数 学 年 刊
3 (3) 1982

关于二阶矩过程平方可积条件的注记

汪 振 鹏
（华东师范大学）

设 $T=[a, b]$, $\xi(t)$ 为 T 上一个二阶矩过程，又

$$E[\xi(s)\overline{\xi(t)}]=\Gamma(s, t),$$

几乎在一切讲述二阶矩过程的著作中(见[1, 2, 3])，均有下述定理

$\int_a^b \xi(t)dt$（均方意义）存在的充要条件是 Riemann 积分

$$(R)\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, y)dxdy$$

存在.

但是，定理的证明中却存在漏洞. 在这些著作中都认为 $\int_a^b \xi(t)dt$（均方意义）存在的充要条件

$$\lim_{\substack{|\Delta_1|\to 0\\ |\Delta_2|\to 0}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \Gamma(u_i, v_j)\Delta x_i \Delta y_j \text{ 存在} \tag{1}$$

和 $(R)\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, y)dxdy$ 存在等价. 但是，$(R)\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, y)dxdy$ 存在的充要条件是

$$\lim_{\substack{|\Delta_1|\to 0\\ |\Delta_2|\to 0}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \Gamma(u_{ij}, v_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \text{ 存在} \tag{2}$$

(1)和(2)中的 $|\Delta_1|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\Delta x_i$, $|\Delta_2|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l}\Delta y_j$. 显然，条件(2)包含了条件(1)，但(1)与(2)是否等价呢？ 汪嘉冈同志首先提出这个问题. 本文给出一个例子说明(1)与(2)并不等价，即给出一个 $\int_a^b \xi(t)dt$（均方意义）存在，但 $(R)\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, y)dxdy$ 不存在的例子，从而证明了上述定理中的必要性是不成立的.

令
$$A=\left\{(x, y): \frac{1}{2}<x<y<1\right\},$$

$$B=\left\{x: x\in\left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 有既约表示 } x=\frac{2^{2^k}+j}{2^{2^k+1}},\quad 1\leqslant j<2^{2^k},\ j,\ k \text{ 为正整数}\right\}$$

又
$$j(2^k)\equiv j(\operatorname{mod} 2^k),\ 1\leqslant j(2^k)<2^k,$$

由既约性知 j, $j(2^k)$ 都是奇数. 对于 $x\in B$, $x=\dfrac{2^{2^k}+j}{2^{2^k+1}}$，定义

$$g(x)=\frac{j(2^k)}{2^k}+\frac{j}{2^{2(k+1)}+k}=\frac{2^{2(k+1)}\cdot j(2^k)+j}{2^{2(k+1)}+k} \tag{3}$$

这时有

引理 1 对 $x_1, x_2\in B$，若 $x_1\neq x_2$，则 $g(x_1)\neq g(x_2)$.

本文 1980 年 6 月 7 日收到.

证 设
$$x_1=\frac{2^{2^{k_1}}+j_1}{2^{2^{k_1}+1}},\quad x_2=\frac{2^{2^{k_2}}+j_2}{2^{2^{k_2}+1}},$$
因为 $x_1\neq x_2$, 则必有
$$\begin{pmatrix}k_1\\ j_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}k_2\\ j_2\end{pmatrix}$$
而
$$g(x_1)=\frac{2^{2^{(k_1+1)}}\cdot j_1(2^{k_1})+j_1}{2^{2^{(k_1+1)}+k_1}},\ g(x_2)=\frac{2^{2^{(k_2+1)}}\cdot j_2(2^{k_2})+j_2}{2^{2^{(k_2+1)}+k_2}},$$
是既约表示，若 $k_1\neq k_2$, 则 $g(x_1)\neq g(x_2)$ 成立. 若 $k_1=k_2=k$, 这时必有 $j_1\neq j_2$, 如果 $j_1(2^k)=j_2(2^k)$, 则 $g(x_1)\neq g(x_2)$为显然,如果 $j_1(2^k)\neq j_2(2^k)$, 则因为$|j_1-j_2|<2^{2^k}$, 也必有 $g(x_1)\neq g(x_2)$成立. 证毕.

