数 学 年 刊
3 (3) 1982

最优过程罚函数方法的数学理论

陈 祖 浩
（山东大学）

§1. 前言与问题的叙述

罚函数方法是解相坐标受限的最优控制问题的有力工具，奠基性的工作是[1, 2]，其后的发展见[3—6]等．通常的外罚和内罚函数是分开定义的，且必须分别具有下述性质：在受限域 B 外的任一闭域 D 上 $\lim\limits_{k\to+\infty}\min\limits_{D} p_k(\cdot)=+\infty$；当点 $x(t)\to x(c_1)\in\partial B$ 时，$p_k(\cdot)\to+\infty$ 和 $\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)dt=+\infty$．本文把外和内罚函数的概念作了扩展和统一处理为三个性质，揭示了外和内罚函数的共同特性和不同之处主要表现在 ∂B 的邻域内而与邻域外的值无关，文[1—4]等均为本文的特例．这样，扩大了对罚函数的选择范围，有可能加快带罚函数的最优控制问题收敛于原始受限最优控制问题的速率．

我们还对罚函数较细地分为六类，并采取统一的处理方法，得到了在极限情形下带罚函数的非受限最优控制问题等价于受限最优控制问题的一些充分条件和充要条件．

现考虑受控系统由微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ u) \tag{1.1}$$

来描述，此处 $x\in\mathbf{R}^n$, $u\in\mathbf{R}^r$, 向量函数 $f=(f_1,\ \cdots,\ f_n):\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^n$, $f(\cdot)$ 的每一分量 $f_i(\cdot)$ 在直积 $I\times O\times U$ 上是 $C^{(1)}$ 类函数，其中 $I=[a,\ b]$ 是 t 轴上长度有限但不为零的闭区间，O 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 内的开集或者就是 $\mathbf{R}^n$ 本身，U 是 $\mathbf{R}^r$ 内的有界闭集．

记 Δ 为在 U 内取值的可测函数 $u(t)$, $a_u\leqslant t\leqslant b_u(a\leqslant a_u<b_u\leqslant b)$，的全体所成的函数类．设 B 是 O 内一有非空内部的闭集．今后用 $\overset{\circ}{*}$ 记集 $*$ 的内部，用 $\partial *$ 记集 $*$ 的边界．又给定位于 $\overset{\circ}{B}$ 内互不相交的两个闭流形 S_0 和 S_1.

任给集合 $D\subset O$, 记 $\Delta[D]$ 为这样的控制类：当 $u\in\Delta[D]$ 时，有 $u\in\Delta$, 对应的状态向量 $x(t)\in D$, $a_u\leqslant t\leqslant b_u$, 有 $x(a_u)=x_0\in S_0$, $x(b_u)=x_1\in S_1$, $x(t)\overline{\in}S_i$, $a_u<t<b_u$, $(i=0,\ 1)$．特别地可取 $D=O$, B 和 $\overset{\circ}{B}$ 等．当 $u\in\Delta[O]$ 时，称 u 为容许控制，相应的 $x(t)$ 称为容许轨线，$(u,\ x)$ 或 $(x,\ u)$ 称为容许对．

记 $\hat{C}[D]$ 为定义在 $(a\leqslant)\,a_1\leqslant t\leqslant b_1(\leqslant b)$ 且在域 D 内取值并满足边值条件 $x(a_1)\in S_0$, $x(b_1)\in S_1$ 的绝对连续向量函数 $x(t)$ 之全体所成的函数类．

显然，对任一个 $u\in\Delta[O]$，方程(1.1)的解关于初值唯一地确定且解 $x(t)\in\hat{C}[O]$，这由微分方程解的存在性定理即得知．今后，还假定，对一切 $u\in\Delta[O]$，存在数 $L>0$, 使相应的状态变量有

本文1980年5月8日收到．

$$\|x(t)\| \leqslant L, \quad a_u \leqslant t \leqslant b_u,$$

此处$\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$是欧几里德模.

引理 1.1 设$\varDelta[O]$非空,任取$u\in\varDelta[O]$,则对应的$x(t)$, $a_u\leqslant t\leqslant b_u$, 有

$$\|x(t_2)-x(t_1)\| \leqslant s(t_2)-s(t_1) \leqslant K(t_2-t_1),$$

此处$a_u\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b_u$, $s(t)$表从点$x(a_u)$到点$x(t)$的轨线弧长, K是$\|f(\cdot)\|$在有界闭集$I\times\{x\mid \|x\|\leqslant L\}\times U$上的上界.

证　事实上,对$u\in\varDelta[O]$有$\|\dot{x}(t)\|=\|f(t, x(t), u(t))\|\leqslant K$, $a_u\leqslant t\leqslant b_u$; 又从

$$ds=\|\dot{x}(t)\|dt,$$

立即得证本引理.

现引进泛函

$$J[u] \triangleq \int_{a_u}^{b_u} f_0(t, x, u)\,dt, \tag{1.2}$$

此处$f_0(\cdot)$在$I\times O\times U$上连续. 记

$$J_* \triangleq \inf_{u\in\varDelta[B]} J[u], \quad \mathring{J}_* \triangleq \inf_{u\in\varDelta[\mathring{B}]} J[u], \quad J_0 \triangleq \inf_{u\in\varDelta[O]} J[u]. \tag{1.3}$$

显然

$$J_0 \leqslant J_* \leqslant \mathring{J}_*.$$

定义 1 求$u_*\in\varDelta[B]$使$J[u_*]=J_*$, 称为相坐标有界的最优控制问题, 或称受限最优控制问题,简称问题$\mathscr{A}$; 相应的容许对(u_*, x_*)称为问题$\mathscr{A}$的解.

定义 2 若问题$\mathscr{A}$的一个解$(\hat{u}, \hat{x})$有性质$\hat{u}\in\varDelta[\mathring{B}]$, 或即$\hat{x}(t)\in\mathring{B}$, $a_u\leqslant t\leqslant b_u$, 则称$(\hat{u}, \hat{x})$是问题$\mathscr{A}$的一个非受限解.

定义 3 凡具下列性质的连续函数列$\{p_k(t, x, u)\}$, 称为外(内)罚函数列[*]:

(1) $p_k(\cdot)$在直积$I\times O\times U(I\times\mathring{B}\times U)$上非负.

(2) 对任定的紧集$D\subset\mathring{B}$, 有

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{(x,u)}\int_{a_1}^{b_1} p_k(t, x(t), u(t))\,dt=0, \tag{1.4}$$

此处$x\in\hat{C}[D]$, $a_1\leqslant t\leqslant b_1$是$x(t)$的定义区间, u是$\varDelta$中以$[a_1, b_1]$为定义区间的任一函数.

(3) 存在具有性质$B_{k+1}\subset B_k\subset O$, $B=\bigcap_{k=1} B_k$和$B_k\neq B(B_k=B)$的某个闭集序列$\{B_k\}$, 使在域$B_k(B)$上, 对有性质$x(t)\in\mathring{B}_k(\mathring{B})$, $a_1\leqslant t<c_1$, $x(c_1)\in\partial B_k(\partial B)$的定义区间是$a_1\leqslant t\leqslant b_1$而$a_1<c_1\leqslant b_1$的任一函数$x\in\hat{C}[O]$ $(\hat{C}[B])$, 和确定在$[a_1, c_1]$上的$u\in\varDelta$, 都有

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(t, x(t), u(t))\,dt \geqslant \mathring{J}_*-J_0+\rho(\mathring{J}_*-J_*+\rho), \tag{1.5}$$

此处ρ是一正数.

