数 学 年 刊
3 (3) 1982

一类二阶线性椭圆型方程组 Dirichlet 问题按 Hausdorff 可解性

李 明 忠
(复旦大学)

本文研究一类复数形式的二阶椭圆型方程组

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}+q_1(z)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+q_2(z)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}+q_3(z)\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \bar{z}}+q_4(z)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z\,\partial \bar{z}}$$

$$+h\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\quad z\in G, \tag{1}$$

$$h=r_1(z)\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+r_2(z)\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+r_3(z)\frac{\partial w}{\partial z}+r_4(z)\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}+s_1(z)w+s_2(z)\bar{w}+s_0(z)$$

的 Dirichlet 问题. 即寻求在单连通域 G 内满足二阶复式方程(1), 在边界 Γ 上适合条件

$$w(z)\,|_{z\in\Gamma}=0 \tag{2}$$

的广义解, 简称为问题 D.

为简便起见, 不妨认为 G 是单位圆, 同时设方程的系数 $q_i(z)$ 是有界可测函数且均匀满足以下椭圆型条件

$$\sup_{z\in\bar{G}}(|q_1(z)|+|q_2(z)|)+\sup_{z\in\bar{G}}(|q_3(z)|+|q_4(z)|)\leqslant q_0<1, \tag{3}$$

$r_i(z),\ s_j(z)\in L_p(\bar{G}),\ p>2.$

我们知道, 对二阶椭圆组 Dirichlet 问题的可解性, 特别是解的唯一性问题, 许多作者都曾对不同类型的方程作过比较充分的讨论, 但对破坏了唯一性, 甚至是非 Naether 型可解的情况却讨论的很少[1~4]. 最初是 Биуадзе, A. B. 在[2]中例举了以下典型的二阶椭圆型方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=g_1,\\[2mm] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=g_2;\end{cases} \tag{4}$$

或它的复数形式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}=g(z),\quad w=u+iv,\quad g=g_1+ig_2, \tag{4'}$$

证明了复式方程(4′)的齐次 Dirichlet 问题有无穷多个线性独立解, 即它不是 Fredholm 和 Noether 型的, 而是按 Hausdorff 意义正规可解. 以后 Джураев, A. 又进一步在[4]中讨论了形如

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}+A(z)\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+B(z)w=g(z) \tag{5}$$

的二阶复式方程适合边界条件 (2) 的 Dirichlet 问题, 同样证明了它是 Hausdorff 型的.

本文 1980 年 4 月 21 日收到.

Miranda, C.在他的专著[5]中曾指出在椭圆型方程理论研究的近代发展中，讨论非强椭圆型方程组的 Dirichlet 问题没有有限个指标(即齐次问题线性独立解的个数是无限个)的情形是很重要的．因此，我们有必要进一步研究较为广泛的一类二阶椭圆型复式方程(1)的 Dirichlet 问题是否也具有按 Hausdorff 意义的可解性质．本文证明了当复式方程的系数满足一定条件时，问题 D 同样是 Hausdorff 型的，同时还给出了判别可解的充分必要条件，以及广义解的一般表达式．特别对于复式方程(4')，我们还求得问题 D 的共轭齐次问题 D_0^* 的一切线性无关解，并建立问题 D 和问题 D_0^* 之间的关系式．

§1．等价的奇异积分方程的可解性

由[6]已经知道，二阶复式方程(1)的广义解依赖于二个任意全纯函数，它可以表示成

$$w(z)=\varphi(z)+\psi(z)\bar{z}+\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)(\bar{\zeta}-\bar{z})}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta,\quad \zeta=\xi+i\eta, \tag{1.1}$$

其中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是域 G 内的二个任意全纯函数，$f(z)\in L_p(\bar{G})$，$p>2$，它满足一个平面域 G 上的奇异积分方程．而且能够证明当方程(1)的系数 $r_i(z)$，$s_j(z)$ 按 $L_p(\bar{G})$，$p>2$ 的范数取得适当小时，奇异积分方程对任意确定的自由端有唯一解．即 $f(z)$ 通过方程的系数和任意的全纯函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 而唯一确定．

为使表示式(1.1)能给出适合边界条件(2)的 Dirichlet 问题的解．将(1.1)代入(2)，并引进函数向量

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \psi(z)\end{pmatrix},\quad -\boldsymbol{F}(z)=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}\tilde{f}\\ \operatorname{Re} i\tilde{f}\end{pmatrix},\quad \tilde{f}(z)=\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)(\bar{\zeta}-\bar{z})}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta, \tag{1.2}$$

