上闭集 δ, 以及 $\mathscr{H}$ 上有单值延拓性质的算子 T, 我们定义 T 的对应 δ 的谱子空间为 $\mathfrak{X}_T(\delta)=\{f\,|\,f\in\mathscr{H},\sigma_T(f)\subset\delta\}$,在[1]中,我们已知对亚正常算子 T,闭集 δ 对应的谱子空间 $\mathfrak{X}_T(\delta)$ 是闭的. 在[2]中还讨论了亚正常算子的共轭算子的谱子空间的性质,我们这里要改进他们的证明方法,导出更广一类非正常算子有类似的性质. 本文分两部分, §1 中我们证明了一类 (N) 类算子的谱子空间的闭性, §2 中我们讨论了半亚正常算子的共轭算子的局部谱的性质.

§1. 关于 (N) 类算子的谱子空间

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子 T 称为 (N) 类算子,是指它对一切 $f\in\mathscr{H}$ 成立

$$\|Tf\|^2\leqslant\|T^2f\|\cdot\|f\|. \tag{2}$$

这时显然对一切 n, T^n 也是 (N) 类算子[3],即有

$$\|T^nf\|^2\leqslant\|T^{2n}f\|\|f\|. \tag{3}$$

当 T 是亚正常算子,即 $T^*T\geqslant TT^*$ 时, 则 T 必为 (N) 类, 且对一切 λ, $(T-\lambda)$ 也是亚正常的,从而也是 (N) 类算子.

为了讨论 (N) 类算子的谱子空间,我们首先证明

引理 1 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上具有单值延拓性质的算子, 且对一切 λ, $(T-\lambda)$ 为 (N) 类算子,则对 $\lambda_0\in\rho_T(f)$, $f\in\mathscr{H}$ 成立

$$\|f(\lambda_0)\|\leqslant\frac{\|f\|}{\operatorname{dist}(\lambda_0,\ \sigma_T(f))} \tag{4}$$

这儿 $f(\lambda)$ 为 f 的局部豫解式.

证 我们不妨设 $\lambda_0=0$, $\|f\|=1$. 由 $0\in\rho_T(f)$, 从而存在 $\mathscr{H}$-值解析函数 $f(\lambda)$ 满足

本文 1980 年 3 月 20 日收到, 1980 年 9 月 1 日修改.

$$(T-\lambda)f(\lambda)\equiv f,\ \forall\lambda\in\rho_T(f).$$

通过求导易知

$$\frac{1}{n!}(T-\lambda)^{n+1}f^{(n)}(\lambda)\equiv f,$$

从而可知 $f\in\bigcap_{n=1}^{\infty}T^n\mathscr{H}$. 我们由 $f(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 解析，可将 $f(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n$, 它的收敛半径 $\rho=\mathrm{dist}\ (0,\ \sigma_T(f))$, 另一方面，我们又知

$$\frac{1}{\rho}=\overline{\lim}\sqrt[n]{\|a_n\|}.$$

而且 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$ 满足

$$T^{n+1}a_n=f.$$

由条件 T 为 (N) 类算子，易知 $T^n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 有相同的零空间 $\mathscr{N}$, 设 P 为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{N}^{\perp}$ 上的正交投影，那么 $\sum_{n=0}^{\infty}Pa_n\lambda^n$ 在 $\lambda=0$ 也解析，且满足(1)，由 T 有单值延拓性质可知 $Pa_n=a_n$. 从而我们由

$$T^{n+1}a_n=f,\quad T^{n+m+1}a_{n+m}=f,$$

知 $T^{n+1}(a_n-T^ma_{n+m})=0$, 因此 $P(a_n-T^ma_{n+m})=0$. 即有

$$a_n=PT^ma_{n+m}.$$

由此可导出

$$\|a_{n-1}\|^2=\|PT^na_{2n-1}\|^2\leqslant\|T^na_{2n-1}\|\leqslant\|T^{2n}a_{2n-1}\|\cdot\|a_{2n-1}\|=\|a_{2n-1}\|.$$

这样我们得到

$$\|a_0\|\leqslant\|a_{2n-1}\|^{1/2n},$$

从而有

$$\|a_0\|\leqslant\overline{\lim}\sqrt[n]{\|a_n\|}=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\mathrm{dist}(0,\ \sigma_T(f))}.$$

但 $a_0=f(0)$. 证毕.

定理2 设 T 是满足引理1条件的算子，则和闭集 δ 相对应的谱子空间 $\mathfrak{X}_T(\delta)$ 是闭的.