易见,若按下一节的公式(2.1)选取$p_k(\cdot)$使满足下式,即能使式(1.5)成立

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)\,dt \geqslant 2\overline{M}(b-a)+\rho, \quad \overline{M}=\max(M, |m|). \tag{1.6}$$

定义 4 若$\{p_k(\cdot)\}$是外罚函数列,在域B及∂B上满足内罚函数所满足的不等式

* 此处及往后各节的叙述中, 遇到括号时,前后括号内的和紧跟括号前的文字或符号,分别相互对应, 而其余的则共用.

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)dt \geqslant \mathring{J}_* - J_* + \rho, \tag{1.7}$$

则称 $\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚型外罚函数列.

若 $\{p_k(\cdot)\}$ 是外罚函数列,设还满足加强了的性质(2),即对域 $D=B$ 有

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{(x,u)} \int_{a_1}^{b_1} p_k(t, x, u)dt = 0, \tag{1.8}$$

此处 $x\in\hat{C}[B]$, $u\in\Delta$, $t\in[a_1, b_1]$, 则称 $\{p_k(\cdot)\}$ 是强外罚函数列.

若在定义 3 的关于内罚函数的叙述中,用

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(t, x, u)dt \geqslant \rho > 0 \tag{1.9}$$

代替式(1.5), 则称 $\{p_k(\cdot)\}$ 是弱内罚函数列.

若 $\{p_k(\cdot)\}$ 是外罚函数列, 设在域 B 和 ∂B 上满足的是式(1.9), 则称 $\{p_k(\cdot)\}$ 是弱内罚型外罚函数列.

现在,引入泛函和记号

$$J_k[u] \triangleq J[u] + \int_{a_u}^{b_u} p_k(t, x, u)dt, \tag{1.10}$$

$$J_{k0} \triangleq \inf_{u\in\Delta[O]} J_k[u], \quad J_{k*} \triangleq \inf_{u\in\Delta[B]} J_k[u]. \tag{1.11}$$

定义 5　求 $u_*^k\in\Delta[O]$ $(\Delta[B])$ 使 $J_k[u_*^k]=J_{k0}(J_{k*})$, 这样的最优控制问题称为问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$, 相应的 (u_*^k, x_*^k) 称为问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A})$ 的解. 若 $x_*^k(t)\in O(\mathring{B})$, $a_u\leqslant t\leqslant b_u$, 则称 (u_*^k, x_*^k) 为问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 的非受限解.

一般地说, 问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 的解 (u_*^k, x_*^k), 不一定存在和非受限. 但后面将证明, 对系统(3.1)、(3.2)和(3.3), 当 $\{p_k(\cdot)\}$ 是外(内)罚函数列时, 问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 一定有非受限解.

§2. J_0、J_*、$\mathring{J}_*$ 和 J_{k0}、J_{k_*} 的存在性和收敛性

本节将导出数 J_0、J_* 等的存在性及 $\{J_{k0}\}$ 和 $\{J_{k*}\}$ 收敛于 J_* 的充分条件. 应指出, 这里并未要求问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 和问题 $\mathscr{A}$ 的解存在.

引理 2.1　设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空, $\{p_k(\cdot)\}$ 是满足定义 3 的性质(1)的函数列,则 J_0、J_*、$\mathring{J}_*$、$J_{k0}(J_{k*})$, $k=1, 2, \cdots$, 存在且有关系式

$$M(b-a) \geqslant \mathring{J}_* \geqslant J_* \geqslant J_0 \geqslant \begin{cases} 0, & \text{当 } \mathrm{m}\geqslant 0 \text{ 时}, \\ \mathrm{m}(b-a), & \text{当 } \mathrm{m}<0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$J_{k0}(J_{k*}) \geqslant J_0(J_*), \tag{2.2}$$

此处 M 和 m 分别是 $f_0(\cdot)$ 在 $I\times\{x|\,\|x\|\leqslant L\}\times U$ 上的上界和下界.

证　(一) 因 $I\times\{x|\,\|x\|\leqslant L\}\times U$ 是有界闭集, 故 $f_0(\cdot)$ 的上界和下界 M 和 m 是有限数,因此

$$M\geqslant f_0(t, x, u)\geqslant \mathrm{m}, \quad \text{当} \quad (t, x, u)\in I\times\{x|\,\|x\|\leqslant L\}\times U \text{ 时},$$

$$M(b-a) \geqslant \int_{a_u}^{b_u} f_0(t, x, u)dt \geqslant \mathrm{m}(b_u-a_u), \quad u\in\Delta[O].$$

由上式即可见，对 $\forall u\in\Delta[O]$ 有

$$M(b-a)\geqslant J[u]\geqslant\begin{cases}0, & \text{当 } \mathrm{m}\geqslant 0 \text{ 时},\\ \mathrm{m}(b-a), & \text{当 } \mathrm{m}<0 \text{ 时},\end{cases}\tag{2.3}$$

因 $\mathring{B}\subset B\subset O$，故对 $u\in\Delta[\mathring{B}]$ 和 $u\in\Delta[B]$，式(2.3)也成立，且注意到 $J_0\leqslant J_*\leqslant\mathring{J}_*$，即得式(2.1)．

（二）注意到 $p_k(\cdot)$ 的非负性，即知对 $\forall u\in\Delta[O]\,(\Delta[B])$，有 $J[u]\leqslant J_k[u]$．由此易得式(2.2)．

引理 2.2 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是满足定义 3 中性质(1)、(2)的函数列，则对任何 $\bar{u}\in\Delta[\mathring{B}]$，有

$$J_0(J_*)\leqslant\varliminf_{k\to+\infty}J_{k0}(J_{k*})\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}J_{k0}(J_{k*})\leqslant J[\bar{u}].\tag{2.4}$$

证 （一）任定 $\bar{u}\in\Delta[\mathring{B}]$，则对应的 $\bar{x}(t)\in\mathring{B}$，$\bar{a}\leqslant t\leqslant\bar{b}$，故可取闭域 D，使

$$\bar{x}(t)\in D\subset\mathring{B},\quad \bar{a}\leqslant t\leqslant\bar{b}.$$

注意到 $J_{k0}(J_{k*})$ 的定义，易见

$$J_{k0}(J_{k*})\leqslant J_k[\bar{u}]\leqslant J[\bar{u}]+\sup_{u\in\Delta[D]}\int_{a_u}^{b_u}p_k(t,\,x(t),\,u(t)dt.$$

由此，从上、下限的运算规则即得

$$\varliminf_{k\to+\infty}J_{k0}(J_{k*})\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}J_{k0}(J_{k*})\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}\Big[J[\bar{u}]+\sup_{u\in\Delta[D]}\int_{a_u}^{b_u}p_k(\cdot)dt\Big]$$

$$\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}J[\bar{u}]+\varlimsup_{k\to+\infty}\sup_{u\in\Delta[D]}\int_{a_u}^{b_u}p_k(\cdot)dt.$$

注意到定义 3 的性质(2)及引理 2.1，即得式(2.4)．

注意到式(2.4)中 $\bar{u}\in\Delta[\mathring{B}]$ 的任意性，由引理 2.2．立即得到下面的两个定理．

定理 2.1 在上述引理的假设下，有

$$J_0(J_*)\leqslant\varliminf_{k\to+\infty}J_{k0}(J_{k*})\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}J_{k0}(J_{k*})\leqslant\mathring{J}_*.\tag{2.5}$$

定理 2.2 设上面定理的假定成立．若 $J_0=\mathring{J}_*$，则 $\{J_{k0}\}$ 和 $\{J_{k*}\}$ 的极限存在且就是 J_*；若 $J_*=\mathring{J}_*$，则 $\{J_{k*}\}$ 的极限存在且就是 J_*．

