数 学 年 刊
3 (3) 1982

一阶拟线性可对称化偏微分方程组解的存在性

秦 铁 虎
（复旦大学数学研究所）

引 言

Hahn-Goldberg[2] 讨论了一阶拟线性正对称组解的存在性．谷超豪老师在文[4]中研究了情况更为复杂的一阶拟线性正对称组的边值问题．

本文的目的是利用类似的考虑，将 Friedrichs 和 Lax[1] 关于一阶线性可对称化组的一个结果推广到拟线性的情况．Friedrichs 和 Lax[1] 证明，$\mathbf{R}^n$ 中的一阶线性组

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(x)u+\lambda u=f(x).$$

若其主象征 $\sqrt{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\xi_i$ 是可对称化的，即存在对称化子 $r(x,\xi)$，且 $r(x,\xi)$ 的对称部分为正，则当 λ 充分大时，上一阶组存在唯一强解．本文中，我们证明，在一些适当的假设下，这个结论对一阶拟线性组亦是正确的．

在 $\mathbf{R}^n$ 中考虑如下的一阶拟线性组

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda u=f(x,u). \tag{1}$$

其中 u 是 k 个分量的未知函数向量，$f(x,y)$ 是向量函数，$a_i(x,y)$ 是 $k\times k$ 矩阵函数，它们均定义在 $\mathbf{R}^n\times V$ 中，其中 V 是 $\mathbf{R}^k$ 中原点的某邻域．λ 是实数．假设方程组(1)的主象征是可对称化的，则在一些关于方程组系数和右端项光滑性假设下，我们给出了方程组(1)的解的一个存在唯一性定理．

§1. 关于拟微分算子的一些定义与引理

定义 1 对任实数 m，以 S^m 表满足以下要求的 $C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$ 函数（或矩阵函数）$a(x;\xi)$ 的集合：对任意重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，存在常数 $C_{\alpha,\beta}$ 使

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x;\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|},\ (x,\xi)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n. \tag{1.1}$$

其中 $\partial_x^\alpha=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$，$\partial_\xi^\beta=\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^{\beta_n}$．$|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n$．

对 $a(x;\xi)$，定义其半范 $|a|_{l_1,l_2}$ 如下

$$|a|_{l_1,l_2}=\max_{\substack{|\alpha|\leqslant l_1\\|\beta|\leqslant l_2}}\sup_{(x,\xi)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}(|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m+|\beta|}). \tag{1.2}$$

本文1980年6月10日收到，1980年12月13日修改．

定义 2 设 $a(x;\xi)\in S^m$, 对 $u\in S$[1], 定义算子 $a(x;D)$ 如下

$$a(x;\ D)u=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}a(x;\ \xi)\hat{u}(\xi)d\xi, \tag{1.3}$$

其中 $\hat{u}(\xi)$ 表 $u(x)$ 的 Fourier 变换. 称 $a(x;\ D)$ 是以 $a(x;\ \xi)$ 为象征的拟微分算子.

不难验证, $a(x;\ D)$ 是 $S\to S$ 的连续映照. 且若我们定义 $a(x;\ D)$ 的形式共轭为满足如下条件的算子 $a^*(x;\ D)$

$$(a(x;\ D)u,\ v)=(u,\ a^*(x;\ D)v),\ \forall u,\ v\in S,$$

其中 $(,)$ 表通常的 L_2 内积, 则

$$a^*(x;\ D)u=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\int e^{-ix_1\cdot\xi}\bar{a}(x_1;\ \xi)u(x_1)dx_1d\xi.$$

其中 $\bar{a}(x;\ \xi)$ 表 $a(x;\ \xi)$ 的共轭转置.

定义 3 设 $a(x,\ y;\ \xi)$ 关于 $(x,\ y,\ \xi)\in\mathbf{R}^n\times V\times\mathbf{R}^n$ 是无穷次可微函数, 若还满足以下要求 (1.4), 我们说 $a(x,\ y;\ \xi)\in S^m_y$: 对任意重指标 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, 存在常数 $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ 使

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x,\ y;\ \xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}. \tag{1.4}$$

对一切 $(x,\ y,\ \xi)\in\mathbf{R}^n\times V\times\mathbf{R}^n$ 成立.

引理 1.1 (i) 设 $a(x;\xi)\in S^m$, 则对任非负整数 k, $a(x;\ D)$ 可唯一地延拓为 $H_{k+m}\to H_k$ 的有界算子, 且

$$\|a(x;\ D)u\|_k\leqslant\text{const}\,|a|_{N_0+k,\,l_2}\|u\|_{k+m}.$$

其中 const 是只依赖于 m, k 的常数, l_2 是某正数, $N_0=n+2$. H_k 表示通常的 Соболев 空间, $\|\cdot\|_k$ 表示 Соболев 空间的模.

(ii) 设 $a(x;\ \xi)\in S^m$, 定义 $\bar{a}_j(x;\ \xi)\in S^{m-j}$ 如下

$$\bar{a}_j(x;\ \xi)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\partial_x^\alpha(-i\partial_\xi)^\alpha\bar{a}(x;\ \xi).$$

则对任整数 k_1, $k_2\geqslant0$, $N>m+n+k_1+2k_2$, 有

$$\left|\left(a^*(x;\ D)-\sum_{j=0}^{N-1}\bar{a}_j(x;\ D)\right)u\right|_{k_1}\leqslant\text{const}\,|a|_{N+k_1+2k_2,\,l_2}\|u\|_{-2k_2}.$$

其中 $a^*(x;\ D)$ 是 $a(x;\ D)$ 的形式共轭.