则问题 D 等价于全纯函数向量 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 的 Riemann–Hilbert 问题

$$\operatorname{Re}[\boldsymbol{G}(t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0)]=\boldsymbol{F}(t_0),\quad \boldsymbol{G}(t_0)=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{t_0}\\ i & \dfrac{i}{t_0}\end{pmatrix},\quad t_0\in\Gamma. \tag{1.3}$$

又因为 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 可表示成

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\boldsymbol{\mu}(t)}{t-z}\,dt+i\boldsymbol{c}, \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}(t)=\begin{pmatrix}\mu_1(t)\\ \mu_2(t)\end{pmatrix}$ 是定义在 Γ 上的实连续向量，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ 是实常数向量，它们都由 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 而单值确定．于是由(1.3)又得关于密度向量 $\boldsymbol{\mu}(t)$ 的奇异积分方程组

$$\operatorname{Re}[G(t_0)]\boldsymbol{\mu}(t_0)+\frac{\operatorname{Im}\boldsymbol{G}(t_0)}{\pi}\int_\Gamma \frac{\boldsymbol{\mu}(t)\,dt}{t-t_0}+\int_\Gamma K_0(t_0,t)\boldsymbol{\mu}(t)\,dt=\boldsymbol{F}(t_0), \tag{1.5}$$

其中 $K_0(t_0, t)$ 是弱奇性核．显见 $\det\boldsymbol{G}(t_0)=0$，故奇异积分方程组(1.5)是非 Noether 型的．现在，讨论全纯函数向量 $\boldsymbol{\Phi}(z)=\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \psi(z)\end{pmatrix}$ 的边值问题(1.2)的可解性．对任意给定的右端，由(1.2)可得

$$\varphi(t_0)+\bar{t}_0\psi(t_0)=-\tilde{f}(t_0), \tag{1.6}$$

同时 $\varphi(t_0)$ 作为域 G 内全纯函数的边值，又有

$$-\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=0, \tag{1.7}$$

于是由(1.6)可得 $\psi(t_0)$ 所适合的奇异积分方程

$$\bar{t}_0\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{[\tilde{f}(t_0)+\bar{t}\psi(t)]\,dt}{t-t_0}=-\tilde{f}(t_0), \tag{1.8}$$

易证 $$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\tilde{f}(t)\,dt}{t-t_0}=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)}{\zeta-t_0}d\xi\,d\eta\,\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{1}{\zeta-t}+\frac{1}{t-t_0}\right)\frac{(1-t\bar{\zeta})}{t}dt,$$

应用 Plemilj 公式并计算留数可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{(1-t\bar{\zeta})\,dt}{(\zeta-t)t}=\bar{\zeta},\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{(1-t\bar{\zeta})\,dt}{(t-t_0)t}=-\frac{\bar{t}_0+\bar{\zeta}}{2},$$

所以

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\tilde{f}(t)\,dt}{t-t_0}=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)\,(\bar{\zeta}-\bar{t}_0)}{\zeta-t_0}d\xi\,d\eta=-\tilde{f}(t_0). \tag{1.9}$$

联系(1.8)和(1.9)式，又得

$$\bar{t}_0\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\bar{t}\psi(t)\,dt}{t-t_0}=-2\tilde{f}(t_0). \tag{1.10}$$

再注意到(1.4)，有

$$\psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu_2(t)\,dt}{t-z}+ic_2,$$

且在边界上

$$\psi(t_0)=\mu_2(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu_2(t)\,dt}{t-t_0}+ic_2, \tag{1.11}$$

这里实函数 $\mu_2(t)\in C_\alpha(\Gamma)$ 和实常数 c_2 通过 $\psi(z)$ 唯一确定. 将(1.11)式代入(1.10)式，即得密度函数 $\mu_2(t)$ 所适合的奇异积分方程

$$\begin{aligned}\bar{t}_0\mu_2(t_0)&+\frac{\bar{t}_0}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu_2(t)\,dt}{t-t_0}+ic_2\bar{t}_0-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(\bar{t}\mu_2(t)+ic_2\bar{t})\,dt}{t-t_0}\\&-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\bar{t}dt}{t-t_0}\,\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu_2(t_1)\,dt_1}{t_1-t}=-2\tilde{f}(t_0),\end{aligned} \tag{1.12}$$