定理 2.3 设 $\Delta[B]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 满足定义 3 中的性质(1)和加强了的性质(2)，则有

$$J_0\leqslant\varliminf_{k\to+\infty}J_{k0}\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}J_{k0}\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}J_{k*}\leqslant J_*,\tag{2.6}$$

$$J_0\leqslant\varliminf_{k\to+\infty}J_{k0}\leqslant\varliminf_{k\to+\infty}J_{k*}\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}J_{k*}\leqslant J_*.\tag{2.7}$$

证 只要证明两不等式的最右边不等式就够了．因 $\Delta[B]\subset\Delta[O]$，故

$$J_{k0}\leqslant J_{k*}=\inf_{u\in\Delta[B]}\Big[J[u]+\int_{a_u}^{b_u}p_k(t,\,x,\,u)dt\Big],$$

由此式及上、下限的运算即可见

$$J_{k0}\leqslant J_{k*}\leqslant\inf_{u\in\Delta[B]}J[u]+\sup_{u\in\Delta[B]}\int_{a_u}^{b_u}p_k(t,\,x,\,u)dt.$$

注意到 $J_*=\inf\limits_{u\in\Delta[B]}J[u]$ 及式(1.8)，即得式(2.6)，(2.7)．

§3. 问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 和问题 $\mathscr{A}$ 的解的存在性

从本节起的往后各节，我们所研究的是线性地依赖于 u 的系统，即设

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x,\ u)=g(t,\ x)+B(t,\ x)u, \tag{3.1}$$

$$J[u]=\int_{a_u}^{b_u} f_0(t,\ x,\ u)dt=\int_{a_u}^{b_u}\{g_0(t,\ x)+\langle h_0(t,\ x),\ u\rangle\}dt, \tag{3.2}$$

$$J_k[u]=J[u]+\int_{a_u}^{b_u} p_k(t,\ x,\ u)dt=J[u]+\int_{a_u}^{b_u}\{p_{0k}(t,\ x)+\langle q_{0k}(t,\ x),\ u\rangle\}dt, \tag{3.3}$$

此处 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是数积，$g(t,\ x)$ 和 $h_0(t,\ x)$，$q_{0k}(t,\ x)$ 分别是 n 维和 r 维向量函数，$B(t,\ x)$ 是 $n\times r$ 矩阵函数，$g_0(\cdot)$ 和 $p_{0k}(\cdot)$ 是数量函数. 由这些函数所构成的 $f_i(\cdot)$，$i=0,\ 1,\ \cdots,n$ 和 $\{p_k(\cdot)\}$，仍假定具有 §1 的诸性质；此外，当 $\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚或内罚型函数列时，我们只考虑 $q_{0k}(\cdot)=0$ 的情形，即认为 $p_k(t,\ x,\ u)=p_{0k}(t,\ x)$.

之所以研究系统(3.1)—(3.3)，是为了保证问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 和问题 $\mathscr{A}$ 的解的存在性及收敛性.

定理 3.1 设 $\varDelta[B]$ 非空，则问题 $\mathscr{A}$ 有解 $(u_*,\ x_*)$.

证 一方面，从引理 2.1. 知 J_* 是有限数，故从其定义及 $\varDelta[B]$ 非空可见，存在 $\{u_i\}$，$u_i\in\varDelta[B]$，使 $\lim\limits_{i\to+\infty} J[u_i]=J_*$. 另方面，注意到问题 $\mathscr{A}$ 是受限最优控制问题，故由[7]或[1]的定理 2.1. 知，在 $\{u_i\}$ 中存在 $L_2[I]$ 空间的弱收敛子序列，仍记为 $\{u_i\}$，$a_i\leqslant t\leqslant b_i$，其极限记为 u_*，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$，使当 $i\to+\infty$ 时，$a_i\to a_*$，$b_i\to b_*$ 和 $J[u_i]\to J[u_*]$，$u_*\in\varDelta[B]$，此处对 u_i 和 u_* 在 I 上原先未定义之点扩充定义为 0. 合并上面的两个方面，就得问题 $\mathscr{A}$ 的解就是 $(u_*,\ x_*)$.

定理 3.2 设 $\varDelta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是外(内)罚函数列，则存在 $N>0$，当 $k>N$ 时问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 有非受限解 $(u_*^k,\ x_*^k)$，且 $x_*^k(t)\in B_k(\mathring{B})$，$a^k\leqslant t\leqslant b^k$.

证 (一) 从引理 2.1. 知 $J_{k0}(J_{k*})$ 是有限数，故对每个 k，存在 $\{(u_i^k,\ x_i^k)\}$

$$u_i^k\in\varDelta[O]\ (\varDelta[B]),$$

使

$$\lim_{i\to+\infty} J_k[u_i^k]=J_{k0}(J_{k*}). \tag{3.4}$$

于是由[1, 7]知，存在容许对 $(u_*^k,\ x_*^k)$，$a^k\leqslant t\leqslant b^k$. 和存在 $\{(u_i^k,\ x_i^k)\}$ 的子序列，仍记为 $\{(u_i^k,\ x_i^k)\}$，$a_i^k\leqslant t\leqslant b_i^k$，使

$$\lim_{i\to+\infty} a_i^k=a^k,\quad \lim_{i\to+\infty} b_i^k=b^k,\quad \lim_{i\to+\infty} u_i^k=u_*^k\ \text{弱敛于}\ L_2[I]$$

$$\lim_{i\to+\infty}\max_{t\in I_0}\|x_i^k(t)-x_*^k(t)\|=0, \tag{3.5}$$

此处 I_0 是 $[a^k,\ b^k]$ 上的任一紧致子集，在 u_i^k 和 u_*^k 原未定义之处定义为 0.

当 $\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚函数列时，因 $u_i^k\in\varDelta[B]$ 及问题 $\mathscr{A}_k$ 是受限的，故据[1] **定理** 2.1. 有

$$\lim_{i\to+\infty} J[u_i^k]=J[u_*^k]. \tag{3.6}$$

(二) 若 $\{p_k(\cdot)\}$ 是外罚函数列时，可指出，存在 $N>0$，当 $k\geqslant N$ 时 $u_*^k\in\varDelta[B_k]$.

从定理 2.1 可见，对数 $\rho>0$，存在 $N>0$，当 $k\geqslant N$ 时 $J_{k0}\leqslant\mathring{J}_*+\rho$；由此式及式(3.4)

可见存在 $N_1(k)>0$, 当 $i\geqslant N_1$ 时

$$J_k[u_i^k]<\mathring{J}_*+\rho. \tag{3.7}$$

现往证 $k\geqslant N$, $i\geqslant N_1$ 时 $x_i^k(t)\in\mathring{B}_k$, $a_i^k\leqslant t\leqslant b_i^k$. 事实上设不然, 有某一时刻 c_i^k 使 $x_i^k(t)\in\mathring{B}_k$, $a_i^k\leqslant t<c_i^k$, 而 $x_i^k(c_i^k)\in\partial B_k$, 则根据定义 3 得

$$J_k[u_i^k]=J[u_i^k]+\int_{a_i^k}^{b_i^k}p_k(t,\ x_i^k,\ u_i^k)\,dt$$

$$\geqslant J_0+\int_{a_i^k}^{c_i^k}p_k(t,\ x_i^k,\ u_i^k)\,dt\geqslant J_0+(\mathring{J}_*-J_0+\rho)=\mathring{J}_*-\rho,$$

这式与式(3.7)相矛盾, 从而得证 $x_i^k(t)\in\mathring{B}_k$, $a_i^k\leqslant t\leqslant b_i^k$. 再注意到式(3.5)和 B_k 是闭集, 即得 $x_*^k(t)\in B_k$, $a^k\leqslant t\leqslant b^k$; 从 $B_k\subset O$ 可见 $u_*^k\in\varDelta[O]$, 因此从[1]的定理 2.1. 即得

$$\lim_{i\to+\infty}J_k[u_i^k]=J_k[u_*^k].$$

从此式及式(3.4)即得证 $(u_*^k,\ x_*^k)$ 是问题 $\mathscr{A}_{k0}$ 的解, 且从 $u_*^k\in\varDelta[O]$ 可见还是非受限解.