(iii) 设 $a_1(x;\ \xi)\in S^{m_1}$, $a_2(x;\ \xi)\in S^{m_2}$, 定义 $r_j(x;\xi)\in S^{m_1+m_2-j}$ 如下

$$r_j(x;\ \xi)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}((-i\partial_\xi)^\alpha a_1(x;\ \xi))\partial_x^\alpha a_2(x;\ \xi).$$

则对任整数 k_1, $k_2\geqslant0$ 有

$$\left|\left(a_1(x;\ D)a_2(x;\ D)-\sum_{j=0}^{N-1}r_j(x;\ D)\right)u\right|_{k_1}$$
$$\leqslant\text{const}\,|a_1|_{n+2+k_1,\,l_2}|a_2|_{N_2,\,l_2}\|u\|_{-2k_2}.$$

其中 $N>(n+m_2+k_1'+2k_2)$, $k_1'=\max\{k_1+m_1,\ 0\}$, $N_2=\max\{2N+k_1+2k_2-1,\ 2N+n+k_1,\ N+k_1'+2k_2\}$.

(ii), (iii) 中的 const. 与 l_2 意义与 (i) 中的类似. 本节下面出现的 const, l_2 意义均如此, 不再说明.

1) 这里 S 表通常的急减函数类.

证　见 Kumano-go[7]. [7] 中未给出 (iii) 中的系数估计. 但严格地按照 [7] 中的证法, 这个估计是不难得到的.

引理 1.2　设 $a(x;\ \xi)\in S^m$, $m=0,\ 1$, 则

$$\|a(x;\ D)u\|_{-m}\leqslant \mathrm{const}\,|a|_{3n+4,\,l_2}\|u\|_0.$$

证　当 $m=0$ 时, 在引理 1.1(i) 中命 $m=0$, $k=0$ 即得. 现设 $m=1$, 在引理 1.1(iii) 中, 取 $a_1(x;\ \xi)=\varLambda^{-1}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}$, $a_2(x;\ \xi)=a(x;\ \xi)$. 则 $m_1=-1$, $m_2=1$. 取 $k_1=k_2=0$, 则 $k_1'=0$, $n+m_2+k_1'+2k_2=n+1$. 故可取 $N=n+2$. 由引理 1.1(iii)

$$\left|(\varLambda^{-1}(D)a(x;\ D)-\sum_{j=0}^{N-1}r_j(x;\ D)u\right|_0\leqslant \mathrm{const}\,|a|_{N_2,\,l_2}\|u\|_0. \tag{1.5}$$

其中　$r_j(x;\ \xi)=\sum\limits_{|\alpha|=j}\dfrac{1}{\alpha!}(-i\partial_\xi)^\alpha\varLambda^{-1}(\xi)\partial_x^\alpha a(x;\ \xi)\in S^0$. $j=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$. $N_2=2N+n=3n+4$, 由引理 1.1(i)

$$\begin{aligned}\|r_j(x;\ D)u\|_0&\leqslant \mathrm{const}\,|r_j|_{n+2,\,l_2}\|u\|_0\\&\leqslant \mathrm{const}\,|a|_{n+2+j,\,l_2}\|u\|_0\leqslant \mathrm{const}\,|a|_{n+N+1,\,l_2}\|u\|_0.\end{aligned}$$

联合上式与 (1.5) 式, 即得引理.

引理 1.3　设 $a(x;\ \xi)\in S^m$, $m=0,\ 1$, $\bar a(x;\ \xi)$ 是其共轭转置, $a^*(x;\ D)$ 表示 $a(x;\ D)$ 的形式共轭, 则

$$\|(a^*(x;\ D)-\bar a(x;\ D))u\|_0\leqslant \mathrm{const}\,|a|_{2n+5,\,l_2}\|u\|_{m-1}.$$

证　记　$$\bar a_j(x;\ \xi)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\partial_x^\alpha(-i\partial_\xi)^\alpha\bar a(x;\ \xi).$$

则　$$\bar a_j(x;\ \xi)\in S^{m-j}.$$

在引理 1.1(ii) 中, 取 $k_1=0$, $k_2=1$, 则 $m+n+k_1+2k_2=m+n+2$, 取 $N=n+4$, 则

$$\begin{aligned}\left|(a^*(x;\ D)-\sum_{j=0}^{N-1}\bar a_j(x;\ D))u\right|_0&\leqslant \mathrm{const}\,|a|_{n+6,\,l_2}\|u\|_{-2}\\&\leqslant \mathrm{const}\,|a|_{n+6,\,l_2}\|u\|_{m-1}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

又由引理 1.1(i) 对 $1\leqslant j\leqslant N-1=n+3$, 有

$$\|\bar a_j(x;\ D)u\|_0\leqslant \mathrm{const}\,|\bar a_j|_{n+2,\,l_2}\|u\|_{m-1}\leqslant \mathrm{const}\,|a|_{2n+5,\,l_2}\|u\|_{m-1}.$$

连同 (1.6) 式, 即得引理.

引理 1.4　设 $p(x;\ \xi)\in S^0$, $d(x;\ \xi)=p(x;\ \xi)\bar p(x;\ \xi)$, 则

$$\|(d(x;\ D)-p(x;\ D)p^*(x;\ D))u\|_0\leqslant \mathrm{const}\,|p|_{n+2,\,l_2}|\bar p|_{3n+6,\,l_2}\|u\|_{-1}.$$

证

$$\begin{aligned}\|(d(x;\ D)-p(x;\ D)p^*(x;\ D))u\|_0\leqslant&\ \|(d(x;\ D)-p(x;\ D)\bar p(x;\ D))u\|_0\\&+\|p(x;\ D)(\bar p(x;\ D)-p^*(x;\ D))u\|_0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

由引理 1.1(i) 与引理 1.3 有

$$\begin{aligned}\|p(x;\ D)(\bar p(x;\ D)-p^*(x;\ D))u\|_0&\leqslant \mathrm{const}\,|p|_{n+2,\,l_2}\|(\bar p(x;\ D)-p^*(x;\ D))u\|_0\\&\leqslant \mathrm{const}\,|p|_{n+2,\,l_2}|p|_{2n+5,\,l_2}\|u\|_{-1}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

令　$$d_j(x;\ \xi)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}((-i\partial_\xi)^\alpha p(x;\ \xi))\partial_x^\alpha\bar p(x;\ \xi).$$

