数 学 年 刊
3 (3) 1982

极小化与最佳逼近(二)

史应光
(中国科学院计算中心)

§1. 引 言

设 $X\equiv[a, b]$, $L(X)$ 是 X 上的 Lebesgue 可积函数空间, $M(X)$ 是 $L(X)$ 中全体有界函数所成之集合, $C(X)$ 是 X 上的连续函数空间, $H\subset C(X)$ 为 n 维子空间, 这里 n 为固定的自然数. 范数取 $L(X)$ 中的范数

$$\|f\|=\int_X |f(x)|\,dx.$$

给定 $X\times(-\infty, \infty)$ 上非负二元函数 $F(x, y)$ 及 $L(X)$ 中的一个子集 K, 我们可以提出如下的极小问题: 寻找一个 $P\in K$, 使它满足

$$\|F(x, P)\|=e\equiv \inf_{Q\in K}\|F(x, Q)\|, \tag{1}$$

这里 $F(x, Q)\equiv F(x, Q(x))$, 称这样一个 P(若存在的话)为 F 在 K 中的极小点.

研究这样的极小问题的意义在于它包含了多种形式的逼近问题, 特别是联合逼近问题作为特例:

(I) $\quad F(x, y)=|f(x)-y|^p,\ 1\leqslant p<\infty,$

(II) $\quad F(x, y)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|f_j(x)-y|,$

(III) $\quad F(x, y)=\sum\limits_{j=1}^{m}|f_j(x)-y|,$ 等等.

其中 (I) 本质上就是平常的 L_p 逼近, (II) 和 (III) 是两种常见的联合逼近, 在[1]和[2]中有讨论, 这些逼近问题迄今还是各别地进行讨论的, 现在可以利用这种形式进行统一的分析与研究.

本文将讨论极小问题的存在性、特征和唯一性, 这分别是 §2~4 的内容. 最后简单提及所得理论之应用.

§2. 存 在 性

与勒贝格定理[3, p.104]的证明类似可推断下述引理 1.

引理 1 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ 是在可测集 E 上所定义的可测函数列. 若对于 E 中几乎所有的点 x, $f_m(x)$ 收敛于 $+\infty$, 则对于任何正数 σ, 有

$$\lim_{m\to\infty}\mu E(f_m\leqslant\sigma)=0,$$

本文 1980 年 3 月 29 日收到, 1980 年 7 月 2 日修改.

其中 $E(f_m\leqslant\sigma)=\{x\in E: f_m(x)\leqslant\sigma\}$, $\mu E(f_m\leqslant\sigma)$ 表示集合 $E(f_m\leqslant\sigma)$ 之测度.

引理 2　设 $F(x, y)$ 满足条件

(a)
$$\lim_{|y|\to\infty} F(x, y)=\infty,\ \forall x\in X.$$

若 $\{P_m\}\subset H$ 使 $\lim\limits_{m\to\infty}\|F(x, P_m)\|=e$, 则 $\{P_m\}$ 有界.

证　若 $\{P_m\}$ 无界,则必存在一子列 $\{Q_m\}$ 满足下述条件:

(I)
$$\lim_{m\to\infty}\|Q_m\|=\infty,$$

(II)
$$\|Q_m\|\neq 0,\ m=1, 2, \cdots,$$

(III)
$$\lim_{m\to\infty} Q_m/\|Q_m\|=Q \text{ 对某个 } Q\in H \text{ 成立},$$

(IV)
$$\|F(x, Q_m)\|<e+1.$$

由于 $\|Q\|=1$, 则必存在一点 $\xi\in X$ 使 $Q(\xi)\neq 0$. 据连续性,存在 ξ 的一个邻域 E, 使 $Q(x)$ 在其上恒不为零. 因而对于每一个 $x\in E$ 都有

$$\lim_{m\to\infty}|Q_m(x)|=\lim_{m\to\infty}\|Q_m\|(|Q_m(x)|/\|Q_m\|)=\infty.$$

于是对于这些 x, 有

$$\lim_{m\to\infty} F(x, Q_m)=\infty.$$

今设 σ 是任何正数,依引理1, 存在 N, 使当 $m\geqslant N$ 时成立 $\mu E(F(x, Q_m)\leqslant\sigma)<\mu(E)/2$, 从而

$$\|F(x, Q_m)\|\geqslant\int_{E(F(x,Q_m)>\sigma)} F(x, Q_m)dx\geqslant\sigma\mu(E)/2.$$

这表明
$$\lim_{m\to\infty}\|F(x, Q_m)\|=\infty,$$

而与(IV)相矛盾,所以 $\{P_m\}$ 有界.