(三) 若 $\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚函数列, 现往证 $x_*^k(t)\in\mathring{B}$ 且 $(u_*^k,\ x_*^k)$ 是问题 $\mathscr{A}_k$ 的解.

从式(3.4)和(3.6)可见

$$\lim_{i\to+\infty}\int_{a_i^k}^{b_i^k}p_k(t,\ x_i^k(t),\ u_i^k(t))\,dt=J_{k*}-J[u_*^k];$$

又因 $u_i^k\in\varDelta[B]$ 及式(3.5)可见 $u_*^k\in\varDelta[B]$, 故

$$\lim_{i\to+\infty}\int_{a_i^k}^{b_i^k}p_k(t,\ x_i^k(t),\ u_i^k(t))\,dt\leqslant J_{k*}-J_*. \tag{3.8}$$

设存在某时刻 $c^k\in[a^k,\ b^k]$, 使 $x_*^k(t)\in\mathring{B}$, $a^k\leqslant t<c^k$ 但 $x_*^k(c^k)\in\partial B$, 兹证会出现矛盾.

任定一个小数 $\delta>0$, 因在 $[a^k+\delta,\ c^k]$ 上 $\{x_i^k(t)\}$ 一致收敛于 $x_*^k(t)$, 故

$$p_k(t,\ x_i^k(t),\ u_i^k(t))\equiv p_{0k}(t,\ x_i^k(t))$$

也收敛于 $p_{0k}(t,\ x_*^k(t))$; 再注意到 $p_{0k}(t,\ x)$ 的非负性, 由 Fatou 定理和式(3.8)即知

$$\int_{a^k+\delta}^{c^k}p_k(t,\ x_*^k(t),\ u_*^k(t))\,dt=\int_{a^k+\delta}^{c^k}p_{0k}(t,\ x_*^k(t))\,dt$$

$$=\int_{a^k+\delta}^{c^k}\lim_{i\to+\infty}p_{0k}(t,\ x_i^k(t))\,dt\leqslant\varliminf_{i\to+\infty}\int_{a^k+\delta}^{c^k}p_{0k}(t,\ x_i^k(t))\,dt$$

$$\leqslant\lim_{i\to+\infty}\int_{a_i^k}^{c^k}p_{0k}(t,\ x_i^k(t))\,dt\leqslant J_{k*}-J_*,$$

注意到 δ 的任意性, 由上不等式及定理 2.1., 就得: 对常数 $\rho>0$, 存在 $N>0$, 当 $k\geqslant N$ 时

$$\int_{a^k}^{c^k}p_k(t,\ x_*^k(t),\ u_*^k(t))\,dt\leqslant J_{k*}-J_*\leqslant\mathring{J}_*-J_*+\rho, \tag{3.9}$$

另一方面, 因 $u_*^k\in\varDelta[B]$, 从定义 3 得

$$\int_{a^k}^{c^k}p_k(t,\ x_*^k(t),\ u_*^k(t))\,dt\geqslant\mathring{J}_*-J_*+\rho,$$

此式与式(3.9)相矛盾, 所得矛盾证明了 $x_*^k(t)\in\mathring{B}$, $a^k\leqslant t\leqslant b^k$, 即 $x_*^k(t)$ 是非受限的; 因此从[1]的定理 2.1 即得 $\lim\limits_{i\to+\infty}J_k[u_i^k]=J_k[u_*^k]$. 由此式及式(3.4)就得 $(u_*^k,\ x_*^k)$ 是问题 $\mathscr{A}_k$ 的非受限解.

推论 3.1 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$[\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚型外罚函数列，则由它构成的问题 $\mathscr{A}_{k0}$ 和 $\mathscr{A}_k$ 都有非受限解.

§4. 问题 $\mathscr{A}_{k0}$($\mathscr{A}_k$) 的解的收敛性

定理 4.1 设定理 3.2 中的假设成立，则问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 的解序列 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$, $a_k\leqslant t\leqslant b_k$, 中有收敛于 (u_*, x_*), $a_*\leqslant t\leqslant b_*$, 的子序列，使

1°
$$\left.\begin{aligned} a_k\to a_*,\ b_k\to b_*,\ \lim_{k\to+\infty} u_*^k=u_*(weakly),\ t\in I,\\ \lim_{k\to+\infty}\max_{t\in I_0}\|x_*^k(t)-x_*(t)\|=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

此处 I_0 是 $I_*=[a_*, b_*]$ 上的任一紧致子集，u_*^k 和 u_* 原先未定义的地方定义为 0.

2°
$$u_*\in\Delta[B],\ i.e.\ x_*(t)\in B,\ a_*\leqslant t\leqslant b_*. \tag{4.2}$$

3°
$$\lim_{k\to+\infty} J[u_*^k]=J[u_*]. \tag{4.3}$$

证 (一) 注意到 $u_*^k\in\Delta[O]$ ($\Delta[B]$), 从[1]的定理 2.1. 就得知 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$ 中存在弱收敛子序列，仍记为 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$, 使 1° 成立.

(二) 对问题 $\mathscr{A}_k$ 来说，可证 2° 和 3° 成立. 事实上，由于 $u_*^k\in\Delta[B]$, 即 $x_*^k(t)\in B$, $a_*\leqslant t\leqslant b_*$, 而 B 是闭集，故 $u_*\in\Delta[B]$; 又问题 $\mathscr{A}_k$ 是受限问题，故从[1]的定理 2.1. 即得式(4.3)成立. 这样，得证 2° 和 3° 均成立.

(三) 现考虑 (u_*^k, x_*^k) 是问题 $\mathscr{A}_{k0}$ 之解的情形. 首先，往证 $u_*\in\Delta[B]$. 设不然，则存在时刻 $\bar{t}\in I_*$ 使 $x_*(\bar{t})\bar{\in}B$. 由于 B 是闭集，故存在点 $x_*(\bar{t})$ 的一个闭邻域 $H(x_*(\bar{t}), \varepsilon)$ 使 $B\cap H(x_*(\bar{t}), \varepsilon)=\phi$, 此处 ε 是大于 0 的足够小的正数；再从 $x_*(t)$ 的连续性可见，存在 $\bar{t}$ 的一个 δ 邻域，使 $t\in[\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta]$ 时有 $x_*(t)\in H(x_*(\bar{t}), \varepsilon)$, 又从式(4.1)可见，存在 $N_1>0$, 当 $k>N_1$ 时
$$x_*^k(t)\in H(x_*(\bar{t}), \varepsilon),\ t\in[\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta]. \tag{4.4}$$

另一方面，按定义 3, 存在 $N_2>0$, 使 $k>N_2$ 时 B_k 足够地靠近域 B 而使
$$B_k\cap H(x_*(\bar{t}), \varepsilon)=\phi;$$
而从上面的定理 3.2. 得知，$x_*^k(t)\in\mathring{B}_k$, $a_k\leqslant t\leqslant b_k$, 因此，当 $k>N_2$ 时
$$x_*^k(t)\bar{\in}H(x_*(\bar{t}), \varepsilon),\ t\in[\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta]. \tag{4.5}$$
这样，取 $N=\max(N_1, N_2)$, 则当 $k>N$ 时，$x_*^k(t)$ 既满足式(4.4)又满足式(4.5), 这是矛盾的，所得矛盾证明了必有 $x_*(t)\in B$, $a_*\leqslant t\leqslant b_*$, 即结论 2° 成立.