则 $d_0(x;\ \xi)=d(x;\ \xi)$. 在引理 1.1(iii) 中, 取 $a_1=p$, $a_2=\bar p$, 则 $m_1=m_2=0$. 取 $k_1=0$,

$k_2=1$, 则 $k_1'=0$, $n+m_2+k_1'+2k_2=n+2$, 取 $N=n+3$, $N_2=3n+6$, 则有

$$\left|\left(p(x;\ D)p^*(x;\ D)-\sum_{j=0}^{N-1}d_j(x;\ D)\right)u\right|_0\leqslant\mathrm{const}\,|p|_{n+2,l_2}|\bar{p}|_{3n+6,l_2}\|u\|_{-2}$$
$$\leqslant\mathrm{const}\,|p|_{n+2,l_2}|\bar{p}|_{3n+6,l_2}\|u\|_{-1}. \tag{1.9}$$

由引理 1.1(i), 对 $1\leqslant j\leqslant N-1$,

$$\|d_j(x;\ D)u\|_0\leqslant\mathrm{const}\,|d_j|_{n+2,l_2}\|u\|_{-j}\leqslant\mathrm{const}\,|p|_{n+2,l_2}|\bar{p}|_{n+2+j,l_2}\|u\|_{-1}$$
$$\leqslant\mathrm{const}\,|p|_{n+2,l_2}|\bar{p}|_{2n+4,l_2}\|u\|_{-1}. \tag{1.10}$$

由(1.7)—(1.10)即得引理.

引理 1.5 设 $a(x;\xi)\in S^1$, $r(x;\xi)\in S^0$, 且

$$r(x;\ \xi)a(x;\ \xi)=\bar{a}(x;\ \xi)\bar{r}(x;\ \xi).$$

则 $\|(r(x;\ D)a(x;\ D)-a^*(x;\ D)r^*(x;\ D))u\|_0\leqslant\mathrm{const}\,|r|_{2n+5,l_2}|a|_{3n+4,l_2}\|u\|_0.$

证 记

$$p(x;\ \xi)=r(x;\ \xi)a(x;\ \xi).$$

则

$$\|(r(x;\ D)a(x;\ D)-a^*(x;\ D)r^*(x;\ D))u\|_0\leqslant\|(r(x;\ D)a(x;\ D)-p(x;\ D))u\|_0$$
$$+\|(p(x;\ D)-p^*(x;\ D))u\|_0+\|(p^*(x;\ D)-a^*(x;\ D)r^*(x;\ D))u\|_0. \tag{1.11}$$

在引理 1.1(iii)中, 取 $a_1=r(x;\ \xi)$, $a_2=a(x;\ \xi)$, 则 $m_1=0$, $m_2=1$. 令

$$p_j(x;\ \xi)=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}((-i\partial_\xi)^\alpha r(x;\ \xi))\partial_x^\alpha a(x;\ \xi),$$

有 $p_0(x;\ \xi)=p(x;\ \xi)$. 取 $k_1=k_2=0$, 则 $k_1'=0$, 取 $N=n+2$, 于是 $N_2=3n+4$. 我们有

$$\left|\left(r(x;\ D)a(x;\ D)-\sum_{j=0}^{N-1}p_j(x;\ D)\right)u\right\|_0\leqslant\mathrm{const}\,|r|_{n+2,l_2}|a|_{3n+4,l_2}\|u\|_0. \tag{1.12}$$

又对 $1\leqslant j\leqslant N-1$, 由引理 1.1(i)

$$\|p_j(x;\ D)u\|_0\leqslant\mathrm{const}\,|p_j|_{n+2,l_2}\|u\|_{1-j}\leqslant\mathrm{const}\,|r|_{n+2,l_2}|a|_{n+2+j,l_2}\|u\|_0$$
$$\leqslant\mathrm{const}\,|r|_{n+2,l_2}|a|_{2n+3,l_2}\|u\|_0. \tag{1.13}$$

由(1.12)与(1.13)有

$$\|(r(x;\ D)a(x;\ D)-p(x;\ D))u\|_0\leqslant\mathrm{const}\,|r|_{n+2,l_2}|a|_{3n+4,l_2}\|u\|_0. \tag{1.14}$$

又因 $p^*(x;\ D)-a^*(x;\ D)r^*(x;\ D)=(p(x;\ D)-r(x;\ D)a(x;\ D))^*.$

所以由(1.14)有

$$\|(p^*(x;\ D)-a^*(x;\ D)r^*(x;\ D))u\|_0\leqslant\mathrm{const}\,|r|_{n+2,l_2}|a|_{3n+4,l_2}\|u\|_0. \tag{1.15}$$

又由引理 1.3 知

$$\|(p(x;\ D)-p^*(x;\ D))u\|_0\leqslant\mathrm{const}\,|p|_{2n+5,l_2}\|u\|_0$$
$$\leqslant\mathrm{const}\,|r|_{2n+5,l_2}|a|_{2n+5,l_2}\|u\|_0. \tag{1.16}$$

综合(1.11), (1.14), (1.15), (1.16)即有引理.

现在我们可以精确地叙述关于拟线性组(1)的系数的假设

(I) 系数 $a_i(x,\ y)$是 $(x,\ y)\in\mathbf{R}^n\times V$ 的无穷次可微函数, 其本身及其关于 x, y 的各阶导数在 $\mathbf{R}^n\times V$ 上有界. 此时显然

$$a(x,\ y;\ \xi)=\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n a_i(x,\ y)\xi_i\in S_y^1.$$

(II) 存在非异阵 $r(x,\ y;\ \xi)\in S_y^0$, 使

$$r(x, y; \xi)a(x, y; \xi)=\bar{a}(x, y; \xi)\bar{r}(x, y; \xi). \tag{1.17}$$

$$\operatorname{Re} r(x, y; \xi)\geqslant k>0. \tag{1.18}$$

$\forall(x, y, \xi)\in \mathbf{R}^n\times V\times\mathbf{R}^n$ 成立，其中 k 是某常数.

下面我们总假定拟线性组(1)满足条件(I)，(II).

