数 学 年 刊
3 (3) 1982

棱长为奇数之单形的一个注记

杨 路 张景中
(中国科学技术大学)

与本文所述同一类型的问题,首先是由美国知名的离散数学家 Graham 加以考虑的.为了方便,我们将 n 维欧氏空间中 $n+1$ 个点构成的图形叫做单形,它可以是退化的.1974 年,在 Graham, R. L. 等[1] 三人联合署名的一篇文章中,解决了如下的问题:

在 E^n 中是否存在这样一个单形,使得

i) 此单形的各棱长都是奇数;

ii) 此单形的各顶点到某一个点的距离都是奇数?(叙述上似与[1]略异,其实是等价的.)

Graham 等人证明了,只有当 $n\equiv-2 \pmod{16}$ 时这样的单形确实存在,否则无解.

我们这篇短文将要解决的问题是:

在 E^n 中是否存在这样一个单形,使得

(i) 此单形的各棱长都是奇数;

(ii) 此单形的各顶点到某一超平面的距离都是整数?

我们将要证明,只有当 $n\equiv\pm1 \pmod 8$ 时这样的单形确实存在,否则这种单形不存在.

Graham 等人的工作,依赖于 Cayley, A[2]. 的一个著名的定理.但是 Cayley 定理对于现在这个问题是不够用的.我们的证明主要依赖于如下的结果:

引理 设 E^n 中某 $n+1$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ 两两间的距离 $A_iA_j=d_{ij}$, 各顶点 A_i 到某一个超平面 Π 的带号距离为 h_i, $(i, j=1, 2, \cdots, n+1)$, 则必然有

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{d_{12}^2}{2} & -\frac{d_{13}^2}{2} & \cdots & -\frac{d_{1,n+1}^2}{2} & h_1 \\ 1 & -\frac{d_{21}^2}{2} & 0 & -\frac{d_{23}^2}{2} & \cdots & -\frac{d_{2,n+1}^2}{2} & h_2 \\ 1 & -\frac{d_{31}^2}{2} & -\frac{d_{32}^2}{2} & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\frac{d_{n+1,1}^2}{2} & -\frac{d_{n+1,2}^2}{2} & \cdots & & 0 & h_{n+1} \\ 0 & h_1 & h_2 & \cdots & & h_{n+1} & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

这个引理是[3]中的引理 2.1 的一个特殊情形.此地只须引用而不再重复其证明.

经过极简单初等变换,(1)式可变形为

本文1980年6月7日收到.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & \cdots & d_{1,n+1}^2 & h_1 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & \cdots & d_{2,n+1}^2 & h_2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & d_{n+1,1}^2 & d_{n+1\,2}^2 & \cdots & & 0 & h_{n+1} \\ 0 & h_1 & h_2 & \cdots & & h_{n+1} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

我们令 D 表示下述所谓 Cayley-Menger 行列式[2]

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & \cdots & d_{1,n+1}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & \cdots & d_{2,n+1}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{n+1,1}^2 & d_{n+1,2}^2 & \cdots & & 0 \end{vmatrix},$$

这是一个 $n+2$ 阶行列式，我们可以约定它的行和列的编号都是从 0 到 $n+1$. 然后用 D_{ij} 表示 D 的各个代数余子式($i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$). 在这些约定下可将(2)式展开而得到

$$\frac{1}{2}D+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}D_{ij}h_ih_j=0 \tag{3}$$

考虑到 D 是对称行列式，故(3)还可改写为

$$\frac{1}{2}D+\sum_{i=1}^{n+1}D_{ii}h_i^2+2\sum\sum_{1\le i<j\le n+1}D_{ij}h_ih_j=0. \tag{4}$$

下面进入主题.

定理 当且仅当 $n\equiv\pm1\pmod 8$ 时，在 E^n 中存在着一个单形使得

(i) 此单形的各棱长都是奇数;

(ii) 此单形的各顶点到某一超平面的距离都是整数.

证 假定满足条件(i), (ii)的单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 和超平面 Π 确已存在. 完全沿用引理中的记号，从(3)式可知 D 必为偶数.

另一方面，我们引进记号 $\Delta(m)$ 表示这样一个 m 阶行列式：它的主对角线上的元素皆为 0 而其余元素皆为 1. 容易算出

$$\Delta(m)=(-1)^{m-1}(m-1). \tag{5}$$

又令 $\Delta_{ij}(m)$ 表示 $\Delta(m)$ 的各个代数余子式($i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$), 也不难算出

$$\Delta_{ij}(m)=\begin{cases}(-1)^{m-2}(m-2) & (i=j),\\ (-1)^{m-1} & (i\ne j).\end{cases} \tag{6}$$

因 $d_{ij}(i\ne j)$ 都是奇数，故有 $d_{ij}^2\equiv1\pmod 8$. 于是行列式 D 的每个元素与 $\Delta(n+2)$ 的对应元素都是关于 mod 8 同余的，从而有

$$D\equiv\Delta(n+2)\quad(\mathrm{mod}\ 8). \tag{7}$$

同理也有

$$D_{ij}\equiv\Delta_{ij}(n+2)\quad(\text{mod }8).\tag{8}$$

参照(5)～(7)可知

$$D\equiv(-1)^{n+1}(n+1)\quad(\text{mod }8).\tag{9}$$

$$D_{ij}\equiv\begin{cases}(-1)^n\cdot n & (i=j)\\(-1)^{n+1} & (i\neq j)\end{cases}\quad(\text{mod }8).\tag{10}$$