证 为了证 $\mathfrak{X}_T(\delta)$ 是闭的，只须证对 $f_n\in\mathfrak{X}_T(\delta)$, $\|f_n\|=1$, $f_n\to f$ 成立, $f\in\mathfrak{X}_T(\delta)$. 为此取开集 $U\subset\mathbf{C}\backslash\delta$, 使

$$\mathrm{dist}(U,\ \delta)=\varepsilon>0,$$

由 $f_n\in\mathfrak{X}_T(\delta)$, 从而存在 U 上定义的 $\mathscr{H}$-值解析函数 $f_n(\lambda)$ 满足

$$(T-\lambda)f_n(\lambda)\equiv f_n,\ \forall\lambda\in U.$$

由引理1，还成立

$$\|f_n(\lambda)\|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

因此 $f_n(\lambda)$ 在 U 上一致有界. 从而存在子列 $f_{n_k}(\lambda)$ 在 U 上内闭匀均收敛于 U 上解析函数 $f(\lambda)$, 显然有

$$(T-\lambda)f(\lambda)=\lim(T-\lambda)f_{n_k}(\lambda)=\lim f_{n_k}=f,\ \forall\lambda\in U.$$

从而 $U\subset\rho_T(f)$, 由 ε 任意性可知 $f\in\mathfrak{X}_T(\delta)$.

利用同样的方法我们可以证明

定理 3 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上有单值延拓性质的算子且存在 $M>0$，对一切复数 λ 和自然数 n 成立

$$\|(T-\lambda)^n f\|^2 \leqslant M\|(T-\lambda)^{2n} f\|\cdot\|f\|,\ \forall f\in\mathscr{H}.$$

则和闭集 δ 相对应的谱子空间 $\mathfrak{X}_T(\delta)$ 是闭的.

证明完全相同，只须注意

$$\|a_{n-1}\|^2 \leqslant \|T^n a_{2n-1}\| \leqslant M\cdot\|T^{2n} a_{2n-1}\|\cdot\|a_{2n-1}\|$$

而导出
$$\|a_0\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{dist}(0,\ \sigma_T(f))}.$$

另外由于 $\mathfrak{X}_T(\delta)$ 永远为 T 的不变流形．当它是闭的空间就成为 T 的不变子空间．因此我们有

推论 4 设 T 满足定理 2 或 3 中条件，而且存在 $f\neq 0$ 使 $\sigma_T(f)\subsetneqq\sigma(T)$，则 T 有非平凡的不变子空间.

这时，$\mathfrak{X}_T(\sigma_T(f))$ 就是一个.

§ 2．关于半亚正常算子的局部谱

T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子，有极分解 $T=UP$，U 是酉算子，且

$$P-UPU^*=D\geqslant 0,$$

我们称 T 是半亚正常算子．我们已知它和亚正常算子有许多相似的性质，但在局部谱方面，我们对半亚正常算子方面还缺少办法．这里一个重要的问题是半亚正常算子的谱子空间的闭性还没有解决．这里我们给出半亚正常算子的共轭算子与亚正常算子的共轭算子相类似的一个性质.

引理 5 $T=UP$ 是半亚正常算子，对复数 $z=re^{i\theta}\neq 0$ 成立

$$\|(T-z)^* f\| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\|P^{1/2}\|+1\right)\|(T-z)f\|,\ \forall f\in\mathscr{H}. \tag{5}$$

证　由于[9]中的等式

$$(T-z)^*(T-z) = (P-r)^2 + rD + r(U-e^{i\theta})P(U-e^{i\theta})^*,$$

这儿 $D=P-UPU^*\geqslant 0$，从而

$$\|(T-z)^* f\| \leqslant \|P(U^*-e^{-i\theta})f\| + \|(P-r)f\| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\|P^{1/2}\|+1\right)\|(T-z)f\|.$$

引理 6 若 S 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子，满足

$$(S-z)(S-z)^* \geqslant |z|D^2,$$

则对 D 的值域 $R(D)$ 中的元 f，存在 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上定义的 $\mathscr{H}$-值函数 $W(z)$ 满足

$$(S-z)W(z)\equiv f, \tag{6}$$

$$\|W(z)\| \leqslant M|z|^{-1/2}, \tag{7}$$

这儿 M 为一个常数．

证　由条件 $(S-z)(S-z)^*\geqslant |z|D^2$，由[2]知存在 $C_z\in B(\mathscr{H})$，

$$\|C_z\| \leqslant |z|^{-1/2},\ D=(S-z)C_z.$$

对 $f\in R(D)$, $f=Dg$, 我们作 $W(z)=C_z g$. 易知满足(6), (7).

定理 7 $T=UP$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上半亚正常算子，δ 为包含 0 点的闭集，若在 $\mathbf{C}\backslash\delta$ 上存在有界 $\mathscr{H}$-值函数 $f(\lambda)$ 满足

$$(T-\lambda)f(\lambda)\equiv f;f\in\mathscr{H}.$$

则 $f(\lambda)$ 必在 $\mathbf{C}\backslash\delta$ 上解析.

证明和[7]中关于控制算子的证明相仿，只须利用引理 5，故略去.

定理 8 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上半亚正常算子，N 是正常算子，$0\overline{\in}\sigma_p(N)$. 且存在稠值域算子 W 满足

$$TW_1=WN,$$

则 T 必为正常算子.

证明和[6]中关于控制算子的证明相仿，只须注意由条件 $0\overline{\in}\sigma_p(N)$ 可知 $E(\{0\})=\{0\}$, 这儿 $E(\lambda)$ 为 N 的谱测度.