引理 3　设 $F(x, y)$ 满足条件

(b) 对每一个 $x\in X$, $F(x, y)$ 都是 y 的凸函数; 对每一个 $P\in M(X)$ 都有
$$F(x, P)\in M(X),$$

则对任何 $c>0$, 都存在仅依赖于 c 之常数 λ, 使对任何 $x\in X$ 和任何 $y, z\in[-c, c]$ 都成立

$$|F(x, y)-F(x, z)|\leqslant\lambda|y-z|. \tag{2}$$

证　根据[3, p. 572]中补助定理,若 $y\neq z$, 我们有

$$\frac{F(x, y)-F(x, z)}{y-z}\leqslant\frac{F(x, c+1)-F(x, z)}{c+1-z}\leqslant\frac{F(x, c+1)-F(x, c)}{c+1-c}$$
$$\leqslant F(x, c+1),$$

同理可证
$$\frac{F(x, y)-F(x, z)}{y-z}\geqslant -F(x, -c-1).$$

因此
$$\left|\frac{F(x, y)-F(x, z)}{y-z}\right|\leqslant\max\{F(x, c+1), F(x, -c-1)\}.$$

根据(b), 上式右端在 X 上有界,记 λ 为它的一个上界, 它仅依赖于 c, 由此得出(2)式.

引理 4　设 $F(x, y)$ 满足条件(b), 则泛函 $\varPhi(P)=\|F(x, P)\|$ 在 H 上是连续的.

证　设 $\{P_m\}\subset H$ 使 $\|P_m-P\|\to 0\ (m\to\infty)$，其中 $P\in H$. 根据有限维空间范数的等价性，知 $\max\limits_{x\in X}|P_m(x)-P(x)|\to 0\ (m\to\infty)$. 因而可以找到常数 $c>0$，使对一切 m 都有 $-c\leqslant P_m(x),\ P(x)\leqslant c$，于是由引理3得到

$$|\Phi(P_m)-\Phi(P)|\leqslant\int_X|F(x,P_m)-F(x,P)|dx\leqslant\lambda\int_X|P_m-P|dx=\lambda\|P_m-P\|,$$

其中 λ 仅依赖于 c. 由此 $|\Phi(P_m)-\Phi(P)|\to 0\ (m\to\infty)$.

定理1　若 $F(x,y)$ 满足条件(a)和(b)，则 F 在 H 中的极小点存在.

证　设 $\{P_m\}\subset H$ 使 $\lim\limits_{m\to\infty}\|F(x,P_m)\|=e$. 由引理2知 $\{P_m\}$ 有界，故存在收敛子序列. 不妨设 $P_m\to P\in H$. 由引理4，

$$\|F(x,P)\|=\lim_{m\to\infty}\|F(x,P_m)\|=e.$$

§3. 特　征

为方便起见，我们引述凸函数的一个重要性质[4, p. 4]，它将不止一次被引用.

引理5　设 $F(x,y)$ 满足条件(b)，则 $F(x,y)$ 关于 y 的右导数 $D_y^+F(x,y)$ 和左导数 $D_y^-F(x,y)$ 处处存在且都是 y 的增函数.

引理6　设 $P,\ Q\in M(X)$. 若 $F(x,y)$ 满足条件(b)，则

$$\lim_{t\to 0^+}(\|F(x,P+tQ)\|-\|F(x,P)\|)/t=\int_{Z_+(Q)}QD_y^+F(x,P)dx+\int_{Z_-(Q)}QD_y^-F(x,P)dx,\tag{3}$$

其中　　$Z_+(Q)=\{x\in X: Q(x)>0\},\quad Z_-(Q)=\{x\in X: Q(x)<0\}$.