§2. 线性方程组的高阶能量不等式

象通常处理非线性方程时那样，代替拟线组(1)，我们先考虑如下的线性组

$$Lu\equiv\sum_{i=1}^{n}a_i(x, w(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda u=f(x, w(x)). \tag{2.1}$$

其中 $w\in H_s^\delta$，这里 $H_s^\delta=\{w\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n);\ \|w\|_s\leqslant\delta\}$. $s>\frac{7}{2}n+6$，δ 是某正数，取得使由 $w\in H_s^\delta$，可推得 $\forall x\in\mathbf{R}^n$，有 $w(x)\in V$.

下面我们要将方程组 (2.1) 作为一个拟微分算子进行讨论，因此有必要考察以 $a(x, w(x), \xi)$ 为象征的拟微分算子. 为此我们证明

引理 2.1　设 $a(x, y; \xi)\in S_y^m$，$w\in H_s^\delta$，则

$$a(x, w(x); \xi)\in S^m.$$

且

$$|a|_{3n+6,l_2}\leqslant\text{const}.$$

其中 const 与 $w\in H_s^\delta$ 的选取无关，本节下面的 const 均如此，不再说明.

证　因 $s>\frac{7}{2}n+6$，故当 $w\in H_s^\delta$ 时，由 Соболев 嵌入定理知

$$|\partial_x^\alpha w(x)|\leqslant\text{const}\,\delta,\ |\alpha|\leqslant 3n+6.$$

根据 S^m 类象征的定义与半范的定义(1.2)即得本引理.

由引理 2.1 知，相应于引理 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 我们有

引理 2.2　设 $a(x, y; \xi)\in S_y^m$，$m=0, 1$，以 A 表示以 $a(x, w(x), \xi)$ 为象征的拟微分算子，$w\in H_s^\delta$，则

$$\|Au\|_{-m}\leqslant\text{const}\|u\|_0.$$

引理 2.3　设 $a(x, y; \xi)\in S_y^m$，$m=0, 1$，以 A，$\bar{A}$ 分别表示以 $a(x, w(x); \xi)$，$\bar{a}(x, w(x); \xi)$ 为象征的拟微分算子，$w\in H_s^\delta$. 则

$$\|(A^*-\bar{A})u\|_0\leqslant\text{const}\|u\|_{m-1}.$$

其中 A^* 表 A 的形式共轭.

引理 2.4　设 $p(x, y; \xi)\in S_y^0$，以 P，D 分别表示以 $p(x, w(x); \xi)$，$p(x, w(x); \xi)\bar{p}(x, w(x); \xi)$ 为象征的拟微分算子，$w\in H_s^\delta$. 则

$$\|(D-P\cdot P^*)u\|_0\leqslant\text{const}\|u\|_{-1}.$$

引理 2.5　设 $a(x, y; \xi)\in S_y^1$，$r(x, y; \xi)\in S_y^0$，且

$$r(x, y; \xi)a(x, y; \xi)=\bar{a}(x, y; \xi)\bar{r}(x, y; \xi),\ \forall(x, y, \xi)\in\mathbf{R}^n\times V\times\mathbf{R}^n.$$

分别以 A，R 表示以 $a(x, w(x); \xi)$ 和 $r(x, w(x); \xi)$ 为象征的拟微分算子. 则

$$\|(RA-A^*R^*)u\|_0\leqslant\text{const}\|u\|_0.$$

其中 A^*，R^* 分别表示 A，R 的形式共轭.

下面我们着手对线性组(2.1)建立对 $w\in H_s^\delta$ 一致成立的 s 阶能量不等式.

以 ∂_x^α, $|\alpha|\leqslant s$ 作用于方程组(2.1)的两端. 我们有

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,\ w(x))\frac{\partial}{\partial x_i}(\partial_x^\alpha u)+\lambda(\partial_x^\alpha u)+\Phi^{(\alpha)}(x,\ w,\ u)=\partial_x^\alpha f(x,\ w(x)). \tag{2.2}$$

其中

$$\Phi^{(\alpha)}(x,\ w,\ u)=\sum_{i=1}^n[\partial_x^\alpha(a_i(x,\ w(x))u_{x_i})-a_i(x,\ w(x))\partial_x^\alpha u_{x_i}]. \tag{2.3}$$

令 $\partial_x^\alpha u=U$, 则(2.2)可写为

$$L^{(\alpha)}U\equiv\sqrt{-1}\,AU+\lambda U+\Phi^{(\alpha)}(x,\ w,\ u)=\partial_x^\alpha f(x,\ w(x)). \tag{2.4$_\alpha$}$$

其中
$$A=\frac{1}{\sqrt{-1}}\sum_{i=1}^n a_i(x,\ w(x))\partial/\partial x_i.$$

引理 2.6 $$\|\Phi^{(\alpha)}(x,\ w,\ u)\|_0\leqslant \mathrm{const}\|u\|_s.$$

证

$$\Phi^{(\alpha)}=\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{\lambda+\mu=\alpha\\ \lambda>0}}C_{\lambda,\mu}\partial_x^\lambda a_i(x;\ w(x))\partial_x^\mu u_{x_i}. \tag{2.5}$$

但

$$\partial_x^\lambda a_i(x,\ w(x))=\sum_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant\lambda\\ 0<\gamma\leqslant\lambda-\rho}}C_{\rho,\gamma}a_{i,x,y}^{\rho,\gamma}(\partial_x w)^{\gamma_1}\cdots(\partial_x^\lambda w)^{\gamma_\lambda}. \tag{2.6}$$

其中
$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\lambda=\gamma.$$
$$\gamma_1+2\gamma_2+\cdots+\lambda\gamma_\lambda=\lambda-\rho.$$
$$a_{i,x,y}^{\rho,\gamma}=\partial_x^\rho\partial_y^\gamma a_i(x,\ y).$$