应用 Poincare-Berstran 转换公式[7]，可得

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\bar{t}dt}{t-t_0}\,\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu_2(t_1)\,dt_1}{t_1-t}=\bar{t}_0\mu_2(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(\bar{t}_1-\bar{t}_0)\,\mu_2(t_1)}{t_1-t_0}dt_1,$$

由此，再注意到 $\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}dt=-2\bar{t}_0$，方程(1.12)又可简化为

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(\bar{t}-\bar{t}_0)\,\mu_2(t)\,dt}{t-t_0}=\tilde{f}(t_0)+ic_2\bar{t}_0. \tag{1.13}$$

显见，方程(1.13)是第一种 Fredholm 型积分方程，积分核为

$$K(t,\ t_0)=\frac{1}{\pi i}\,\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0},\quad |K(t,\ t_0)|=\frac{1}{\pi}.$$

这样一来，解全纯函数的边值问题(1.2)，归结为解积分方程(1.13)，求得 $\mu_2(t)$，将它代入(1.11)得 $\psi(t)$，又从(1.6)得 $\varphi(t)$. $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别是全纯函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的边界值，于是，应用 Cauchy 公式便得边值问题(1.2)的解.

此外，由[2]知非齐次积分方程(1.13)可解的充分必要条件为:

i) $\widetilde{F}(t)=\widetilde{f}(t)+ic_2\bar{t}$ 和 $\nu(t)$ 的数量积 $(\widetilde{F},\nu)=0$，其中 $\nu(t)$ 是共轭齐次方程

$$\int_\Gamma K^*(t,t_0)\nu(t)dt=0$$

的解
$$K^*(t,t_0)=\overline{K(t_0,t)}=-\frac{1}{\pi i}\frac{t-t_0}{(\bar{t}-\bar{t}_0)}.$$

ii) 级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i d_i^2<\infty$，其中 λ_i 是方程

$$\psi-\lambda KK^*\psi=0$$

的特征值，$\psi_i(x)$ 是对应的特征函数，d_i 是 $\widetilde{F}(t)$ 关于 ψ_i 的富里埃系数.

因为
$$(\widetilde{F},\psi_i)=(\widetilde{F},\lambda_i KK^*\psi_i)=(\lambda_i\psi_i,\overline{KK^*\widetilde{F}}),$$

同时应用 Poincare–Berstran 转换公式，可求得

$$\begin{aligned}KK^*\widetilde{F}&=-\frac{1}{(\pi i)^2}\int_\Gamma\frac{(\bar{t}-\bar{t}_0)}{t-t_0}dt\int_\Gamma\frac{(t-t_1)\widetilde{F}(t_1)dt_1}{\bar{t}-\bar{t}_1}\\&=\frac{1}{(\pi i)^2}\int_\Gamma\widetilde{F}(t_1)dt_1\int_\Gamma\frac{(t\bar{t}_0-1)(t-t_1)dt}{(t-t_0)(1-t\bar{t}_1)}.\end{aligned}$$

考察函数

$$\psi(\zeta,z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(t\bar{z}-1)(t-\zeta)dt}{(t-z)(1-t\bar{\zeta})},\quad |\zeta|<1,\ |z|<1.$$

显然，当 $z\to t_0\in\Gamma$ 时，由 Cauchy 定理和 Plemilj 公式可知

$$\psi^+(\zeta,t_0)=\lim_{z\to t_0}\psi(\zeta,z)=\lim_{z\to t_0}\frac{2(z\bar{z}-1)(z-\zeta)}{1-z\bar{\zeta}}=0,\quad |t_0|=1,$$

$$\psi(\zeta,t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(t\bar{t}_0-1)(t-\zeta)dt}{(t-t_0)(1-t\bar{\zeta})}=\psi^+(\zeta,t_0)-\frac{(t_0\bar{t}_0-1)(t_0-\zeta)}{1-t_0\bar{\zeta}}=0.$$

再令 $\zeta\to t_1\in\Gamma$，又有

$$\psi^+(t_1,t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(t\bar{t}_0-1)(t-t_1)dt}{(t-t_0)(1-t\bar{t}_1)}=0,$$

从而又推得
$$KK^*\widetilde{F}=0\quad 和\quad d_i=(F,\psi_i)=0.$$

换言之，对于积分方程(1.13)，条件 ii) 自然满足，再注意到方程(1.13)的齐次方程就是它的相联方程，所以非齐次方程(1.13)可解的充分必要条件就是它的自由端和它的齐次方程的一切线性无关解成正交.