证　记　　$\Delta(P(x)+tQ(x))=(F(x,P+tQ)-F(x,P))/t$.

首先注意到

$$\lim_{t\to 0^+}\Delta(P(x)+tQ(x))=\begin{cases}Q(x)D_y^+F(x,P), & \text{当 } Q(x)>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } Q(x)=0 \text{ 时},\\ Q(x)D_y^-F(x,P), & \text{当 } Q(x)<0 \text{ 时}。\end{cases}$$

其次，若取 $c=\sup\limits_{x\in X}(|P(x)|+|Q(x)|)$，则由引理3，当 $|t|\leqslant 1$ 时，有

$$|\Delta(P(x)+tQ(x))|\leqslant\lambda|Q(x)|,$$

其中 λ 仅依赖于 c. 应用勒贝格定理[3, p.167]有

$$\lim_{t\to 0^+}(\|F(x,P+tQ)\|-\|F(x,P)\|)/t=\lim_{t\to 0^+}\int_X\Delta(P(x)+tQ(x))dx$$
$$=\int_{Z_+(Q)}QD_y^+F(x,P)dx+\int_{Z_-(Q)}QD_y^-F(x,P)dx.$$

引理7　在引理6的条件下，使关系式

$$\|F(x,P)\|\leqslant\|F(x,P+cQ)\|\tag{4}$$

对所有 $c\geqslant 0$ 都成立的充要条件为

$$\int_{Z_+(Q)}QD_y^+F(x,P)dx+\int_{Z_-(Q)}QD_y^-F(x,P)dx\geqslant 0.\tag{5}$$

证 充分性. 设 $0<t\leqslant 1$, 由条件(b)

$$F(x, ty+(1-t)z)\leqslant tF(x, y)+(1-t)F(x, z).$$

取 $y=P(x)+cQ(x)$, $z=P(x)$, 得到

$$F(x, P+tcQ)\leqslant tF(x, P+cQ)+(1-t)F(x, P).$$

从而 $$\|F(x, P+tcQ)\|\leqslant t\|F(x, P+cQ)\|+(1-t)\|F(x, P)\|.$$

由此 $$(\|F(x, P+tcQ)\|-\|F(x, P)\|)/t\leqslant\|F(x, P+cQ)\|-\|F(x, P)\|.$$

最后得到

$$\lim_{t\to 0^+}(\|F(x, P+tcQ)\|-\|F(x, P)\|)/t\leqslant\|F(x, P+cQ)\|-\|F(x, P)\|. \tag{6}$$

这样, 若(5)式成立, 对于 $c\geqslant 0$, 将 Q 换成 cQ 后(5)式仍将成立, 同时对(3)式也可作同样的置换, 然后由它们能得出(6)式左端为非负, 从而右端为非负, 此即(4)式.

必要性: 由关系式(3), 从(4)式立即得出(5)式.

在叙述特征定理之前先引进准凸集的定义. 称 $K\subset L(X)$ 为准凸集, 如果对于任意 $P_1, P_2\in K$, 都存在一数列 $t_m>0\,(m=1, 2, \cdots)$, $t_m\to 0\,(m\to\infty)$, 使

$$t_mP_1+(1-t_m)P_2\in\overline{K}\quad(m=1, 2, \cdots),$$

这里 $\overline{K}$ 表示 K 之闭包. 我们看到, 准凸集的概念是与集合的拓扑有关的一个概念. 从这个定义看出, 凸集、开集以及凸集的任何稠密子集等都是准凸集.