利用 $a_i(x,\ y)$ 关于 x, y 的导数的有界性有

$$|a_{i,x,y}^{\rho,\gamma}|\leqslant \mathrm{const}. \tag{2.7}$$

再由 $|\mu|\leqslant|\alpha|-1$ 有

$$\|a_{i,x,y}^{\lambda,0}\cdot\partial_x^\mu u_{x_i}\|_0\leqslant \mathrm{const}\|\partial_x^\mu u_{x_i}\|_0\leqslant \mathrm{const}\|u\|_s. \tag{2.8}$$

对于 $(\partial_x w)^{\gamma_1}\cdots(\partial_x^\lambda w)^{\gamma_\lambda}$, 设 γ_1, $\cdots$, γ_λ 中最后一个不为0者为 γ_{l_1}. 若 $|l_1|\leqslant s/2$, 则

$$|\partial_x w|,\ |\partial_x^2 w|,\ \cdots,\ |\partial_x^{l_1}w|\leqslant \mathrm{const}\|w\|_s\leqslant \mathrm{const}\,\delta.$$

若 $|l_1|>s/2$, 则定有 $|\gamma_{l_1}|=1$, 且其他使 $\gamma_l\neq0$ 的 l, 均有 $|l|<s/2$, 且 $|\mu|<s/2$. 故

$$|\partial_x^l w|\leqslant \mathrm{const}\|w\|_s\leqslant \mathrm{const}\,\delta. \tag{2.9}$$

$$|\partial_x^\mu u_{x_i}|\leqslant \mathrm{const}\|u\|_s. \tag{2.10}$$

这样由(2.7), (2.9), (2.10)得

$$\begin{aligned}\|a_{i,x,y}^{\rho,\gamma}(\partial_x w)^{\gamma_1}\cdots(\partial_x^\lambda w)^{\gamma_\lambda}\cdot\partial_x^\mu u_{x_i}\|_0&\leqslant \mathrm{const}\|u\|_s\|\partial_x^{l_1}w\|_0\\ &\leqslant \mathrm{const}\|u\|_s\|w\|_s\leqslant \mathrm{const}\|u\|_s.\end{aligned} \tag{2.11}$$

由(2.5), (2.6), (2.8), (2.11)即得引理2.6.

定理 1 设拟线性组(1)的系数满足§1中的假设(I), (II), $s>\frac{7}{2}n+6$, $w\in H_s^\delta$, 则对线性组(2.1)存在与 w 无关的 λ_0 和常数 const. 使 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时成立如下能量不等式

$$\|u\|_s\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\lambda}\|Lu\|_s,\ u\in S. \tag{2.12}$$

证 由对 $r(x,\ y;\ \xi)$ 的假设(1.18), 可设

$$\frac{1}{2}(r(x,\ y;\ \xi)+\bar{r}(x,\ y;\ \xi))=p(x,\ y;\ \xi)\bar{p}(x,\ y;\ \xi)+k_1.$$

其中 $k_1>0$ 是某常数. 以 R, $\bar{R}$, P 和 D 分别表示以 $r(x, w(x); \xi)$, $\bar{r}(x, w(x); \xi)$, $p(x, w(x); \xi)$, 和 $p(x, w(x); \xi)$, $\bar{p}(x, w(x); \xi)$ 为象征的拟微分算子, 则

$$\frac{1}{2}(R+\bar{R})=D+k_1.$$

这样

$$\frac{1}{2}(R+R^*)=P\cdot P^*+k_1+(D-P\cdot P^*)+\frac{1}{2}(R^*-\bar{R}). \tag{2.13}$$

由引理 2.3, 2.4 知

$$\|(R^*-\bar{R})u\|_0\leqslant\text{const}\|u\|_{-1}.$$
$$\|(D-P\cdot P^*)u\|_0\leqslant\text{const}\|u\|_{-1}.$$

这样(2.13)式可写为

$$\frac{1}{2}(R+R^*)=P\cdot P^*+k_1-N.$$

其中 N 是满足如下条件的算子

$$\|Nu\|_0\leqslant\text{const}\|u\|_{-1}. \tag{2.14}$$

故

$$\text{Re}(R+N)=P\cdot P^*+k_1. \tag{2.15}$$

这样

$$\begin{aligned}\text{Re}((R+N)L^{(\alpha)}U, U)&=\text{Re}(iRAU, U)+\text{Re}(R\Phi^{(\alpha)}, U)\\&+\text{Re}(iNAU, U)+\text{Re}(N\Phi^{(\alpha)}, U)+\lambda\text{Re}((R+N)U, U).\end{aligned} \tag{2.16}$$

由引理 2.5

$$|\text{Re}(iRAU, U)|\leqslant\text{const}\|U\|_0^2. \tag{2.17}$$

由引理 2.2 和引理 2.6 知

$$\begin{aligned}|\text{Re}(R\Phi^{(\alpha)}, U)|&\leqslant\|R\Phi^{(\alpha)}\|_0\|U\|_0\leqslant\text{const}\|\Phi^{(\alpha)}\|_0\|U\|_0\\&\leqslant\text{const}\|u\|_s\|U\|_0\leqslant\text{const}\|u\|_s^2.\end{aligned} \tag{2.18}$$

同样由(2.14)和引理 2.6 有

$$|\text{Re}(N\Phi^{(\alpha)}, U)|\leqslant\text{const}\|u\|_s^2. \tag{2.19}$$

又由(2.14)和引理 2.2 有

$$\begin{aligned}|\text{Re}(iNAU, U)|&\leqslant\|NAU\|_0\|U\|_0\\&\leqslant\text{const}\|AU\|_{-1}\|U\|_0\leqslant\text{const}\|U\|_0^2.\end{aligned} \tag{2.20}$$

由(2.15)有

$$\lambda\,\text{Re}((R+N)U, U)\geqslant\lambda k_1\|U\|_0^2. \tag{2.21}$$

综合(2.16)—(2.21)式得

$$\text{Re}((R+N)L^{(\alpha)}U, U)\geqslant\lambda k_1\|U\|_0^2-\text{const}\|u\|_s^2.$$