现在证明齐次方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{(\bar{t}-\bar{t}_0)\mu(t)dt}{t-t_0}=0 \tag{1.14}$$

有无穷多个线性无关解，而且

$$\mu_{1,k}(t)=\frac{t^k+\bar{t}^k}{2},\quad \mu_{2,k}=i\left(\frac{t^k-\bar{t}^k}{2}\right),\quad k=1,2,\cdots. \tag{1.15}$$

给出了积分方程(1.14)的解的完全组.

先考察函数

$$A(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1-t\bar{z}}{t-z}t^{k-1}dt=(1-z\bar{z})z^{k-1},\quad z\in G,$$

对于 Γ 上的任意点 t_0，有

$$A^+(t_0)=(1-|t_0|^2)t_0^{k-1}=0, \tag{1.16}$$

同时应用 Plemilj 公式，又有

$$A^+(t_0)-A^-(t_0)=(1-|t_0|^2)t_0^{k-1}+(\bar{t}_0-\bar{t}_0)t_0^k=0, \tag{1.17}$$

联立(1.16)和(1.17)，可得 $A^-(t_0)=A^+(t_0)=0$，从而

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(\bar{t}-\bar{t}_0)t^k}{t-t_0}dt=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(1-t\bar{t}_0)t^{k-1}dt}{t-t_0}=A^+(t_0)+A^-(t_0)=0\quad(k=1,2,\cdots). \tag{1.18}$$

再考察函数

$$B(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-z)t^{k-1}}{1-t\bar{z}}dt=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\bar{z}^j}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)t^{j+k-1}dt,$$

当 $|z|<1$, $k\geqslant 1$ 时，由 Cauchy 定理知上式积分为零，故对于 Γ 上的任一点 t_0，恒有 $B^+(t_0)=0$. 同时

$$B(z)=-\frac{1}{2\pi i}(\bar{z})^{-1}\int_\Gamma \frac{(t-z)t^{k-1}dt}{t-\dfrac{1}{\bar{z}}},$$

当 $t_0\in\Gamma$ 时，显然 $\dfrac{1}{\bar{t}_0}=t_0$，类似地也有

$$B^+(t_0)-B^-(t_0)=-t_0^k(t_0-t_0)=0,$$
$$B^-(t_0)=B^+(t_0)=0,$$

由此即得

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(\bar{t}-\bar{t}_0)\bar{t}^k dt}{t-t_0}=\overline{\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-t_0)t^{k-1}}{1-t\bar{t}_0}dt}=\overline{B^+(t_0)+B^-(t_0)}=0\quad(k=1,2,\cdots). \tag{1.19}$$

式(1.18)和(1.19)表明由(1.15)给出的 $\mu_{1,k}(t)$ 和 $\mu_{2,k}(t)$ 都是齐次积分方程(1.14)的解.

作全纯函数类

$$\psi_{i,k}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu_{i,k}(t)}{t-z}dt,\quad i=1,2;\ k=1,2,\cdots,$$

不难求得

$$\psi_{1,k}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{t^k+\bar{t}^k}{t-z}dt=z^k,\ \psi_{2,k}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{t^k-\bar{t}^k}{t-z}dt=iz^k. \tag{1.20}$$

而且边值问题(1.3)的一切解 $\psi(z)$ 都可以表示为以下的级数

$$\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k+i\beta_k)z^k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\psi_{1,k}(z)+\beta_k\psi_{2,k}(z), \tag{1.21}$$

这里 α_k, β_k 是实常数，并由边界条件(1.3)知，$\dfrac{\psi(z)}{z}$ 在 $z=0$ 必须有界，故 $\alpha_0=\beta_0=0$.

另外，对积分方程(1.14)的任何解 $\mu^*(t)$，由它可得对应于问题(1.3)的解 $\psi^*(z)$，这时它也必取(1.21)的形式，同时它又可通过

$$\mu(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\mu_{1,k}(t)+\beta_k\mu_{2,k}(t), \tag{1.22}$$

$$\psi^*(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)dt}{t-z} \tag{1.23}$$

而得到. 注意到 $\mu^*(t)$ 和 $\psi^*(z)$ 也适合(1.23)，且是一一对应，故 $\mu^*(t)\equiv\mu(t)$. 这就是说，