定理 2 设 $K\subset M(X)$ 为凸集或 $K\subset H$ 为准凸集, 又设 $P\in K$. 若 $F(x, y)$ 满足条件(b), 则 P 为 F 在 K 中的极小点的充要条件是

$$\int_{Z_+(Q-P)}(Q-P)D_y^+F(x, P)\,dx+\int_{Z_-(Q-P)}(Q-P)D_y^-F(x, P)\,dx\geqslant 0,\quad \forall Q\in K. \tag{7}$$

证 充分性. 对任何 $Q\in K$, 应用引理 7, 由(7)式得出, 不等式

$$\|F(x, P)\|\leqslant\|F(x, P+c(Q-P))\|$$

对所有 $c\geqslant 0$ 都成立, 特别当 $c=1$ 时将得出不等式 $\|F(x, P)\|\leqslant\|F(x, Q)\|$. 由 $Q\in K$ 之任意性, P 应当是 F 在 K 中的极小点.

必要性. 假定(7)式对某个 $Q\in K$ 不成立, 即

$$\theta\equiv\int_{Z_+(Q-P)}(Q-P)D_y^+F(x, P)\,dx+\int_{Z_-(Q-P)}(Q-P)D_y^-F(x, P)\,dx<0.$$

由(3)式 $$\lim_{t\to 0^+}(\|F(x, P+t(Q-P))\|-\|F(x, P)\|)/t=\theta<0.$$

于是, 存在数 $\tau\leqslant 1$, 使当 $0<t<\tau$ 时

$$(\|F(x, P+t(Q-P))\|-\|F(x, P)\|)/t<0$$

或 $$\|F(x, P+t(Q-P))\|<\|F(x, P)\|.$$

当 $K\subset M(X)$ 为凸集的情形, 矛盾立即可以得出, 因为

$$P^*\equiv P+t(Q-P)=tQ+(1-t)P\in K.$$

当 $K\subset H$ 为准凸集的情形, 先取一正数 $t^*<\tau$ 使

$$P_1\equiv P+t^*(Q-P)=t^*Q+(1-t^*)P\in\overline{K},$$

这样对于 P_1 应有 $\|F(x, P_1)\|<\|F(x, P)\|$. 然后根据引理 4, 可以找到 $P^*\in K$ 且 $\|P^*-P_1\|$ 足够小, 使得 $\|F(x, P^*)\|<\|F(x, P)\|$, 仍然得出了矛盾.

定理3 设 $K\subset M(X)$ 为子空间, $P\in K$. 若 $F(x, y)$ 满足条件(b), 则 P 为 F 在 K 中的极小点的充要条件是

$$\int_{Z+(Q)} QD_y^+F(x, P)dx+\int_{Z-(Q)} QD_y^-F(x, P)dx\geqslant 0,\ \forall Q\in K. \tag{8}$$

证 当 K 是子空间时, $Q\in K$ 蕴含 $Q\pm P\in K$, 故(7)式与(8)式等价.

若代替条件(b), $F(x, y)$ 满足条件

(b′) 对每一个 $x\in X$, $F(x, y)$ 都是 y 的凸函数; 对每一个 $P\in L(X)$ 都有

$$F(x, P)\in L(X)$$

且

$$|F(x, y)-F(x, z)|\leqslant\lambda|y-z|,$$

其中 λ 是绝对常数, 则不难看出, 引理6和引理7对 $P, Q\in L(X)$ 也成立. 这时定理2中 K 的范围可以进一步扩大.

定理4 设 $K\subset L(X)$ 为准凸集, $P\in K$. 若 $F(x, y)$ 满足条件(b′), 则 P 为 F 在 K 中的极小点的充要条件是(7)式成立.

证 充分性的证明同定理2. 必要性的证明同定理2中 $K\subset H$ 为准凸集的那一部分, 因为在本定理的条件下泛函 $\Phi(P)$ 在 $L(X)$ 上连续

$$|\Phi(P)-\Phi(Q)|\leqslant\int_X|F(x, P)-F(x, Q)|dx\leqslant\lambda\int_X|P-Q|dx=\lambda\|P-Q\|.$$

由定理4不难推得

定理5 设 $K\subset L(X)$ 为子空间, $P\in K$. 若 $F(x, y)$ 满足条件(b′), 则 P 为 F 在 K 中的极小点的充要条件是(8)式成立.