对上式左端利用 Schwarz 不等式. 再利用引理 2.2 和(2.14)式估计 $\|(R+N)L^{(\alpha)}U\|_0$, 并注意 $\|U\|_0\leqslant\|u\|_s$, $L^{(\alpha)}U=\partial_x^\alpha f(x, w(x))$ 即可得到

$$\|\partial_x^\alpha f(x, w(x))\|_0\|u\|_s\geqslant\lambda k_1\|\partial_x^\alpha u\|_0^2-\text{const}\|u\|_s^2. \tag{2.22$_\alpha$}$$

将 $(2.22)_\alpha$ 对一切 $|\alpha|\leqslant s$ 求和, 即得

$$\|f(x, w(x))\|_s\|u\|_s\geqslant\lambda k_1\|u\|_s^2-\text{const}\|u\|_s^2.$$

取 λ 充分大, 调节常数 const, 即可得

$$\|u\|_s\leqslant\frac{\text{const}}{\lambda}\|f(x, w(x))\|_s.$$

此即我们要证的能量不等式(2.12).

推论 设定理1的假设满足，$\lambda\geqslant\lambda_0$. 又$u$是线性组(2.1)的$H_s$强解，即$u$是$L_2$强解且$u\in H_s$，则仍有

$$\|u\|_s\leqslant\frac{\text{const}}{\lambda}\|Lu\|_s.$$

证 对所有$|\alpha|\leqslant s$，将相应的$(2.4)_\alpha$式放在一起，即为原线性组(2.1)的s阶延拓组. 记该延拓组为

$$\mathscr{L}W=F. \tag{2.23}$$

其中$F=(f,\ \partial_x f,\ \cdots,\ \partial_x^s f)$，则由能量不等式(2.12)知$\lambda\geqslant\lambda_0$，对$s$阶延拓组(2.23)有

$$\|W\|_0\leqslant\frac{\text{const}}{\lambda}\|F\|_0. \tag{2.24}$$

设$u\in H_s$是方程组(2.1)的强解，由[5]知，$W=(u,\ \partial_x u,\ \cdots,\ \partial_x^s u)$是$s$阶延拓组(2.23)的强解. 由(2.24)知

$$\|u\|_s\leqslant\frac{\text{const}}{\lambda}\|f\|_s.$$

§3. 线性方程组高阶可微分解的存在性

在这一节里，我们证明，线性方程组(2.1)在$\lambda\geqslant\lambda_0$时，对任何$f(x,\ w(x))\in H_s$，$w\in H_s^\delta$，有高阶可微分解$u\in H_s$存在.

引理3.1 对固定的$w\in H_s^\delta$，在λ充分大时，线性方程组(2.1)的形式共轭有能量不等式

$$\|v\|_{-s}\leqslant C_w\|L^*v\|_{-s},\ v\in S. \tag{3.1}$$

其中常数C_w可以依赖于$w\in H_s^\delta$.

证
$$L^*v\equiv-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a}_i(x,\ w(x))v)+\lambda v.$$

它亦是一个线性可对称化算子. 满足§1中假设(I)，(II)的对称化子为$r^{-1}(x,\ w(x))$. 记

$$L_0^*v=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a}_i(x,\ w(x))v).$$

则
$$\Lambda^{-s}L^*v=[\Lambda^{-s},\ L_0^*]v+L_0^*\Lambda^{-s}v+\lambda\Lambda^{-s}v.$$

即
$$L^*\Lambda^{-s}v=\Lambda^{-s}L^*v-[\Lambda^{-s},\ L_0^*]v.$$

由0阶能量不等式知λ充分大时有

$$\|\Lambda^{-s}v\|_0\leqslant\frac{\text{const}}{\lambda}(\|\Lambda^{-s}L^*v\|_0+\|[\Lambda^{-s},\ L_0^*]v\|_0. \tag{3.2}$$

$[\Lambda^{-s},\ L_0^*]$是一个s阶拟微分算子. 因而由引理1.1(i)知

$$\|[\Lambda^{-s},\ L_0^*]v\|_0\leqslant\text{const}\|v\|_{-s}. \tag{3.3}$$

取λ充分大，由(3.2)，(3.3)使有能量不等式(3.1).

由于能量不等式(3.1)成立，那么利用标准的泛函表示方法与强弱解一致性定理(见[6])得

引理 3.2　对固定的 $w\in H_s^\delta$，λ 充分大时，线性方程组(2.1)有强解 $u\in H_s$ 存在.

这样我们就可以得到线性方程组(2.1)在 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时强解 $u\in H_s$ 存在的定理

定理 2　设定理 1 的假设满足. 若 $f(x, w(x))\in H_s$, $w\in H_s^\delta$, 则当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时线性方程组(2.1)存在强解 $u\in H_s$.

证　记
$$Lu\equiv L_0u+\lambda u.$$
其中
$$L_0=\sum_{i=1}^n a_i(x, w(x))\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

记 $[\lambda_0, \infty)$ 中使 $Lu=f(x, w(x))$ 有 H_s 强解的 λ 的全体为 $\varDelta$. 往证 $\varDelta=[\lambda_0, \infty)$.

1) $\varDelta$ 非空　由引理 3.2 知，λ 充分大时 $Lu=f(u, w(x))$ 存在 H_s 强解，所以 $\varDelta$ 非空.

2) 若 $\bar\lambda\in\varDelta$, 则存在不依赖 $\bar\lambda$ 的 ε_0, 使当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时，$\bar\lambda+\varepsilon\in\varDelta$.