在实数域上 $\{\mu_{1,k}(t)\}$ 和 $\{\mu_{2,k}(t)\}$ 构成了齐次积分方程(1.14)的解的完全组. 非齐次方程(1.13)可解的充分必要条件是

$$\int_\Gamma \mu_{1,k}(t)\,[\tilde{f}(t)+ic_2\bar{t}]\,dt=0,\quad i=1,\ 2;\quad k=1,\ 2,\ \cdots. \tag{1.24}$$

因为当 $k\geqslant 1$ 时,有

$$\int_\Gamma t^k\bar{t}\,dt=\int_\Gamma t^{k-1}dt=0,\quad \int_\Gamma \bar{t}^k\bar{t}\,dt=-\overline{\int_\Gamma t^{k-1}dt}=0,$$

所以(1.24)又化为

$$\int_\Gamma \mu_{i,k}(t)\tilde{f}(t)\,dt=0,\quad i=1,\ 2;\quad k=1,\ 2,\ \cdots. \tag{1.25}$$

式(1.25)表明非齐次积分方程(1.13)可解的充分必要条件有无穷多个, 方程(1.13)的解依赖于无穷多个任意实常数. 即证明了第一种 Fredholm 型积分方程(1.13)具有按 Hausdorff 意义的正规可解性. 综上所述,我们有

定理 1 对任意确定的 $\tilde{f}(t)\in C_\alpha(\Gamma)$, 与边值问题(1.3)等价的奇异积分方程(1.13)可解的充分必要条件是满足(1.25)式, 而且解依赖于无穷多个任意实常数. 由(1.15)给出的函数列 $\{\mu_{i,k}(t)\}$ 构成了齐次方程(1.14)的线性无关解的完全组.

值得指出, 上面对边值问题(1.3)和奇异积分方程(1.13)的讨论, 虽然指明了它们具有按 Hausdorff 意义正规可解的性质,但这种讨论的方法, 还不能用以对一般的二阶复式方程(1)的 Dirichlet 问题具体求解, 因由[6]知 $\tilde{f}(z)$ 一般情况下又依赖于全纯函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$. 为此, 在下一节中,我们还有必要引进平面域上的奇异积分方程,讨论边值问题(1)、(2)的可解性,并建立问题 D 和共轭齐次问题 D_0^* 解之间的关系.

§2. 边值问题 D 的可解条件和解的表示式

如§1中所述,二阶复式方程(1)的广义解 $w(z)$ 可以表示成(1.1)的形式,这时不妨取 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 为

$$\begin{cases}\varphi(z)=\dfrac{z}{\pi}\displaystyle\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,(\zeta-z)}{1-\bar{\zeta}z}\,d\xi\,d\eta+\varphi_1(z),\\ \psi(z)=\psi(0)+\psi_1(z)z.\end{cases} \tag{2.1}$$

于是(1.1)可写成

$$w(z)=\varphi_1(z)+\bar{z}\psi(0)+z\bar{z}\psi_1(z)+\frac{z}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,(\zeta-z)}{1-\bar{\zeta}z}\,d\xi\,d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)\,(\bar{\zeta}-\bar{z})}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.2}$$

因为在边界 $|z|=1$ 上, $\mathrm{Re}[w]=0$, 所以由(2.2)即得

$$\mathrm{Re}[\varphi_1(z)+\psi_1(z)]=-\mathrm{Re}\left[\frac{\psi(0)}{z}\right],$$

应用 Schwarz 积分公式,有

$$\varphi_1(z)+\psi_1(z)=-\frac{\psi(0)}{4\pi i}\int_\Gamma\frac{(t+z)\,dt}{t^2(t-z)}-\frac{\overline{\psi(0)}}{4\pi i}\int_\Gamma\frac{(t+z)\,dt}{t-z}+ic_0$$
$$=-z\overline{\psi(0)}+ic_0,\tag{2.3}$$

即有

$$\varphi_1(z)=-\psi_1(z)-z\overline{\psi(0)}+ic_0.\tag{2.4}$$

将(2.4)代入(2.2)，又得

$$w(z)=2i\,\mathrm{Im}(\bar z\psi(0))-(1-z\bar z)\psi_1(z)+\frac{z}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z}\,d\xi\,d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)\,(\bar\zeta-\bar z)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta+ic_0,\tag{2.5}$$

又因 $w(z)$ 还适合边界条件 $\mathrm{Re}[iw]=0$，所以

$$\mathrm{Re}\Big[\frac{iz}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z}\,d\xi\,d\eta\Big]=2\,\mathrm{Im}(\bar z\psi(0))+c_0-\mathrm{Re}\Big[\frac{i}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)\,(\bar\zeta-\bar z)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta\Big].\tag{2.6}$$