由上面可见当然也有 $x^*(t)\in O$, $a_*\leqslant t\leqslant b_*$, 于是由[1]的定理 2.1. 可见式(4.3)成立.

这样，对问题 $\mathscr{A}_{k0}$ 来说，2° 和 3° 也成立.

定理 4.2 设上面定理中的假设成立，则
$$J_0\leqslant J_*\leqslant J[u_*]\leqslant\varliminf_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]\leqslant\mathring{J}_*. \tag{4.6}$$

证 从 J_* 的定义和上一定理的 2° 得 $J_0\leqslant J_*\leqslant J[u_*]$; 又从 $p_k(\cdot)$ 的非负性即得 $J[u_*^k]\leqslant J_k[u_*^k]$, 两边取极限，注意到定理 4.1 的 3° 就得

$$J[u_*]\leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]\leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_k[u_*^k],$$

而从定理 3.2. 知 $J_k[u_*^k]=J_{k0}(J_{k*})$，这样，再注意到定理 2.1. 即可得证式(4.6)成立.

定理 4.3 设 $\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚函数列或内罚型外罚函数列，则问题 $\mathscr{A}_k$ 的解 (u_*^k, x_*^k) 有

$$\lim_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]=J[u_*]=\mathring{J}_*. \tag{4.7}$$

证 从定理 3.2. 及推论 3.1. 知问题 $\mathscr{A}_k$ 的解 (u_*^k, x_*^k) 在其定义区间 $a_k\leqslant t\leqslant b_k$ 上有 $x_*^k(t)\in\mathring{B}$，于是从 $\mathring{J}_*$ 的定义及 $p_k(\cdot)$ 的非负性，即得

$$\mathring{J}_*\leqslant J[u_*^k]\leqslant J_k[u_*^k]. \tag{4.8}$$

另一方面，注意到上一定理，可见 $\varlimsup_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]\leqslant\mathring{J}_*$，由此式及(4.8)就得证本定理.

§5. 极限情形下问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 与问题 $\mathscr{A}$ 的等价性

定义 6 设 $(\hat{u}, \hat{x})$，$\hat{a}\leqslant t\leqslant\hat{b}$，是容许对，若相应地存在容许对序列 $\{(\hat{u}_j, \hat{x}_j)\}$ 它具性质：$\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$，$\hat{a}_j\leqslant t\leqslant\hat{b}_j$，且

$$\left.\begin{aligned}&\hat{a}_j\to\hat{a},\ \hat{b}_j\to\hat{b},\ \lim_{j\to+\infty}\hat{u}_j=\hat{u}(weakly),\ t\in I,\\&\lim_{j\to+\infty}\max_{t\in I_0}\|\hat{x}_j(t)-\hat{x}(t)\|=0,\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

此处 I_0 是 $[\hat{a}, \hat{b}]$ 上任一紧致子集，$\hat{u}_j$ 和 $\hat{u}$ 在 I 上原先未定义的地方定义为 0. 则称能从 $\Delta[\mathring{B}]$ 内(或从 $\mathring{B}$ 内)趋近于容许对 $(\hat{u}, \hat{x})$.

若 $(\hat{u}, \hat{x})$ 还是问题 $\mathscr{A}$ 的一个解，则称能从 $\Delta[\mathring{B}]$ 内(或从 $\mathring{B}$ 内)趋近于问题 $\mathscr{A}$ 的解 $(\hat{u}, \hat{x})$.

引理 5.1 若容许对序列 $\{(\hat{u}_j, \hat{x}_j)\}$ 从 $\Delta[\mathring{B}]$ 内趋于容许对 $(\hat{u}, \hat{x})$，则

$$\lim_{j\to+\infty} J[\hat{u}_j]=J[\hat{u}]. \tag{5.2}$$

证 写

$$\begin{aligned}J[\hat{u}_j]-J[\hat{u}]=&\int_{\hat{a}_j}^{\hat{b}_j}[f_0(t, \hat{x}_j, \hat{u}_j)-f_0(t, \hat{x}, \hat{u}_j)]dt\\&+\int_{\hat{a}_j}^{\hat{b}_j} f_0(t, \hat{x}, \hat{u}_j)dt-\int_{\hat{a}}^{\hat{b}} f_0(t, \hat{x}, \hat{u}_j)dt\\&+\int_{\hat{a}}^{\hat{b}}[f_0(t, \hat{x}, \hat{u}_j)-f_0(t, \hat{x}, \hat{u})]dt.\end{aligned} \tag{5.3}$$

注意到 $f_0(\cdot)=g_0(t, x)+\langle h_0(t, x), u\rangle$ 是 u 的线性函数，$g_0(\cdot)$ 和 $h_0(\cdot)$ 在 $I\times O$ 上连续，特别地，在闭域 $I\times B$ 上连续，从而有界. 再注意到 $\hat{u}_j$ 在有界闭域 U 内取值及 $\{\hat{x}_j\}$ 一致收敛于 $\hat{x}$，就得知式(5.3)右端第一项趋于 0；注意到 $\hat{u}_j$ 弱收敛于 $\hat{u}$，就得右端第四项趋于 0；再从 $f_0(\cdot)$ 的有界性及 $\hat{b}_j\to\hat{b}$，$\hat{a}_j\to\hat{a}$，就得右端第二、三项也趋于 0. 这样，引理得证.

定义 7 设 (u_*^k, x_*^k)，$a_k\leqslant t\leqslant b_k$，和 (u_*, x_*)，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$，分别是问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 和问题 $\mathscr{A}$ 的解，$\{(u_*^k, x_*^k)\}$ 有子序列，仍记为 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$，使

$$\left.\begin{array}{l} a_k\to a_*,\ b_k\to b_*,\ \lim\limits_{k\to+\infty} u_*^k=u_*(weakly),\ t\in I, \\ \lim\limits_{k\to+\infty}\max\limits_{t\in I_0}\|x_*^k(t)-x_*(t)\|=0, \end{array}\right\} \tag{5.4}$$

此处 I_0 是 $[a_*,\ b_*]$ 上的任一紧致子集，u_*^k 和 u_* 原先未定义的地方定义为 0，并且使

$$\lim_{k\to+\infty} J[u_*^k]=J[u_*], \tag{5.5}$$

$$\lim_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]=J[u_*]=J_*, \tag{5.6}$$

则称当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 等价于问题 $\mathscr{A}$，或称问题 $\{\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)\}$ 当 $k\to+\infty$ 时趋于问题 $\mathscr{A}$.

定理 5.1 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，则问题 $\mathscr{A}$ 有能从 $\mathring{B}$ 内趋于它的解的充要条件是 $\mathring{J}_*=J_*$.

证　充分性　因 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，故从 $\mathring{J}_*$ 的定义知，存在 $\{\hat{u}_j\}$，$\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$，使

$$\lim_{j\to+\infty} J[\hat{u}_j]=\mathring{J}_*, \tag{5.7}$$

又从[1]知，在 $\{(\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$ 中存在子序列，仍记为 $\{(\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$ 及存在 $(\hat{u},\ \hat{x})$ 使式(5.1)成立. 再注意到 $\hat{x}_j(t)\in\mathring{B}$，$\hat{a}_j\leqslant t\leqslant\hat{b}_j$，及式(5.1)就知 $\hat{x}(t)\in B$，$\hat{a}\leqslant t\leqslant\hat{b}$，即 $\hat{u}\in\Delta[B]$. 这样，容许对 $(\hat{u},\ \hat{x})$ 是可从 $\mathring{B}$ 内由容许对序列 $\{(\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$ 所趋近的.