定理 9 T 和 S^* 是半亚正常算子，且 $0\overline{\in}\sigma_p(S)$. 若存在一对一具有稠值域的算子 W 满足

$$TW=WS,$$

则我们有 T 和 S 都是正常算子.

证　若 S 不正常，从而存在 $D\geqslant 0$, $D\neq 0$ 而

$$(S-z)(S-z)^*\geqslant|z|D^2,$$

这里我们只要取 $D=[(SS^*)^{1/2}-(S^*S)^{1/2}]^{1/2}$ 即可，从而存在 $f\neq 0$, $f\in R(D)$, 由引理 6, 存在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 上函数 $W(z)$ 满足(6), (7) 由此导出

$$(T-\lambda)WW(\lambda)\equiv Wf,\ \|WW(\lambda)\|\leqslant\|W\|M|\lambda|^{-1/2}.$$

由定理 7, $WW(\lambda)$ 在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 中解析，而由 $\|WW(\lambda)\|\leqslant M'\cdot|\lambda|^{-1/2}$ 可知 $WW(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 也解析，从而导出 $Wf=0$, 这与 W 为一对一矛盾. 因此 S 是正常，再由定理 8 可知 T 也正常.

定理 10 设 S 是有单值延拓性质的非正常算子，S^* 是半亚正常的. 则存在 $f\neq 0$, 使 $\sigma_s(f)\subsetneqq\sigma(S)$.

证　当 $\sigma_p(S)\neq\emptyset$ 时，设 $\lambda_0\in\sigma_p(S)$, 存在 $f\neq 0$, $Sf=\lambda_0 f$. 易知 $\sigma_s(f)=\{\lambda_0\}$, 而 $\sigma(S)\neq\{\lambda_0\}$. 因为若 $\sigma(S)=\{\lambda_0\}$ 立即导出 S 是正常. 这时 $\sigma_s(f)\subsetneqq\sigma(S)$

下面设 $\sigma_p(S)=\emptyset$, S^* 是非正常的半亚正常算子，从而存在 $D\geqslant 0$, $D\neq 0$, 而

$$(S-z)(S-z)^*\geqslant|z|\cdot D^2.$$

对 $f\in R(D)$, $f\neq 0$, 由引理 6, 存在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 上 $\mathscr{H}$-值函数 $W(z)$ 满足(6), (7), 由 $\sigma_p(S)=\emptyset$, 易知 $W(z)$ 在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 的闭子集上是弱连续的，且由(7), 它不可能在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 上解析，因为否则由(7)可知 $W(z)$ 在 $z=0$ 也解析，导出 $f=0$ 之矛盾. 从而存在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 中一个三角形 $\varGamma$, 而 $\varGamma$ 内部在 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 中，$\sigma(S)$ 与 $\varGamma$ 相交，并且

$$g=\frac{1}{2\pi i}\int_\varGamma W(z)dz\neq 0$$

作 $f(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\varGamma\frac{W(z)}{z-\lambda}dz$, $(\lambda\overline{\in}\varGamma)$. 易知 $f(\lambda)$ 在 $\varGamma\cup\{0\}$ 外解析，而在 $\varGamma$ 外部成立 $(S-\lambda)f(\lambda)\equiv g$. 因此 $\sigma_s(g)\subsetneqq\sigma(S)$.

参 考 文 献

[1] Clancey, K., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **72** (1978), 473—479.
[2] Donglas, R. G., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 413—415.
[3] Radjabalipour, M., Ill. *Jour. Math.*, **21** (1977), 70—75.
[4] Radjabalipour, M., *Proc. Amer, Math. Soc.*, **62** (1977), 105—110.
[5] Stampfli, J. G., *Trans. Amer, Math. Soc.*, **217** (1976), 285—296.
[6] Wadwa, B. L., *Indiana. Univ. Math. Jour.*, **25** (1976), 359—365.
[7] Wadwa, B. L., *Mh. Math.*, **84** (1978), 143—153.
[8] Saitito, T., *Lecture. Notes, in Math.*, **247** (1972), 534—665.
[9] 夏道行，中国科学，10 (1979), 936—946.

ON THE SPECTRAL SUBSPACES OF THE NON NORMAL OPERATORS

LI SHAOKUAN
(*Research Institute of Mathematics Fudan Univerty*)

ABSTRACT

In this paper we have proved

Theorem 2. Let T be an operator on the Hilbert space H with the single valued extension property, Suppose that for every λ in the complex plane, it holds that

$$\|(T-\lambda)f\|^2 \leqslant \|(T-\lambda)^2 f\| \cdot \|f\|, \ \forall f \in H.$$

Then for any closed subset δ of the plane, the spectral subspace $\mathfrak{X}_T(\delta)$ is closed.

Theorem 9. Let T and S^* be semi-hyponormal operators and $0 \overline{\in} \sigma_p(s)$. Suppose that there exists an injective operator W with dense range which satisfies

$$TW = WS.$$

Then T and S are normal operators.

Theorem 10. Let S be a co-semi-hyponormal operator with the single valued extension property and be not normal. Then there exists $f \neq 0$ which satisfies

$$\sigma_s(f) \subsetneqq \sigma(S).$$