§4. 唯 一 性

在条件(b)之假设下, 对每一个固定的 $x\in X$, 令

$$f^*(x)=\inf_y F(x, y),\quad D_x=\{y: F(x, y)=f^*(x)\}.$$

若 $D_x\neq\phi$, 则置 $f^+(x)=\sup D_x$, $f^-(x)=\inf D_x$; 若 $D_x=\phi$, 这时 $F(x, y)$ 必是 y 之严格单调函数, 当它是增函数时置 $f^+(x)=f^-(x)=-\infty$, 而当它是减函数时置 $f^+(x)=f^-(x)=+\infty$. 如此定义之后, 不难看出下述引理是成立的, 这里尖括号的区间记号表示当区间端点为有穷时, 端点属于该区间, 反之则不属于.

引理8 设 $F(x, y)$ 满足条件(b). 则对每一个 $x\in X$, $F(x, y)$ 在区间 $(-\infty, f^-(x)\rangle$ 上关于 y 严格递减, 在区间 $\langle f^+(x), +\infty)$ 上关于 y 严格递增, 而在区间 $\langle f^-(x), f^+(x)\rangle$ 上恒有 $F(x, y)=f^*(x)$.

引理9 若 $y<f^-(x)$, 则 $D_y^-F(x, y)\leqslant D_y^+F(x, y)<0$; 若 $y>f^+(x)$, 则

$$D_y^+F(x, y)\geqslant D_y^-F(x, y)>0.$$

证 关系式 $D_y^-F(x, y)\leqslant D_y^+F(x, y)$ 已由[4, p. 3]给出. 若 $y<f^-(x)$, 则由引理8得出 $D_y^+F(x, y)\leqslant 0$. 因此只须证明上述等号不能成立. 今假定对某一点 $\eta<f^-(x)$ 有 $D_y^+F(x, \eta)=0$. 由引理5, 当 $y\geqslant\eta$ 时有 $D_y^+F(x, y)\geqslant 0$, 因而当 $f^-(x)>y\geqslant\eta$ 时有

$D_y^+F(x, y)\equiv 0$. 这表明对这些 y 恒成立 $F(x, y)=f^*(x)$, 与 $f^-(x)$ 之定义不符. 这就证明了 $D_y^+F(x, y)<0$. 对于引理的其余部分可以同理证得.

定义 称 $P\in H$ 与函数偶 (f^-, f^+) 有 m 次交叉, 如果存在 m 个分点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m<x_{m+1}=b,$$

使分割所成的 $m+1$ 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, m+1)$ 上依次交替满足下述两个条件之一:

(I) $P(x)\geqslant f^-(x)$ 几乎处处成立且 $P(x)>f^+(x)$ 在一个正测度集合上成立;

(II) $P(x)\leqslant f^+(x)$ 几乎处处成立且 $P(x)<f^-(x)$ 在一个正测度集合上成立.

引理 10 设 H 是 n 维 Haar 子空间及

$$G=\{Q\in H: f^-(x)\leqslant Q(x)\leqslant f^+(x) \quad \text{在 } X \text{ 上几乎处处成立}\}.$$

又设 $F(x, y)$ 满足条件 (b) 且 P 是 F 在 H 中的极小点. 若 $P\in G$ 且

$$\mu\{x\in X: P(x)=f^+(x) \quad \text{或} \quad P(x)=f^-(x)\}=0, \tag{9}$$

则 P 必与 (f^-, f^+) 至少有 n 次交叉.

证 首先注意到这样一个事实: 在 (9) 的假设下, 根据引理 8, 关于交叉的定义中条件 (I) 将得出 $D_y^+F(x, P)\geqslant 0$ 及 $D_y^-F(x, P)\geqslant 0$ 几乎处处成立, 条件 (II) 将得出

$$D_y^+F(x, P)\leqslant 0 \quad \text{及} \quad D_y^-F(x, P)\leqslant 0$$

几乎处处成立.