下面往证 $(\hat{u},\ \hat{x})$ 是问题 $\mathscr{A}$ 的解. 事实上，一方面因 $\hat{x}(t)\in B$ 和 $\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]\subset\Delta[B]$ 而从[1]的定理 2.1. 得 $\lim\limits_{k\to+\infty} J[\hat{u}_j]=J[\hat{u}]$；另一方面因已知 $\mathring{J}_*=J_*$ 及式(5.7)，故得 $J[\hat{u}]=J_*$，即 $(\hat{u},\ \hat{x})$ 是问题 $\mathscr{A}$ 的解. 充分性得证.

必要性　设已知问题 $\mathscr{A}$ 的解 $(\hat{u},\ \hat{x})$ 可由容许对序列 $\{(\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$ 从 $\mathring{B}$ 内趋近，这里 $\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$，于是 $J[\hat{u}]=J_*$ 且由引理 5.1 知，式(5.2)成立. 另一方面，因 $\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$，故

$$J_*\leqslant\mathring{J}_*\leqslant J[\hat{u}_j],$$

对此式各端取极限，并注意到式(5.2)成立及 $J[\hat{u})=J_*$，就得 $\mathring{J}_*=J_*$. 必要性得证.

定理 5.2 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是外(内)罚函数列，则当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 有非受限解且等价于问题 $\mathscr{A}$ 的充分条件是：或 1°. $\mathring{J}_*=J_*$；或 2°. $\mathring{J}_*=J_0$；或 3°. 问题 $\mathscr{A}$ 有能从 $\mathring{B}$ 内趋近的解.

证　(一) 据定理 3.2 知，问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 有非受限解，记为 $(u_*^k,\ x_*^k)$. 从定理 4.1. 知，存在容许对 $(u_*,\ x_*)$ 使式(4.1)和(4.3)也就是式(5.4)和(5.5)成立. 再从定理 4.2. 即得：或者当 $\mathring{J}_*=J_*$，或者当 $\mathring{J}_*=J_0$，都使式(5.6)成立. 这样一来，式(5.4)，(5.5)，(5.6)均成立，故问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 趋于问题 $\mathscr{A}$，从而条件 1° 或条件 2° 是充分的.

(二) 根据定理 5.1. 知条件 3° 成立时必有 $\mathring{J}_*=J_*$，再从上述的(一)即得条件 3° 也是充分的.

定理 5.3 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚型外罚函数列(内罚函数列)，则当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_k$ 等价于问题 $\mathscr{A}$ 的充要条件是：或 1° $\mathring{J}_*=J_*$；或 2° 问题 $\mathscr{A}$ 有一个从 $\mathring{B}$ 内趋近的解.

证　(一) 先证条件 1° 是充要的. 从假设据推论 3.1. 及定理 3.2. 知问题 $\mathscr{A}_k$ 的解 $(u_*^k,\ x_*^k)\in\Delta[\mathring{B}]\times\mathring{C}[\mathring{B}]$；又从定理 4.1. 知式(4.1)和(4.3)或即式(5.4)和(5.5)成立.

充分性　由 $\mathring{J}_*=J_*$ 及定理 4.3. 就得

$$\lim_{k\to+\infty} J_k[u_*^k] = J[u_*] = \mathring{J}_* = J_*,$$

从而式(5.6)成立,充分性得证.

必要性 设已知$[u_*^k, x_*^k]$是问题$\mathscr{A}_k$的解. 从上面证明开始时所指出的知, $(u_*^k, x_*^k) \in \Delta[\mathring{B}] \times \hat{C}[\mathring{B}]$, 故从$\mathring{J}_*$的定义及$p_k(\cdot)$的非负性即得

$$\mathring{J}_* \leqslant J[u_*^k] \leqslant J_k[u_*^k],$$

取极限并注意到已知问题$\mathscr{A}_k$当$k\to+\infty$时等价于问题$\mathscr{A}$, 就得$\mathring{J}_* \leqslant J_*$. 但显然应有$J_* \leqslant \mathring{J}_*$, 故$J_* = \mathring{J}_*$. 必要性得证.

(二) 从定理5.1. 及上述的(一),即得证条件$2°$的充要性.

定理5.4 设$\Delta[\mathring{B}]$非空, $\{p_k(\cdot)\}$是弱内罚型外罚函数列(弱内罚函数列), 则当$k\to+\infty$时问题$\mathscr{A}_k$有$(u_*^k, x_*^k) \in \Delta[\mathring{B}] \times \hat{C}[\mathring{B}]$的解且等价于问题$\mathscr{A}$的充要条件是: 或$1°$ $\mathring{J}_* = J_*$或$2°$问题$\mathscr{A}$有从$\mathring{B}$内趋近的解.

证 (一) 先证条件$1°$的充要性.

充分性 由$\{p_k(\cdot)\}$的弱罚性及$\mathring{J}_* = J_*$即知, 对于具性质$x(t) \in \mathring{B}$, $a_1 \leqslant t < c_1$, 但$x(c_1) \in \partial B$的每个函数$x \in \hat{C}[O]$, $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$, 其中$a_1 < c_1 \leqslant b_1$, 和在$[a_1, c_1]$上定义的$u \in \Delta$, 都有

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(t, x(t), u(t))\,dt \geqslant \rho = \mathring{J}_* - J_* + \rho. \tag{5.8}$$

因此,可以认为$\{p_k(\cdot)\}$就是内罚型外罚函数列(内罚函数列). 从而由推论3.1. 及定理3.2. 知,问题$\mathscr{A}_k$的解$(u_*^k, x_*^k) \in \Delta[\mathring{B}] \times \hat{C}[\mathring{B}]$; 且从定理4.1. 知式(4.1)和(4.3)也就是式(5.4)和(5.5)成立. 再类似于定理5.3. 中充分性的证明,就得: 当$k\to+\infty$时问题$\mathscr{A}_k$等价于问题$\mathscr{A}$.

必要性 根据所给条件,类似于定理5.3. 中必要性的证明即得证.

(二) 根据定理5.1. 和上面的(一),即得证条件$2°$也是充要的.

注 定理5.3. 和定理5.4. 是有区别的. 前者$\{p_k(\cdot)\}$的内罚性就足以保证问题$\mathscr{A}_k$的解$(u_*^k, x_*^k) \in \Delta[\mathring{B}] \times \hat{C}[\mathring{B}]$, 而后者单靠$\{p_k(\cdot)\}$的弱内罚性还不足以保证有此性质.

定理5.5 设$\Delta[B]$非空, $\{p_k(\cdot)\}$是强外罚函数列,则当k足够大时,问题$\mathscr{A}_{k0}$必有非受限解(u_*^k, x_*^k), 且当$k\to+\infty$时问题$\mathscr{A}_{k0}$等价于问题$\mathscr{A}$.

证 因为强外罚函数必定也是外罚函数, 故从定理3.2. 知, 问题$\mathscr{A}_{k0}$有非受限解(u_*^k, x_*^k), $u_*^k \in \Delta[O]$, 且使$J_{k0} = J_k[u_*^k]$.

从定理4.1. 的结论$1°$和$3°$知式(4.1)和(4.3)亦即式(5.4)和(5.5)成立.

而从$J_{k0} = J_k[u_*^k]$和定理2.3. 的式(2.6)以及定理4.2. 的式(4.6), 就得关系式

$$J_* \leqslant J[u_*] \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_k[u_*^k] \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_k[u_*^k] \leqslant J_*. \tag{5.9}$$

这样就得

$$\lim_{k\to+\infty} J_k[u_*^k] = J[u_*] = J_*,$$

即式(5.6)也成立. 由定义7即得问题$\mathscr{A}_{k0}$当$k\to+\infty$时趋于问题$\mathscr{A}$. 定理得证.

§6. 例

例1 易检验,通常所见的及[1, 2]所定义的外(内)罚函数列,均为本文的特例.