前面已说明 D 必是偶数，故由(9)．n 必是奇数，所以我们只须考虑 $n\equiv\pm3$ 和 $n\equiv\pm1$ (mod 8)这四个同余类．

令 l 表示 $h_1, h_2, \cdots, h_{n+1}$ 中奇数的个数．

假定 $n\equiv3$ (mod 8)，这时 $D\equiv4$(mod 8)从而

$$\frac{D}{2}\equiv2\quad(\text{mod }4)\tag{11}$$

那么(4)中的 $\sum D_{ii}h_i^2$ 必须是偶数，注意到 D_{ii} 是奇数(由(10)式)，可知 l 必为偶数．不外乎两种可能：$l=4k$ 或 $l=4k+2$．

显然，所有形如 $h_ih_j(1\leqslant i<j\leqslant n+1)$ 的各数中奇数的个数应为 $C_l^2=\frac{1}{2}l(l-1)$．如果 $l=4k$，则 $C_l^2=2k(4k-1)$，即 h_ih_j 各数(从而 $D_{ij}h_ih_j$ 各项，因这时 D_{ij} 是奇数)中奇数的个数为偶数．于是有

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sum D_{ij}h_ih_j\equiv0\quad(\text{mod }4).\tag{12}$$

另一方面，对于每个奇的 h_i，由 $h_i\equiv1$(mod 8)和 $D_{ii}\equiv-n$ 知 $D_{ii}h_i^2\equiv-n$(mod 8)．考虑到这样的项共有 $l=4k$ 个，(另外注意到当 h_i 为偶数时 $D_{ii}h_i^2$ 是 4 的倍数，)故有

$$\sum_{i=1}^{n+1}D_{ii}h_i^2\equiv0\quad(\text{mod }4).\tag{13}$$

将(11)—(13)三式相加即与(4)式矛盾．

如果 $l=4k+2$，则 $C_l^2=(2k+1)(4k+1)$ 从而 $D_{ij}h_ih_j(1\leqslant i<j\leqslant n+1)$ 各项中奇数的个数为奇数，故有

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sum D_{ij}h_ih_j\equiv2\quad(\text{mod }4).\tag{14}$$

另一方面在形如 $D_{ii}h_i^2$ 的各项中有 $l=4k+2$ 个满足 $D_{ii}h_i^2\equiv-n$ (mod 8) 而另一些是 4 的倍数，故有

$$\sum_{i=1}^{n+1}D_{ii}h_i^2\equiv2\quad(\text{mod }4).\tag{15}$$

将(11)，(14)，(15)相加即与(4)矛盾，故 $n\not\equiv3$(mod 8)

假定 $n\equiv-3$(mod 8)，这时 $D\equiv-2$(mod 8)从而

$$\frac{D}{2}\equiv-1\quad(\text{mod }4).\tag{16}$$

那么(4)中的 $\sum D_{ii}h_i^2$ 必须是奇数．注意到 D_{ii} 都是奇数，故 l 必为奇数．不外乎两种可能：$l=4k+1$ 或 $l=4k-1$．

如果 $l=4k+1$，则 $C_l^2=2k(4k+1)$ 从而 $D_{ij}h_ih_j(1\leqslant i<j\leqslant n+1)$ 各项中奇数的个数为偶数，这时(12)式成立．另一方面形如 $D_{ii}h_i^2$ 的各项中有 $l=4k+1$ 个满足 $D_{ii}h_i^2\equiv-n$ (mod 8)而另一些是 4 的倍数，故有

$$\sum_{i=1}^{n+1} D_{ii}h_i^2 \equiv -1 \pmod 4. \tag{17}$$

将(12), (16), (17)相加即与(4)矛盾.

如果 $l=4k-1$, 则 $C_l^2=(4k-1)(2k-1)$ 从而 $D_{ij}h_ih_j(1\leqslant i<j\leqslant n+1)$ 各项中奇数的个数为奇数, 这时(14)式成立. 另一方面在形如 $D_{ii}h_i^2$ 的各项中有 $l=4k-1$ 个满足 $D_{ii}h_i^2 \equiv -n \pmod 8$ 而另一些是 4 的倍数, 故有

$$\sum_{i=1}^{n+1} D_{ii}h_i^2 \equiv 1 \pmod 4. \tag{18}$$

将(14), (16), (18)相加则与(4)矛盾.

综上所述可知 $n\not\equiv \pm 3 \pmod 8$.

下面将要指出, 当 $n\equiv \pm 1 \pmod 8$ 时, 满足条件(i), (ii)的单形确实存在.