今设 P 与 (f^-, f^+) 的交叉数 $m\leqslant n-1$. 并设 m 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 即为定义中的那些分点. 因为 H 为 n 维 Haar 子空间, 所以存在 $Q\in H$, 使它在点 $x_1, \cdots, x_m$ 上为零且变号, 同时在 (a, b) 内不再含有其它零点 [5, p.30]. 这样, 适当选取 Q 之符号可使

$$Q(x)D_y^+F(x, P)\leqslant 0 \quad \text{及} \quad Q(x)D_y^-F(x, P)\leqslant 0$$

几乎处处成立. 因为 $P\in G$, 故存在一个正测度集合, 使其上每一点皆满足 $P(x)<f^-(x)$ 或 $P(x)>f^+(x)$. 由引理 9, 在此集合上 $Q(x)D_y^+F(x, P)<0$ 及 $Q(x)D_y^-F(x, P)<0$ 皆成立, 故

$$\int_{Z_+(Q)} QD_y^+F(x, P)\,dx+\int_{Z_-(Q)} QD_y^-F(x, P)\,dx<0.$$

根据定理 3, 这与 P 是极小点相矛盾.

引理 11 设 H 是 n 维 Haar 子空间且 $F(x, y)$ 满足条件 (b) 及条件 (c),

$$f^+, f^-\in C(X).$$

若 P 是 F 在 H 中的极小点且 $P\in G$, 则 P 是 F 之唯一的极小点.

证 假定 $Q\in H$ 也是 F 之极小点且 $Q\neq P$. 那末, 对任何 λ, $0<\lambda<1$,

$$R_\lambda=\lambda P+(1-\lambda)Q$$

都是 F 之极小点, 这是因为

$$F(x, R_\lambda)\leqslant\lambda F(x, P)+(1-\lambda)F(x, Q)$$

及

$$\|F(x, R_\lambda)\|\leqslant\lambda\|F(x, P)\|+(1-\lambda)\|F(x, Q)\|=e.$$

而且事实上应当有

$$\|F(x, R_\lambda)\|-\lambda\|F(x, P)\|-(1-\lambda)\|F(x, Q)\|=0.$$

今将它写成

$$\int_X [F(x, R_\lambda) - \lambda F(x, P) - (1-\lambda) F(x, Q)] = 0.$$

因为被积函数恒为非正,所以可以肯定

$$F(x, R_\lambda) = \lambda F(x, P) + (1-\lambda) F(x, Q) \tag{10}$$

在 X 上几乎处处成立.

我们注意到,当一点 $x \in X$ 满足 $f^-(x) \leqslant R_\lambda(x) \leqslant f^+(x)$ $(0<\lambda<1)$ 且使(10)式成立时,则必有 $f^-(x) \leqslant P(x)$, $Q(x) \leqslant f^+(x)$. 事实上,如果其中有一个不满足此式,例如 $P(x) < f^-(x)$ 或 $P(x) > f^+(x)$,那么据引理 8 有 $F(x, P) > F(x, R_\lambda)$,同时 $F(x, Q) \geqslant F(x, R_\lambda)$. 这样一来,(10)式便不再成立. 这就证明了我们的论断,既然(10)式是几乎处处成立的,同时 R_λ, f^+ 及 f^- 都连续,因而实际上可以断言:任何使 $f^-(x) \leqslant R_\lambda(x) \leqslant f^+(x)$ 成立的点 x 都满足 $f^-(x) \leqslant P(x)$, $Q(x) \leqslant f^+(x)$.

再考虑到 $R_\lambda = \lambda P + (1-\lambda) Q$, 故对于任何点 $x \in X$, 下列两式中至少有一个将成立

$$P(x) \leqslant R_\lambda(x) \leqslant Q(x), \quad Q(x) \leqslant R_\lambda(x) \leqslant P(x).$$

因此,当 $x \in X$ 使 $R_\lambda(x) = f^+(x)$ 时,由上一段得到的关系式 $P(x)$, $Q(x) \leqslant f^+(x)$ 及上述任何一式皆可得出

$$R_\lambda(x) = P(x) = Q(x).$$

自然对于使 $R_\lambda(x) = f^-(x)$ 成立的 x 上式亦真. 据所设 $P \neq Q$, 故这样的点不能多于 $n-1$ 个,由此可知 R_λ 与 (f^-, f^+) 的交叉数也不能大于 $n-1$. 但是,从 $P \in G$ 知只要 λ 充分接近于 1 可使 $R_\lambda \in G$, 对于这样的 R_λ, 引理 10 告诉我们至少有 n 次交叉. 这个矛盾就完成了引理的证明.