现在令
$$B'=\{x:x\in B,\ g(x)\in B,\ x<g(x)\},$$
$$D=\{(x,\ y):x\in B',\ y=g(x),\ (x,\ y)\in A\},$$
则有

引理2 D 在 A 中稠密. 即对任给 $\delta>0$, $(x_0,\ y_0)\in A$, 必存在 $(x,\ y)\in D$, 使 $\rho[(x_0,\ y_0),\ (x,\ y)]<\delta$.

证 令
$$\delta_1=\min\left(\delta,\ \frac{y_0-x_0}{2},\ x_0-\frac{1}{2},\ 1-y_0\right) \tag{4}$$
则 $\delta_1>0$, 令正整数 k 充分大,使有
$$\frac{2^k}{2^{2^k+1}}=\frac{1}{2^{2^k+1-k}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}, \tag{5}$$
并存在奇数 j, 使有
$$\left|\frac{j}{2^k}-y_0\right|<\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}, \tag{6}$$
且 $j=2^p+q$, $1\leqslant q<2^p$, 其中的 p 为奇数.

因为 $\frac{1}{2}<x_0<1$, 这时可以选取整数 h, 且 $1\leqslant h<2^{2^k-k}-1$, 使有
$$\frac{1}{2}+\frac{h}{2^{2^k+1-k}}\leqslant x_0<\frac{1}{2}+\frac{h+1}{2^{2^k+1-k}}, \tag{7}$$
这时由(6)知 $j<2^k$, 再由(5), (7)可知有
$$\left|\frac{1}{2}+\frac{h\cdot 2^k+j}{2^{2^k+1}}-x_0\right|<\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}, \tag{8}$$
又由
$$\frac{h\cdot 2^k+j}{2^{2^{(k+1)}+k}}<\frac{2^{2^k}}{2^{2^{(k+1)}+k}}<\frac{1}{2^{2^k+k}}$$
和(6)式可得
$$\left|\frac{j}{2^k}+\frac{h\cdot 2^k+j}{2^{2^{(k+1)}+k}}-y_0\right|<\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}. \tag{9}$$
取
$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{2^{2^k}+h\cdot 2^k+j}{2^{2^k+1}},\\ y&=\frac{j}{2^k}+\frac{h\cdot 2^k+j}{2^{2^{(k+1)}+k}}=\frac{2^{2^{(k+1)}}\cdot j+h\cdot 2^k+j}{2^{2^{(k+1)}+k}},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

则因为 p 是奇数，故 $g(x)=y\in B$，又由 δ_1 的取法(4)和(8)，(9)可得 $\frac{1}{2}<x<y<1$，故 $(x, y)\in A$，从而 $(x, y)\in D$．由(8)，(9)知

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta_1^2\leqslant\delta^2.$$

证毕．

现在令
$$B''=\{y:y=g(x),\ x\in B'\}\cap\left(\frac{1}{2}, 1\right),$$
则 $B''\cap B'=\phi$，又在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]\times\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上定义函数 $f(x, y)$ 如下：

在 A 上，$f(x, y)=\begin{cases}1, & (x, y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

在 $\frac{1}{2}<x=y<1$ 上，$f(x, y)=\begin{cases}1, & x=y\in B'\cup B'',\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

在 $\frac{1}{2}<y<x<1$ 上，$f(x, y)=f(y, x)$．

在边界 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=1$ 或 $y=\frac{1}{2}$ 或 $y=1$ 上，$f(x, y)=0$．

这时有下述

引理 3　$(R)\int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1}f(x, y)\,dx\,dy$ 不存在．

证　由 D 在 A 中的稠密性知 $f(x, y)$ 在任一小区域上的振幅为 1，故 Riemann 积分不存在．

引理 4
$$\lim_{\substack{|\varDelta_1|\to 0\\ |\varDelta_2|\to 0}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}f(u_i, \nu_j)\varDelta x_i\varDelta y_j=0,$$
其中 $|\varDelta_1|=\max\limits_{1<i<k}\varDelta x_i$，$|\varDelta_2|=\max\limits_{1<j<l}\varDelta y_j$．