注意到 $\frac{iz}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z}\,d\xi\,d\eta$ 是在域 G 内全纯，在 $G+\Gamma$ 上按 Hölder 意义连续，故由(2.6)，同样可应用 Schwarz 积分公式表示成

$$\frac{iz}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z}\,d\xi\,d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[2\,\mathrm{Im}(\bar t\psi(0))+c_0]\,(t+z)\,dt}{t(t-z)}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mathrm{Re}\Big[\frac{i}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)\,(\bar\zeta-\bar t)}{\zeta-t}\,d\zeta\,d\eta\Big](t+z)\,dt}{t(t-z)},\tag{2.7}$$

计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[2\,\mathrm{Im}(\bar t\psi(0))+c_0]\,(t+z)\,dt}{t(t-z)}=2i\overline{\psi(0)}z-ic_0,\tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mathrm{Re}\Big[\frac{i}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)\,(\bar\zeta-\bar t)}{\zeta-t}\,d\xi\,d\eta\Big](t+z)\,dt}{t(t-z)}$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint_G f(\zeta)\,d\xi\,d\eta\int_\Gamma\frac{(t\bar\zeta-1)\,(t+z)\,dt}{(\zeta-t)\,t^2(t-z)}+\frac{1}{4\pi^2}\iint_G\overline{f(\zeta)}\,d\zeta\,d\eta\int_\Gamma\frac{(\zeta-t)\,(t+z)\,dt}{(t-z)\,(1-t\bar\zeta)}.\tag{2.9}$$

注意到，当 z, $\zeta\in G$ 时，$\frac{(t\bar\zeta-1)\,(t+z)}{(\zeta-t)\,t^2(t-z)}$ 关于 t 在 G 外全纯，在 $t=\infty$ 处有二阶零点，所以(2.9)的第一项分为零，而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{(\zeta-t)\,(t+z)\,dt}{(t-z)\,(1-t\bar\zeta)}=\frac{2z(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z},$$

由此，易知积分(2.9)等于 $\frac{iz}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,(\zeta-z)}{1-\bar\xi z}\,d\xi\,d\eta$. 联系(2.8)，等式(2.7)可简化为

$$\frac{z}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z}\,d\xi\,d\eta=z\overline{\psi(0)}-\frac{c_0}{2},\tag{2.10}$$

令 $z=0$，得 $c_0=0$. 于是展开上式，可得

$$\overline{\psi(0)}=\frac{1}{\pi}\iint_G \overline{f(\zeta)}\,\zeta\,d\xi\,d\eta+\sum_{k=1}^{\infty}z^k\frac{1}{\pi}\iint_G \overline{f(\zeta)}\,\bar{\zeta}^{k-1}(\zeta\bar{\zeta}-1)\,d\xi\,d\eta, \tag{2.11}$$

式(2.11)对于域 G 内的一切 z 恒成立，故必有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G \overline{f(\zeta)}\,\zeta\,d\xi\,d\eta=\overline{\psi(0)},\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G \overline{f(\zeta)}\,\bar{\zeta}^{k-1}(\zeta\bar{\zeta}-1)\,d\xi\,d\eta=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots.\end{cases} \tag{2.12}$$

由此可见，当且仅当 $f(z)\in L_p(\overline{G})$ 适合条件(2.12)时，表示式(2.2)才适合问题 D 的边界条件，这时解的表示式可写成

$$w(z)=(z\bar{z}-1)\psi_1(z)+\frac{\bar{z}}{\pi}\iint_G f(\zeta)\bar{\zeta}\,d\xi\,d\eta+\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)(\bar{\zeta}-\bar{z})}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta, \tag{2.13}$$

显见解式依赖于一个任意全纯函数.

为了最后得问题 D 的解，必须将(2.13)代入二阶复式方程(1)，得到与问题 D 完全等价的奇异积分方程

$$f(z)+q_1(z)\widetilde{\Pi}f+q_2(z)\overline{\widetilde{\Pi}f}+q_3(z)\Pi f+q_4(z)\overline{\Pi f}+Rf=g(z), \tag{2.14}$$

其中 $g(z)$ 是由方程(1)的系数和任意全纯函数 $\psi_1(z)$ 而完全确定的函数,

$$g(z)\in L_p(\overline{G}),\quad p>2.$$

奇性算子

$$\widetilde{\Pi}f=\frac{2}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)(\bar{\zeta}-\bar{z})}{(\zeta-z)^3}\,d\xi\,d\eta,\quad \Pi f=-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta,$$

由[6]知，它们都是空间 $L_p(\overline{G})$ 中的线性有界算子且映照 $L_p(\overline{G})$ 于本身，在 $L_2(\overline{G})$ 中范数 $\Lambda_2(\widetilde{\Pi})=\Lambda_2(\Pi)=1$.