定理 6 设 H 是 n 维 Haar 子空间且 $F(x, y)$ 满足条件(a)—(c). 则 F 之极小点为唯一的充要条件是 $\overline{\overline{G}}$(集合 G 之势)$\leqslant 1$.

证 充分性. 若有两个极小点,则至少有一个不属于 G, 这与引理 11 发生冲突.

必要性. 首先注意到一个简单的事实,若 $P \in G$, 则 P 必是 F 之极小点,因为对任何 $Q \in H$ 都有 $F(x, P) \leqslant F(x, Q)$, 从而 $\|F(x, P)\| \leqslant \|F(x, Q)\|$. 今设 P 为 F 之唯一的极小点,则当 $P \in G$ 时应有 $\overline{\overline{G}} = 1$, 而当 $P \bar{\in} G$ 时应有 $\overline{\overline{G}} = 0$.

我们指出,条件(c)一般地是不能去掉的.

例 $F(x, y) = |f(x) - y|$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

在$[-1, 1]$上,任何 $P = c$ $(|c| \leqslant 1)$ 都是 F 在 $\mathscr{P}_0$(零次多项式类)中的极小点,但同时有 $G = \emptyset$.

§5. 应 用

我们回过头来考察在 §1 中所列举的几种逼近问题. 不难验证,当 $f, f_i \in C(X)$ 时,它们全都满足条件(a)—(c)及(b′),因而全部结论都应当成立. 对这几种逼近问题,下面来导出本文主要结果定理 4 和定理 6 的更简单具体的形式,这里以 U 记(7)式左端的表达式.

(I)
$$F(x, y)=|f(x)-y|^p,\ 1\leqslant p<\infty.$$
在 $p=1$ 时得到
$$D_y^+F(x, y)=D_y^-F(x, y)=\operatorname{sgn}[y-f(x)],\quad 当\ y\neq f(x)\ 时,$$
$$D_y^+F(x, y)=-D_y^-F(x, y)=1,\quad 当\ y=f(x)\ 时.$$
若记 $Z(f-P)=\{x\in X: f(x)=P(x)\}$，则我们有
$$\begin{aligned}U=&\int_{Z_+(Q-P)\setminus Z(f-P)}(Q-P)\operatorname{sgn}(P-f)dx+\int_{Z_+(Q-P)\cap Z(f-P)}(Q-P)dx\\&+\int_{Z_-(Q-P)\setminus Z(f-P)}(Q-P)\operatorname{sgn}(P-f)dx+\int_{Z_-(Q-P)\cap Z(f-P)}(P-Q)dx\\=&\int_{Z_+(Q-P)\cup Z_-(Q-P)}(Q-P)\operatorname{sgn}(P-f)dx+\int_{Z_+(Q-P)\cup Z_-(Q-P)\cap Z(f-P)}|Q-P|dx\\=&\int_X(Q-P)\operatorname{sgn}(P-f)dx+\int_{Z(f-P)}|Q-P|dx.\end{aligned}$$
对于 $p>1$ 的情形，注意到
$$D_y^+F(x, y)=D_y^-F(x, y)=p|f(x)-y|^{p-1}\operatorname{sgn}[y-f(x)],$$
则有
$$U=p\int_X(Q-P)|f-P|^{p-1}\operatorname{sgn}(P-f)dx.$$
于是定理4这时具有下述形式.