事实上，记 $\lambda=\bar\lambda+\varepsilon$, 则方程组
$$Lu\equiv L_0u+\lambda u=f(x, w)$$
可写为
$$L_0u+\bar\lambda u=f(x, w)-\varepsilon u.$$
我们用迭代法求其解. 任取 $u_0\in H_s$. 若已求得 $u_n\in H_s$, 因 $\bar\lambda\in\varDelta$, 由方程组
$$L_0u+\bar\lambda u=f(x, w)-\varepsilon u_n. \tag{3.4}$$
求得其强解 $u_{n+1}\in H_s$. 下证 $\{u_n\}$ 在 H_s 中收敛于某 $u\in H_s$. 因此 $u_{n+1}-u_n$ 是方程组
$$L_0u+\bar\lambda u=\varepsilon(u_{n-1}-u_n)$$
的 H_s 强解. 由定理 1 的推论知
$$\|u_{n+1}-u_n\|_s\leqslant\frac{\text{const}}{\bar\lambda}\|\varepsilon(u_{n-1}-u_n)\|_s\leqslant\frac{|\varepsilon|\text{const}}{\lambda_0}\|u_n-u_{n-1}\|_s.$$

取 $\varepsilon_0=\lambda_0/\text{const}$, 则当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时，$\dfrac{|\varepsilon|\text{const}}{\lambda_0}<1$. 故得 $\{u_n\}$ 是 H_s 中的收敛序列. 设其极限为 $u\in H_s$. 由(3.4)式知 u 是方程组
$$L_0u+(\bar\lambda+\varepsilon)u=f(x, w)$$
的强解. 所以 $\lambda=\bar\lambda+\varepsilon\in\varDelta$.

综合 1), 2)知，$\varDelta=[\lambda_0, \infty)$. 定理 2 得证.

§4. 拟线性组解的存在唯一性

由定理 2 知，当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时，对任 $w\in H_s^\delta$, 只要 $f(x, w(x))\in H_s$, 线性组(2.1)就有唯一强解 $u\in H_s$. 这就定义了一个算子
$$\Phi:\ H_s^\delta\to H_s$$
且成立不等式
$$\|\Phi(w)\|_s\leqslant\frac{\text{const}}{\lambda}\|f(x, w)\|_s. \tag{4.1}$$

为使对任 $w\in H_s^\delta$, 当 λ 充分大时(λ 多大不依赖于 $w\in H_s^\delta$ 的选取)均有 $\|\Phi(w)\|_s\leqslant\delta$. 对右端项要加一些要求.

引理 4.1　设方程组(2.1)满足定理 1 的假设、右端项 $f(x, y)$ 满足以下条件
$$f(x, 0)\in H_s. \tag{4.2}$$

$$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbf{R}^n\times V\\|\alpha|+|\beta|\leqslant s+1}}|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f(x,y)|\leqslant\text{const}.\tag{4.3}$$

则存在 λ_1, 使当 $\lambda\geqslant\lambda_1$ 时, $\forall w\in H_s^\delta$, 均有

$$\|\Phi(w)\|_s\leqslant\delta.\tag{4.4}$$

证 将 $f(x, w(x))$ 表为

$$f(x, w)=f(x, 0)+\int_0^1 f_y(x, \tau w)\cdot w\,d\tau.$$

这里 f_y 实际上是 $f(x, y)$ 关于 y 的偏导数所组成的矩阵. 由上式我们有

$$\|f(x, w)\|_s\leqslant\|f(x, 0)\|_s+\int_0^1\|f_y(x, \tau w)\cdot w\|_s d\tau.$$

现来考察 $f_y(x, \tau w)\cdot w$, 它关于 x 的任何 $|\alpha|\leqslant s$ 阶导数为下列项的线性组合

$$\partial_x^\nu f_y(x, \tau w(x))\cdot\partial_x^\mu w(x),\ |\nu|+|\mu|=|\alpha|.$$

而 $\partial_x^\nu f_y(x, \tau w(x))$ 的元素是如下项的线性组合

$$\tau^\gamma\tilde{\partial}_x^\rho\partial_y^\gamma f_y(x, \tau w)(\partial_x w)^{\gamma_1}\cdots(\partial_x^\nu)^{\gamma_\nu}.$$

这里 $\tilde{\partial}_x$ 表示仅对 $f_y(x, y)$ 中的 x 求导. 其中 $\gamma_1+\cdots+\nu\gamma_\nu=\nu-\rho$. 由条件 (4.3) 并注意 $|\tau|\leqslant1$, 有

$$|\tau^\gamma\tilde{\partial}_x^\rho\partial_y^\gamma f_y(x, \tau w)|\leqslant\text{const}.$$

利用类似于引理 2.6 证明中的讨论, 不难得到

$$\|\tau^\gamma\tilde{\partial}_x^\rho\partial_y^\gamma f_y(x, \tau w)(\partial_x w)^{\gamma_1}\cdots(\partial_x^\nu w)^{\gamma_\nu}\cdot\partial_x^\mu w(x)\|_0\leqslant\text{const}\|w\|_s\leqslant\text{const}.$$

这样便有

$$\int_0^1\|f_y(x, \tau w)\cdot w\|_s d\tau\leqslant\text{const}.$$

所以

$$\|f(x, w(x))\|_s\leqslant\text{const}.\tag{4.5}$$

这说明 $\forall w\in H_s^\delta$, 均有 $f(x, w(x))\in H_s$. 而且其 H_s 模有与 $w\in H_s^\delta$ 无关的上界. 由定理 2 知, 当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时存在方程组(2.1)的唯一强解 $u\in H_s$. 此即 $\Phi(w)$. 并且(4.1)式成立. 记 C 为(4.1)与(4.5)式右端 const 之积. 取 $\lambda_1=\max\{\lambda_0, C/\delta\}$, 即满足引理要求.

引理 4.2 设引理 4.1 的假设满足, 则存在 $\lambda_2\geqslant\lambda_1$, 使当 $\lambda\geqslant\lambda_2$ 时

$$\|\Phi(w_1)-\Phi(w_2)\|_0\leqslant q\|w_1-w_2\|_0.\quad\forall w_1, w_2\in H_s^\delta,\tag{4.6}$$

其中 $0<q<1$.