弱奇性算子

$$Rf=r_1(z)Tf+r_2(z)\overline{Tf}+r_3(z)\widetilde{T}f+r_4(z)\overline{\widetilde{T}f}+s_1(z)\overline{T^0f}+s_2(z)\widetilde{T}^0f,$$

其中 Tf, $\widetilde{T}f$, $\widetilde{T}^0f$ 如[6, 8]中所述. 算子 Rf 也是空间 $L_p(\overline{G})$ 中的线性有界算子，且还是 $L_p(\overline{G})$ $(p>2)$ 中的全连续算子，它同样映照 $L_p(\overline{G})$ 于本身.

这样一来，应用压缩原理，可以证明在条件(3)下，当方程(1)的低阶项系数 $r_i(z)$, $s_j(z)$ 在 $L_p(\overline{G})$, $(p>2)$ 中的模取得适当小时，奇异积分方程(2.14)有唯一解 $f(z)$，它可通过积分方程的解核 $\Gamma(z,\ \zeta)$ 来表示，即

$$f(z)=\Gamma g=\iint_G \Gamma(z,\ \zeta)g(\zeta)\,d\xi\,d\eta. \tag{2.15}$$

于是由(2.12)可得等价的可解条件

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \zeta^{k-1}(1-\zeta\bar{\zeta})\Gamma g\,d\xi\,d\eta=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots. \tag{2.16}$$

由此可见，当且仅当条件(2.16)成立时，由(2.15)代入(2.13)得到 $w(z)$，它便是边值问题(1)、(2)的广义解.

此外，由解的表示式(2.13)知，问题 D 的解依赖于一个任意全纯函数，即一般情况下，它有无穷多个解. 具体说来，第一，若(2.15)中的 $f(z)$ 与 $\psi_1(z)$ 无关且适合可解条件(2.16)，

则问题有无穷多个解. 第二, 若(2.15)中的 $f(z)$ 与 $\psi_1(z)$ 有关, 这时可将 $\psi_1(z)$ 展成幂级数

$$\psi_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k+i\beta_k)z^k, \tag{2.17}$$

将它代入条件(2.16), 可得关于实数列 $\{\alpha_k, \beta_k\}$ 的无限维的线性代数方程组, 这时, 若对应的线性代数方程组是满秩可解的, 则 α_k, β_k 唯一确定, 对应的问题 D 有唯一解; 若对应的代数方程组的秩是有限数, 则对应的问题 D 有依赖于无穷多个任意实常数的解. 而且这两种情形都是可能出现的, 可参阅[2, 3]. 换言之, 我们又有

定理 2 若二阶线性复式方程(1)的系数 $q_i(z)$ 适合条件(3), 且低阶项的系数 $r_i(z)$, $s_j(z)$ 按 $L_p(\overline{G})$, $p>2$ 的模取得适当小, 则边值问题 D 可解的充分必要条件有无穷多个; 当且仅当这些条件(2.12)或(2.16)满足时, 问题 D 可解, 且解可以表示成(2.13)的形式, 它依赖于一个任意全纯函数, 其中 $f(z)\in L_p(\overline{G})$ 是等价的奇异积分方程(2.14)的解.

基于上述结果, 我们进一步考察方程组(4)或(4′)的问题 D 和它的共轭齐次问题 D_0^*

$$D_0^*: \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w^*}{\partial z^2}=0, \\ w^*(z)\,|_{z\in\Gamma}=0. \end{cases} \tag{2.18}$$

利用前面研究的结果, 易知它们的广义解分别为

$$w(z)=(z\bar z-1)\psi(z)+\frac{\bar z}{\pi}\iint_G g(\zeta)\bar\zeta\,d\xi\,d\eta+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{g(\zeta)(\bar\zeta-\bar z)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta \tag{2.19}$$

和

$$w^*(z)=(z\bar z-1)\overline{\psi^*(z)}. \tag{2.20}$$

将 $\psi^*(z)$ 展成幂级数

$$\psi^*(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k^*+i\beta_k^*)z^k,$$