例 2　设域 B 由满足约束 $g_l(x)\leqslant 0$, $l=1, \cdots, m$, 的点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 所组成，此处 $g_l(\cdot)$ 是 x 的 $C^{(1)}$ 类函数. 记

$$g(x)=\max_l \{g_l(x)\}, \tag{6.1}$$

则域 B 就是由满足约束 $g(x)\leqslant 0$ 的 x 点所组成. 又设 $O=R^n$, 且取

$$p_k(t, x, u)=\begin{cases} \dfrac{Rk}{2d_k}g, & \text{当 } 0\leqslant g\leqslant \dfrac{2}{k} \text{ 时}, \\ -\dfrac{Rk}{2d_k}\left(g-\dfrac{4}{k}\right), & \text{当 } \dfrac{2}{k}\leqslant g\leqslant \dfrac{4}{k} \text{ 时}, \\ 0, & \text{对其余的 } g. \end{cases} \tag{6.2}$$

其中 d_k 是曲面 $g(x)=\dfrac{1}{k}$ 与曲面 $g(x)=\dfrac{3}{k}$ 之间的距离，$R=2K[2\overline{M}(b-a)+\rho]$ (参见式(1.6))，K 是引理 1.1. 中的常数. $p=p_k(\cdot)$ 的图形见图 1(b).

取域 $B_k\triangleq\left\{x\,\middle|\,g(x)\leqslant\dfrac{3}{k}\right\}$, 则显然 $B\subset B_{k+1}\subset B_k$ 且 $B=\bigcap\limits_{k=1} B_k$. 又 ∂B 显然是点集 $\{x\,|\,g(x)=0\}$, 而 $\partial B_k=\left\{x\,\middle|\,g(x)=\dfrac{3}{k}\right\}$.

易见，对任定的闭集 $D\subset O\backslash B$, 有

$$\lim_{k\to+\infty}\min_{(t,x,u)} p_k(t, x, u)=0, \ (t, x, u)\in I\times D\times U.$$

因此 $\{p_k(\cdot)\}$ 不是通常的及不是文[1, 2]所定义的外罚函数列. 易见 $\{p_k(\cdot)\}$ 满足本文定义 3 中的性质(1)、(2)；现指出它满足性质(3).

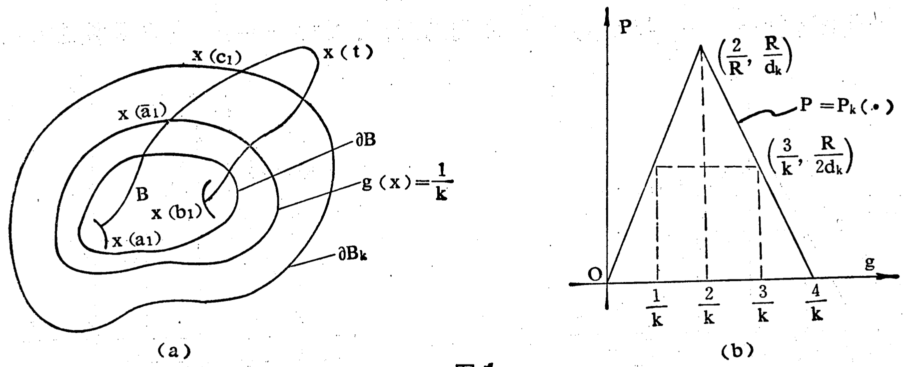

图 1

设 $x(t)$, $u(t)$, $a_1\leqslant t\leqslant b_1$, 是性质(3)中所给的函数，于是从 $p_k(\cdot)$ 的非负性得

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)\,dt\geqslant\int_{\bar{a}_1}^{c_1} p_k(\cdot)\,dt\geqslant\int_{\bar{a}_1}^{c_1}\frac{R}{2d_k}\,dt=\frac{R}{2d_k}[c_1-\bar{a}_1], \tag{6.3}$$

此处 $\bar{a}_1$ 和 c_1 分别是轨线 $x(t)$ 与曲面 $g(x)=\dfrac{1}{k}$ 和 ∂B_k 相交的时刻. 根据引理 1.1. 知 $K[c_1-\bar{a}_1]\geqslant s(c_1)-s(\bar{a}_1)$, 这里 $s(c_1)-s(\bar{a}_1)$ 是点 $x(\bar{a}_1)$ 到点 $x(c_1)$ 的轨线弧长，因两端点分别在曲面 $g(x)=\dfrac{1}{k}$ 上和曲面 $g(x)=\dfrac{3}{k}$ 上，故 $s(c_1)-s(\bar{a}_1)\geqslant d_k$. 这样从式(6.3)有

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)\,dt\geqslant\frac{R}{2K}=2\overline{M}(b-a)+\rho,$$

故式(1.6)从而式(1.5)成立，故 $\{p_k(\cdot)\}$ 是本文的外罚函数列．$x(t)$ 与 B 和 B_k 的关系见图 1(a)．

例 3　域 B 和函数 $g(x)$ 仍按上例所说，取

$$p_k(\cdot)=\begin{cases}\dfrac{Rk}{2d_k}\left(g+\dfrac{2}{k}\right), & \text{当 } -\dfrac{2}{k}\leqslant g\leqslant 0 \text{ 时},\\ -\dfrac{Rk}{2k}\left(g-\dfrac{2}{k}\right), & \text{当 } 0\leqslant g\leqslant \dfrac{2}{k} \text{ 时},\\ 0, & \text{对其余的 } g.\end{cases}$$

其中 d_k 是曲面 $g(x)=-\dfrac{1}{k}$ 与曲面 $g(x)=\dfrac{1}{k}$ 之间的距离，R 与上例相同．$p=p_k(\cdot)$ 的图形见图 2．

取域 $B_k\triangleq\left\{x\left|g(x)\leqslant\dfrac{1}{k}\right.\right\}$．易见$\{p_k(\cdot)\}$不是通常的外罚函数，又因当 $x\in\partial B$ 时 $g(x)=0$，故此时 $p_k(\cdot)=\dfrac{R}{d_k}\neq+\infty$，故也不是[1]中及现在通用的内罚函数．

类似上例的讨论，可见 $\{p_k(\cdot)\}$ 是本文的内罚型外罚函数列．

例 4　域 B 和 $g(x)$ 仍按例 1．取

$$p_k(\cdot)=\begin{cases}\dfrac{Rk}{2d_k}\left(g+\dfrac{4}{k}\right), & \text{当 } -\dfrac{4}{k}\leqslant g\leqslant -\dfrac{2}{k} \text{ 时},\\ -\dfrac{Rk}{2d_k}g, & \text{当 } -\dfrac{2}{k}\leqslant g\leqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{对其余的 } g,\end{cases}$$

此处 d_k 是曲面 $g(x)=-\dfrac{1}{k}$ 与 $g(x)=\dfrac{3}{k}$ 之间的距离．函数 $p=p_k(\cdot)$ 的图形见图 3．

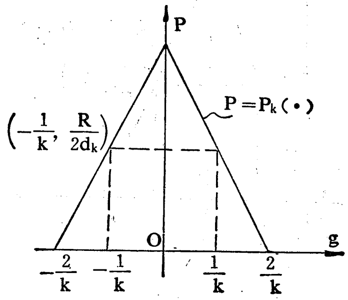

图 2

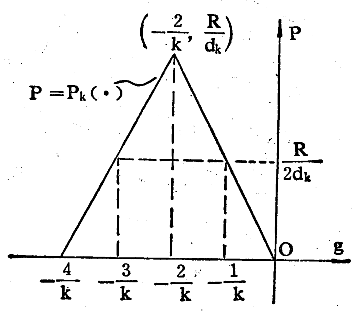

图 3

因 $p_k(\cdot)=0$，当 $x\in\partial B$；故 $p_k(\cdot)$不是通常所见的内罚函数．类似例 1 的讨论，易见 $\{p_k(\cdot)\}$ 满足定义 3 中的性质(1)和(2)；也满足内罚函数的性质(3)

$$\int_{a_1}^{c_1}p_k(\cdot)\,dt\geqslant\frac{R}{2K}>0,\quad x(c_1)\in\partial B.$$

故 $\{p_k(\cdot)\}$ 是本文所扩展的内罚函数列．

参 考 文 献

[1] Russell, D. L., Penalty functions and bounded phase coordinate control, *J. SIAM. Control Ser. A*, **2**: 3 (1965).