证 在 $\lambda\geqslant\lambda_1$ 时, 设

$$u_1=\Phi(w_1),\ u_2=\Phi(w_2).$$

则

$$\begin{aligned}&\Sigma a_i(x, w_1)\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1-u_2)+\lambda(u_1-u_2)\\&=f(x, w_1)-f(x, w_2)-\Sigma(a_i(x, w_1)-a_i(x, w_2))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

由 0 阶能量不等式有

$$\begin{aligned}\|u_1-u_2\|_0\leqslant&\frac{\text{const}}{\lambda}\|f(x, w_1)-f(x, w_2)\|_0\\&+\frac{\text{const}}{\lambda}\left\|\Sigma(a_i(x, w_1)-a_i(x, w_2))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right\|_0.\end{aligned}$$

对上式右端利用中值定理进行估计，考虑到假设(4.3)与引理4.1，立即可得

$$\|u_1-u_2\|_0\leqslant\frac{\text{const}}{\lambda}\|w_1-w_2\|_0.$$

因而引理成立.

算子 Φ 定义在 H_s^δ 上. 为能利用压缩映象原理，就要将 Φ 延拓到 H_s^δ 的闭色上. 以 $\overline{H}_s^\delta$ 表示 H_s^δ 在 H_s 中的闭包，即

$$\overline{H}_s^\delta=\{w\in H_s;\ \|w\|_s\leqslant\delta\}.$$

为能在 H_0 中用压缩映象原理，还需要下引理.

引理 4.3　$\overline{H}_s^\delta$ 在 H_0 中是闭的.

这个引理的证明见[2]. 而实际上，它是 Banach–Saks 定理的简单推论.

定理 3　设拟线性组(1)满足 §1 中的假设(I)，(II). $s>\frac{7}{2}n+6$. $f(x, y)$ 满足引理 4.1 中的假设(4.2)，(4.3). 则当 λ 充分大时，方程组(1)在 $\overline{H}_s^\delta$ 中有唯一解.

证　当 $\lambda\geqslant\lambda_2$ 时，由引理 4.2，算子

$$\Phi:\ H_s^\delta\to H_s$$

按 H_0 模连续. 由引理 4.3，$\overline{H}_s^\delta$ 在 H_0 中闭. 象[4]中那样，将 Φ 连续延拓到 $\overline{H}_s^\delta$ 上. 延拓后的算子仍记为 Φ，则由引理 4.1，4.2 知，Φ 为 $\overline{H}_s^\delta$ 到 $\overline{H}_s^\delta$ 自身的映照，而且是压缩映照.

不难说明，$\forall w\in\overline{H}_s^\delta$，$\Phi(w)$ 是方程组(2.1)相应于 w 的强解. 由压缩映象原理，Φ 在 $\overline{H}_s^\delta$ 中有不动点 u:

$$\Phi(u)=u.$$

u 显然是拟线性组(1)的解. 唯一性可由常规办法得到.

本文是在谷超豪教授指导下完成的，并得到陈恕行付教授许多帮助，在此表示衷心的感谢.

注 1　若象 Friedrichs 和 Lax[1] 最初关于线性方程所作的那样，要求方程组(1)的系数在某紧集外为常数，则利用[3]中的关于拟微分算子的估计，只要 $s>\frac{3}{2}n+2$ 即可.

注 2　本文的方法适用于一阶拟线性可对称化双曲组的局部 Cauchy 问题的讨论.

参 考 文 献

[1] Friedrichs, K. O. and Lax, P. D., Boundary value problems for first order operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, (1965), 355—388.

[2] Hahn-Goldberg, Generalized linear and quasilinear accretive systems of partial differential equation., *Comm. in P. D. E.*, **2**(2), (1977), 109—164.

[3] Kohn, J. J. and Nirenberg, L., An algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, (1965), 269—305.

[4] 谷超豪，拟线性正对称方程组的边值问题及其对混合型方程的应用，**数学学报**，**21**(1978)，119—129.

[5] 谷超豪，正对称型偏微分方程组的可微分解，**数学学报**，**14**(1964)，503—516.

[6] Friedrichs, K. O., The identity of weak and strong extensions of differential Operators, *Trans, Amer. Math. Soc.*, **55**: 1 (1944), 132—151.

[7] Kumano-go, H., Remarks on pseudo-differential operators, *J. Math. Soc. Japan*, **21**: 3(1969).

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR FIRST ORDER QUASILINEAR-SYMMETRIZABLE SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

QIN TIEHU

(*Research Institute of Mathematics, Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper we study the first order quasilinear symmetrizable system of partial differential equations

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda u=f(x, u), \tag{1}$$

where $a_i(x, y)$ are $k\times k$ matrices.

Before stating the main results, we give the following definition:

Definition. If m is a real number, we denote by S_y^m the set of all $a(x, y; \xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times V\times\mathbf{R}^n)$, where V is some neighbourhood of the origin in $\mathbf{R}^k$, such that for all multiindices α, β, γ we have with a constant $C_{\alpha,\beta,\gamma}$

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x, y; \xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}. \quad \forall(x, y, \xi)\in\mathbf{R}^n\times V\times\mathbf{R}^n.$$

On the system (1) we assume:

(I) $$a(x, y; \xi)=\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i(x, y)\xi_i\in S_y^1$$

(II) There is a non-singular $k\times k$ matrix $r(x, y; \xi)\in S_y^0$ with the following properties

$$r(x, y; \xi)a(x, y; \xi)=\bar{a}(x, y; \xi)\bar{r}(x, y; \xi), \ \mathrm{Re}\, r(x, y; \xi)\geqslant p,$$
$$\forall(x, y, \xi)\in\mathbf{R}^n\times V\times\mathbf{R}^n,$$

where p is some positive number.

Under the preceding conditions we prove following main Theorem

Theorem. If $f(x, y)$ satisfies the following conditions

$$f(x, 0)\in H_s,$$
$$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbf{R}^n\times V\\ |\alpha|+|\beta|\leqslant s+1}} |\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f(x, y)|\leqslant\text{const.},$$

then there exists a unique solution in $\overline{H}_s^\delta$ for the quasilinear system (1) when λ is sufficiently large, where $\overline{H}_s^\delta=\{w\in H_s,\ \|w\|_s\leqslant\delta\},\ s>\frac{7}{2}n+6.$