则

$$w^*(z)=(z\bar z-1)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\bar z^k-(z\bar z-1)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k i\bar z_k, \tag{2.21}$$

由此可见, 共轭齐次问题 D_0^* 有无穷多个线性无关解

$$\varphi_{1,k}^*(z)=(z\bar z-1)\bar z^{k-1},$$
$$\varphi_{2,k}^*(z)=(z\bar z-1)i\bar z^{k-1}\quad k=1, 2, \cdots, \tag{2.22}$$

它构成了问题 D_0^* 在实数域上的线性无关解的完全组. 从而条件(2.12)(这时 $f(\zeta)=g(\zeta)$)表明问题 D 可解的充分必要条件是方程(4′)的自由端 $g(z)$ 同共轭齐次问题 D_0^* 的一切解成正交. 另外, 应用 Green 公式

$$\iint_G(\overline{w}^*w_{\bar z\bar z}-w\overline{w}_{\bar z\bar z})\,dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_\Gamma(\overline{w}^*w_{\bar z}-w\overline{w}_{\bar z}^*)\,dz,$$

由于 $\overline{w}_{\bar z\bar z}^*=0$, $z\in G$; $w^*|_\Gamma=w|_\Gamma=0$, 所以, 又由方程(4′)和(2.22)式可得

$$\iint_G g(z)\bar z^{k-1}(z\bar z-1)\,dx\,dy=0,\quad k=1, 2, \cdots. \tag{2.23}$$

这就是说 $g(z)$ 满足可解的充分必要条件, 所以二阶椭圆型方程组(4)或(4′)适合齐次边界条件(2)的 Dirichlet 问题一定可解, 且解依赖于一个任意全纯函数, 并可由(2.19)式给出, 显见, 它有无穷多个线性无关解. 这个结果, Бицадзе, А. В. 在[2]中也同样得到, 由于

研究的方法不同，他得到的解式为

$$w(z)=(1-z\bar{z})\psi(z)-\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{tw_0(t)\,dt}{t-z}+w_0(z),$$

$$w_0(z)=\frac{1}{\pi^2}\iint_G\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta-z}\iint_G\frac{g(t)\,d\xi_1\,d\eta_1}{t-\zeta},\quad \zeta=\xi+i\eta,\quad t=\xi_1+i\eta_1. \tag{2.24}$$

由[6]知，$w_0(z)$的右端表示式就等于

$$w_0(z)=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{g(\zeta)\,(\bar{\zeta}-\bar{z})}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta,$$

而 $$-\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{tw_0(t)\,dt}{t-z}=-\frac{\bar{z}}{\pi}\iint_G g(\zeta)\,d\xi\,d\eta\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(1-t\bar{\zeta})\,dt}{(t-\zeta)\,(t-z)}=\frac{\bar{z}}{\pi}\iint_G g(\zeta)\,\bar{\zeta}\,d\xi\,d\eta,$$

所以，解的表示式(2.24)和(2.19)是完全一致的。

由此也告诉我们，一般的二阶复式方程(1)的 Dirichlet 问题可解的充分必要条件，也就是等价的奇异积分方程的解 $f(z)$ 同共轭齐次问题 D_0^* 的一切解成正交。

最后指出，前面讨论二阶线性复式方程(1)所得到的结果，可以推广到二阶复式方程为拟线性和非线性的情形。

参 考 文 献

[1] Боярский, Б. В., *Bull. Acad. Polon. Sci.* **7**: 1, (1959).
[2] Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений Второе порядка, Москва, (1966).
[3] 华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，(1979).
[4] Джураев, А. *Сибир, Матем. Журнал.*, **9**: 1 (1968).
[5] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer-Verlay Berlin Heidelbery, New york, (1970).
[6] 李明忠，数学学报，**14**: 1 (1964).
[7] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, Изд Второе, ГИФМЛ, Москва, 1963.
[8] Векуа, И. И., 广义解析函数，人民教育出版社，(1960).

ON THE HAUSDORFF SOLVABILITY OF DIRICHLET PROBLEM FOR A CLASS OF SECOND ORDER ELLIPTIC SYSTEMS

LI MINGZHONG
(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper we study the Dirichlet problem for a class of second order linear elliptic complex equation and show that the problem is of Hausdorff type. We also obtain the sufficient and necessary conditions for the solvability of the boundary value problem and the expression of the generalized solution.