如果 $n=8s-1$, s 是一个正整数, 我们将构造出满足(i), (ii)的 n 维单形: 在 E^n 中任取一超平面 Π, 在 Π 上作一个 $n-1$ 维正则单形 $A_1A_2\cdots A_n$, 令 $A_iA_j=8s-1(i\neq j; i, j=1, 2, \cdots, n)$. 众所周知, 任何一个 m 维正则单形的顶点到其中心的距离 R 与单形的棱长 a 之间有关系(可参看[1])

$$R=\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}\cdot a,$$

这叫正则单形的"顶心距"公式. 据此容易算出单形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各顶点到其中心 O 的距离

$$OA_i=\sqrt{(8s-1)(4s-1)} \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{19}$$

过 O 作直线垂直于超平面 Π, 在此直线上取一点 A_{n+1}, 使得

$$OA_{n+1}=2s. \tag{20}$$

于是显然有

$$A_{n+1}A_i=\sqrt{OA_i^2+OA_{n+1}^2}=6s-1 \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{21}$$

这样得到的单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 的棱长均为奇数 ($8s-1$ 或 $6s-1$), 而其各顶点到超平面 Π 的距离均为整数(0 或 $2s$), 故合乎所求.

如果 $n=16s+1$, 我们在 E^n 中取一超平面 Π 并在 Π 上作 $n-1$ 维正则单形 $A_1A_2\cdots A_n$, 令 $A_iA_j=16s+1(i\neq j; i, j=1, 2, \cdots, n)$. 设单形中心为 O, 由"顶心距"公式可算出

$$OA_i=\sqrt{8s(16s+1)} \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{22}$$

过 O 作直线垂直于 Π, 在此直线上取点 A_{n+1} 使得

$$OA_{n+1}=32s^2+2s-1. \tag{23}$$

于是有

$$A_{n+1}A_i=\sqrt{OA_i^2+OA_{n+1}^2}=32s^2+2s+1 \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{24}$$

这样得到的单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 合乎所求.

最后, 如果 $n=16s+9$, 要作出符合条件的单形不象以上两种情况那么容易, 步骤如下:

先在 E^{n-3} 中作一个中心在原点的正则单形 $B_1B_2\cdots B_{n-2}$, 使 $B_iB_j=48s+21$ $(1\leqslant i<j\leqslant n-2)$. 令

$$B_i=(b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{i,n-3}),$$

则其顶心距

$$OB_i=\sqrt{9(8s+3)(16s+7)}=(b_{i1}^2+b_{i2}^2+\cdots+b_{i,n-3}^2)^{\frac{1}{2}}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2).\tag{25}$$

然后按下列方式给出 E^n 中单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 诸顶点之坐标

$$\begin{aligned}A_i&=(b_{i1},\ b_{i2},\ \cdots,\ b_{i,n-3},\ b,\ b,\ b)\quad(1\leqslant i\leqslant n-2),\\A_{n-1}&=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ a,\ -a,\ 0),\\A_n&=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ a,\ -a),\\A_{n+1}&=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ -a,\ 0,\ a).\end{aligned}\tag{26}$$

此处取

$$b=\frac{1}{\sqrt{3}}(38s+17),\quad a=\sqrt{\frac{3}{2}}(16s+7).$$

容易验证下列事实:

1° 当 $1\leqslant i<j\leqslant n-2$ 时, $A_iA_j=B_iB_j=48s+21$;

2° 当 $n-1\leqslant i<j\leqslant n+1$ 时, $A_iA_j=\sqrt{6}\,a=48s+21$;

3° 当 $1\leqslant i\leqslant n-2,\ n-1\leqslant j\leqslant n+1$ 时

$$\begin{aligned}A_iA_j&=(b_{i1}^2+b_{i2}^2+\cdots+b_{i,n-3}^2+(a+b)^2+(a-b)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\\&=(OB_i^2+2a^2+3b^2)^{\frac{1}{2}}\\&=(9(8s+3)(16s+7)+3(16s+7)^2+(38s+17)^2)^{\frac{1}{2}}\\&=58s+25.\end{aligned}\tag{27}$$

故此单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 诸棱长均为奇数. 取超平面 Π

$$x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=3b,\tag{28}$$

显然 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{n-2}$ 均在 Π 上, 而 $A_{n-1},\ A_n,\ A_{n+1}$ 到 Π 之距离为

$$\frac{1}{\sqrt{3}}3b=\sqrt{3}\,b=38s+17$$

是整数. 于是单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 符合要求.　　证毕.

参 考 文 献

[1] Graham, R. L., et, al., *Amer. Math. Monthly*, **81** (1974), 21—25.
[2] Blumenthal, L. M., Theory and Applications of Distance Geometry, Oxford, 1953. or 2nd ed. New York, (1970).
[3] 杨路、张景中, 关于有限点集的一类几何不等式, 数学学报, **23**:5 (1980), 740—749.

A NOTE ON THE SIMPLEX WITH ODD INTEGRAL EDGE-LENGTHS

YANG LU ZHANG JINGZHONG
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

In this paper the following result is proved:

Theorem. In an n-dimensional Euclidean space, there exists an n-simplex such that

(i) Its all edge-lengths are odd integers;

(ii) The distances from all its vertices to a hyperplane are integers, if and only if $n \equiv \pm 1 \pmod 8$.