证　对 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]\times\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上的任意一组分割，有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}f(u_i, \nu_j)\varDelta x_i\varDelta y_j\right|\\ &\leqslant\left|\sum_{u_i<\nu_j}f(u_i, \nu_j)\varDelta x_i\varDelta y_j\right|+\left|\sum_{u_i>\nu_j}f(u_i, \nu_j)\varDelta x_i\varDelta y_j\right|\\ &\leqslant 2\cdot\frac{1}{2}\max_{1<j<l}\varDelta y_j+\frac{1}{2}\max_{1<i<k}\varDelta x_i=|\varDelta_2|+\frac{1}{2}|\varDelta_1|,\end{aligned}$$

从而引理 4 成立．

现在在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上作一随机过程 $\xi(t)$ 如下：对 $t\in B'$，$\xi(t)$ 为独立同分布随机变量，分布为 $N(0, 1)$，对 $t\in B''$，有唯一的 $s\in B'$，使 $t=g(s)$，定义 $\xi(t)=\xi(s)$，对 $t\overline{\in} B'\cup B''$，令 $\xi(t)\equiv 0$．则易知有

$$\varGamma(s, t)=E[\xi(s)\xi(t)]=f(s, t),$$

由引理 4 知 $\int_{1/2}^{1}\xi(t)dt$（均方意义）存在，由引理 3 知 $(R)\int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1}\varGamma(s, t)\,ds\,dt$ 不存在．

上述讨论表明 $(R)\int_a^b\int_a^b\varGamma(s, t)\,ds\,dt$ 的存在只是 $\int_a^b\xi(t)dt$（均方意义）存在的充分条

件而不是必要条件. 故本文开始所引的定理并不成立. 那么能不能把 $(R)\int_a^b\int_a^b \Gamma(s,\ t)dsdt$ 存在减弱为 $(L)\int_a^b\int_a^b \Gamma(s,\ t)dsdt$ 存在呢? 下面的例子回答了这个问题. 在[0, 1]上定义随机过程如下: 当 t 为有理数时, $\xi(t)=\eta$; 当 t 为无理数时, $\xi(t)=0$,
其中 η 为 $N(0,\ 1)$ 变量, 易知, 当 s 和 t 皆为有理数时, $\Gamma(s,\ t)=1$; 当其它情况时, $\Gamma(s,\ t)=0$.
故 $\Gamma(s,\ t)$ 只是在零测集上异于零, 从而

$$(L)\int_0^1\int_0^1 \Gamma(s,\ t)dsdt=0.$$

但条件(1)显然不成立. 故 $(L)\int_a^b\int_a^b \Gamma(s,\ t)dsdt$ 的存在不足以保证 $\int_a^b \xi(t)dt$ (均方意义)的存在.

参 考 文 献

[1] Loève, M., Probability theory, second ed., (1960).
[2] Lèvy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, (1965).
[3] 王梓坤, 随机过程论, 科学出版社, (1978).

A REMARK ON THE CONDITION OF INTEGRABILITY IN GUADRATIC MEAN FOR THE SECOND ORDER RANDOM PROCESSES

WANG ZHENPENG
(*East China Normal University*)

ABSTRACT

In quite a few publications (eg. [1, 2, 3]) there is the theorem

$$\int_a^b \xi(t)\,dt \text{ (in q. m.) exists if and only if}$$

$$(R)\int_a^b\int_a^b \Gamma(s,\ t)\,ds\,dt \text{ exists,}$$

where $\xi(t)$, $t\in[a,\ b]$ is a second order random process and

$$\Gamma(s,\ t)=E[\xi(s)\overline{\xi(t)}],\ s,\ t\in[a,\ b].$$

However, the necessary condition does not hold, that is to say: the integral in q. m. $\int_a^b \xi(t)dt$ exists but the Riemann integral $(R)\int_a^b\int_a^b \Gamma(s,\ t)$ dsdt can not exist. A counter example is constructed to substantiate this point.