[2] Okamura, K., Some mathematical theory of penalty method for solving optimum control problems, *J. SIAM. Control Ser. A*, **2**: 3 (1965).
[3] Cullum, J., Penalty functional and nonconvex continuous optimal control problems in «Computing method in optimization problems -2», Academic Press, New York, 1969.
[4] Polak, E., Computational methods in optimization, Academic Press, New York and London, 1971.
[5] 陈祖浩，解相坐标有界最优控制问题的罚函数方法，山东大学学报，1 (1979).
[6] 陈祖浩，罚函数方法解最优控制问题的数学理论，《全国控制理论及其应用学术交流会论文集》，科学出版社，1981.
[7] Lee, E. B., Markus, L., Optimal control for nonlinear processes, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **8**: 1 (1961).

THE MATHEMATICAL THEORY OF PENALTY FUNCTION METHODS OF OPTIMAL PROCESSES

CHEN ZUHAO
(*Shandong University*)

ABSTRACT

In this paper the main contents are:

Definition. $\{p_k(t, x, u)\}$ is called a sequence of exterior (interior) penalty functions[*], if

(1) $p_k(\cdot)\geqslant 0$ and continuous on $I\times O\times U(I\times \mathring{B}\times U)$, where $I=[a, b]$, open set $O\subset R^n$, U is a compact convex set of R^r, $\mathring{B}$ is the interior of close set $B\subset R^n$.

(2) given any compact set $D\subset \mathring{B}$, for each absolutely continuous function $x(t)\in D$, $u(t)\in U$, $a_1\leqslant t\leqslant b_1$, we have

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{(x,u)}\int_{a_1}^{b_1} p_k(t, x(t), u(t))\,dt=0. \tag{1.4}$$

(3) exist closed sets $\{B_k\}: B_{k+1}\subset B_k\subset 0$, $B=\bigcap_k B_k$, $B_k\neq B\,(B=B_k)$, such that for each absolutely continuous function $x(t)\in \mathring{B}_k(\mathring{B})$, $a_1\leqslant t<c_1$, $x(c_1)\in\partial B_k(\partial B)$, $u(t)$, $a_1\leqslant t\leqslant c_1$, specified as (2), we have

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(t, x(t), u(t))\,dt\geqslant \mathring{J}_*-J_0+\rho(\mathring{J}_*-J_*+\rho), \tag{1.5}$$

where number $\rho>0$, and $\mathring{J}_*$, J_*, J_0 are defined by (1.3).

A sequence of exterior penalty functions $\{p_k(\cdot)\}$ is called the interior penalty type, if for set B & ∂B the right-hand number of (1.5) is replaced by $\mathring{J}_*-J_*+\rho$, and it is called a sequence of strongly exterior penalty functions if for $D=B$ the property (2), i.e. formula (1.4) is satisfied. Generally, the exterior and interior penalty functions respectively contain such properties (see [1], [2]): $\lim\limits_{k\to+\infty}\min\limits_{D} p_k(\cdot)=+\infty$ for every

[*] From now on, generally, the statement about the exterior and interior penalty functions, is suited both the exterior and interior penalty functions, but the words or marks in the bracket are only suited to the interior penalty functions, and the words or marks before the bracket correspondingly suited to the exterior penalty functions.

compact set $D \subset O \backslash \mathring{B}$, $p_k(\cdot) \to +\infty$ as $x(t) \to x(c_1) \in \partial B$ and $\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)\,dt = +\infty$, but in our paper all these properties are replaced by property (3), which simplifies and generalizes the concept of penalty functions, and together shows that the unified character of penalty functions is in the neighborhood of ∂B. Thus we may take $p_k(\cdot)=0$ only just in the enough small neighborhood of ∂B such that $\{p_k(\cdot)\}$ may quicken the rate of $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k) \to \mathscr{A}$.

Problem $\mathscr{A}$ or $\mathscr{A}$: Find a solution (u_*, x_*) of systems (1.1), (1.2) such that $x_*(t) \in B$, $a_* \leqslant t \leqslant b_*$, $J[u_*]=J_*$. Problem $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ or $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$: Find a solution (u_*^k, x_*^k) of systems (1.1), (1.10) such that $x_*^k(t) \in O(\mathring{B})$, $J_k[u_*^k]=J_{k0}(J_{k*})$ (see formulas (1.11)) and $x_*^k(t)$ is called unconstrained. $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k) \to \mathscr{A}$ as $k \to +\infty$: exist a solution (u_*^k, x_*^k) of $\mathscr{A}_{k0}$ $(\mathscr{A}_k)$ such that the formulas (5.4)—(5.6) are satisfied. Problem $\mathscr{A}$ is said to have a solution $(\hat{u}, \hat{x})$ approximated from $\mathring{B}$ if there is a solution set $\{(\hat{u}_j, \hat{x}_j)\}$ of system (1.1), (1.2) such that the fornula (5.1) is satisfied. The main theorems are:

Theorem 5.1. In order that $\mathscr{A}$ has a solution approximated from $\mathring{B}$, the necessary and sufficient condition is: $\mathring{J}_* = J_*$.

Theorem 5.2. Let $\{p_k(\cdot)\}$ be a sequence of exterior (interior) penalty functions. In order that $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ has an unconstrained solution appnoximating $\mathscr{A}$, the sufficient conditions are: 1° $\mathring{J}_*=J_*$ or 2° $\mathring{J}_*=J_0$, or 3° $\mathscr{A}$ has a solution approximated from $\mathring{B}$.

Theorem 5.3. Let $\{p_k(\cdot)\}$ be a sequence of exterior penalty functions of interior penalty type (interior penalty functions). In order that $\mathscr{A}_k \to \mathscr{A}$ as $k \to +\infty$, the necessary and sufficient condition is: 1° $\mathring{J}_*=J_*$, or 2° $\mathscr{A}$ has a solution approximated from $\mathring{B}$.

Theorem 5.5. If $\{p_k(\cdot)\}$ is a sequence of strongly exterior penalty functions, then $\mathscr{A}_{k0}$ approximates to $\mathscr{A}$.

Paper [1] only obtained the third sufficient condition of Theorem 5.2. and it is not easy to check it up, while Thoorem 5.1. in this paper gives a quantitative rule. In order to prove $\mathscr{A}_{k0} \to \mathscr{A}$, paper [2] added an assumption for $\{u_*^k\}$ to be absolutely convergent, but this assumption is very difficult to realize, while here Theorem 5.5. only needs $\{p_k(\cdot)\}$ to be a seqence of strongly exterior penalty functions, and it is very useful in practice. We sort out the penalty functions into six types, in order that $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k) \to \mathscr{A}$ we give some sufficient and necessary conditions (see Theorem 5.3 and 5.4), which are carried out here for the first time. Thus, our paper clearly explains under what case the exterior or interior penalty functions may be chosen.

We take the unified method to define the concepts and to prove the theorems for the exterior and interior penalty functions, and show the important relations between $\mathring{J}_*$, J_*, J_0, J_{k0}, J_{k*} (see Theorem 2.1. or formula (4.6)), and what is more we obtain the computational formulas of $\mathring{J}_*$, J_* from Theorem 4.3. Theorem 5.5.