定理7 设 $K\subset L(X)$ 为准凸集，$P\in K$. 则 P 为 $f\in C(X)$ 在 K 中的最佳 $L_p(1\leqslant p<\infty)$ 逼近的充要条件是
$$\int_X(Q-P)\operatorname{sgn}(f-P)dx\leqslant\int_{Z(f-P)}|Q-P|dx,\ \forall Q\in K,\quad 当\ p=1\ 时,$$
及
$$\int_X(Q-P)|f-P|^{p-1}\operatorname{sgn}(f-P)dx\leqslant 0,\ \forall Q\in K,\quad 当\ p>1\ 时.$$
关于唯一性，由于在此情形 $f^+=f^-=f$，故 $\bar{\bar{G}}\leqslant 1$. 因此根据定理6，当 H 是 n 维 Haar 子空间的条件下，f 在 H 中的最佳 L_p 逼近总是唯一的. 这是众所周知的事实.

(II)
$$F(x, y)=\max_{1\leqslant j\leqslant m}|f_j(x)-y|.$$
记 $s_1(x)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}f_j(x)$，$s_2(x)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}f_j(x)$. [1]中定理4指出，$F$ 之极小解等价于对 $\frac{1}{2}(s_1+s_2)$ 的最佳 L_1 逼近，因而问题归入上一情形 $(p=1)$.

(III)
$$F(x, y)=\sum_{j=1}^m|f_j(x)-y|.$$
由于微分运算 D_y^+ 和 D_y^- 的线性性，由(I)便知
$$U=\sum_{j=1}^m\Big[\int_X(Q-P)\operatorname{sgn}(P-f_j)dx+\int_{Z(f_j-P)}|Q-P|dx\Big].$$
于是得到

定理8 设 $K\subset L(X)$ 为准凸集，$P\in K$ 及 $\{f_j\}\subset C(X)$. 则 P 为 F 在 K 中的极小点的充要条件是
$$\sum_{j=1}^m\int_X(Q-P)\operatorname{sgn}(f_j-P)dx\leqslant\sum_{j=1}^m\int_{Z(f_j-P)}|Q-P|dx,\ \forall Q\in K.$$
为讨论唯一性，不妨假定 f_j 满足条件([2]中指出其它情形总可化成这种情形)

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_m. \tag{11}$$

则不难看出，当 m 为奇数时，$f^+=f^-=f_{\frac{m+1}{2}}$；而当 m 为偶数时，$f^+=f_{\frac{m}{2}+1}$，$f^-=f_{\frac{m}{2}}$. 于是此时定理 6 采取如下形式.

定理 9　设 H 是 n 维 Haar 子空间. 若 $\{f_i\}\subset C(X)$ 满足条件(11)，则

(a) 当 m 为奇数时，F 之极小点恒为唯一；

(b) 当 m 为偶数时，F 之极小点为唯一的充要条件是 $\overline{\overline{G}}\leqslant 1$，这里

$$G=\{Q\in H: f_{\frac{m}{2}}\leqslant Q\leqslant f_{\frac{m}{2}+1}\}.$$

我们的结果推广和完善了[2]中的结果.

参 考 文 献

[1] Holland, A. S. B., McCabe, J. H., Phillips, G. M., Sahney, B. N., Best simultaneous L_1 approximation, *J. Approximation Theory*, **24**: 4 (1978), 361—365.

[2] Carroll, M. P., McLaughlin, H. W., L_1 approximation of vector-valued functions, *J. Approximation Theory*, **7**: 2 (1973), 122—131.

[3] И. П. 那汤松著，徐瑞云译，实变函数论，人民教育出版社，北京，1958.

[4] M. A. 克拉斯诺西尔斯基，Я. Б. 鲁季茨基著，吴从炘译，凸函数和奥尔里奇空间，科学出版社，北京，1962.

[5] Karlin, S., Studden, W. J., Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics, Interscience, New York, 1966.

[6] 史应光，极小化与最佳逼近，数学年刊，**2**: 2 (1981), 225—232.

MINIMIZATION AND BEST APPROXIMATION (II)

SHI YINGYUANG
(*Computing Center, Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper similar to the previous work[6] is to discuss independently the problem of minimization of a functional $\Phi(P)=\int_X F(x, P(x))\,dx$ in a subset of the space $L(X)$. We have likewise established the concerned theorems of existence, characterization and uniqueness. The results herein may effectively be applied to a number of problems of approximation, especially to those of simultaneous approximation.