数学年刊
3 (3) 1982

非负 (f, d_n) 求和法的 Lebesgue 常数和 Gibbs 现象

施咸亮
(杭州大学)

§1. 总说

Smith, G.[1] 在 Sonnenschein, J.[2] 求和法和 Jakimovski, A.[3] 的 $[F, d_n]$ 求和法基础上引入了 (f, d_n) 求和法. 其定义如下: 设 $f(z)$ 是异于常数的复函数. 它在圆 $|z|<R$ 内是解析的, $R>1$. 又设 d_n 是复数列, 满足 $d_n\neq -f(1)$, $n=1, 2, \cdots$. 假设矩阵 $A=(a_{nk})$ 由下列关系确定

$$a_{00}=1,\ a_{0k}=0\ (k\geqslant 1),$$

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{f(z)+d_j}{f(1)+d_j}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}z^k.$$

倘若对于每个 n, 级数 $\sigma_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{nk}s_k$ 是收敛的, 并且当 $n\to\infty$ 时 σ_n 收敛于 s, 则说序列 $\{s_n\}$ (f, d_n) 可和于 s. 称 σ_n 为 $\{s_n\}$ 的 (f, d_n) 平均.

许多经典求和法是 (f, d_n) 求和法的特殊情形[1,4]. 假如 $f(z)$ 的 Maclaurin 系数以及诸常数 d_n 都是非负实数, 则称相应的 (f, d_n) 求和法为非负的. 由[1]知道, 非负 (f, d_n) 求和法是正则求和法的充要条件是[注一]

$$H_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{f(1)+d_j}\to\infty\ (n\to\infty). \tag{1}$$

众所周知, 在研究 Fourier 级数 (f, d_n) 可和性时, Lebesgue 常数有着重要意义. 这个常数由下式确定

$$L_n(A)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{nk}\sin(2k+1)t\right|}{\sin t}dt.$$

有不少作者对各种特殊的非负 (f, d_n) 平均 Lebesgue 常数作了研究, 获得了对于它们的渐近展开式. Fejér, L.[5], 给出了 Fourier 部分和序列 Lebesgue 常数的渐近展开 (对应于 $f(z)=z$, $d_n=0$). 其后, Lorch, L.[6], 对于 Borel 求和法 (对应于 $f(z)=e^{z-1}$, $d_n=0$), Lorch, L.[7] 对于 Euler $(E, 1)$ 求和法, Livingston, A. E.[8], 对于 Euler (E, p) 求和法 (对应于 $f(z)=z$, $d_n=p$), Lorch, L. 和 Newman, D. J.[9], 对于 $[F, d_n]$ 求和法 (对应于 $f(z)=z$, $d_n\geqslant 0$) 给出了 Lebesgue 常数的渐近展开.

去年, Shoop, R. A.[4], 讨论了正则的非负 (f, d_n) 求和法 Lebesgue 常数的渐近展开.

本文 1980 年 6 月 23 日收到, 1980 年 8 月 8 日修改.

注一 Smith, G. 曾假设 $d_n\neq -f(0)$. 但是这一假设可以去除.

他证明[注二]假设非负(f, d_n)求和法是正则的，并且满足

i) 对于 $|z|\leqslant 1$, $z\neq 1$ 有$|f(z)|<1$;

ii) $f(1)=f'(1)=1$, 并且 $f''(1)\neq 0$,

那么对于(f, d_n)求和法的 Lebesgue 常数 $L_n(A)$有展开式

$$L_n(A)=\frac{2}{\pi^2}\log\frac{4H_n^2}{\mathscr{S}_n}+\alpha+o(1)\quad(n\to\infty).$$

其中
$$\mathscr{S}_n=2f''(1)H_n+2G_n,\ G_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{(1+d_j)^2},$$

$$\alpha=-\frac{2}{\pi^2}c+\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\sin t}{t}dt-\frac{2}{\pi}\int_1^\infty\frac{1}{t}\left\{\frac{2}{\pi}-|\sin t|\right\}dt, \tag{2}$$

c 为 Euler 常数.

上述条件 i) 和 ii) 是很强的[注三]. 许多经典求和法不满足. 事实上，当条件 ii) 满足时，$f(z)$的 Maclaurin 展开式

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k \tag{3}$$

中至少有两项系数大于零，并且诸系数要满足约束条件 $b_0=\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)b_k$. 又，形如 $f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}b_{ml}z^{ml}$ $(m\geqslant 2)$ 的解析函数不满足条件 i). 本文中我们将去除条件 i) 和 ii)，给出一切非负正则(f, d_n)求和法 Lebesgue 常数的渐近展开. 我们的结果如下:

定理 1 设(f, d_n)求和法是非负且正则的，即满足 $b_k\geqslant 0$, $d_n\geqslant 0$ 和条件(1). 那么当 n 充分大时成立着渐近式

$$L_n(A)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi^2}\log H_n+O(1), \text{若 } f(z)=bz^m,\ m\geqslant 1,\ b>0 \text{ 且 } G_n=O(1);\\[2mm] \dfrac{2}{\pi^2}\log\dfrac{2\beta_1^2H_n^2}{\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+\lambda H_n}+\alpha+o(1), \text{其它情形},\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\beta_0=\sum_{k=0}^{\infty}b_k=f(1),\qquad \beta_1=\sum_{k=1}^{\infty}kb_k=f'(1),$$

$$\beta_2=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_k=\frac{1}{2}f''(1),\quad \lambda=2\beta_2+\beta_1-\beta_1^2\beta_0^{-1}, \tag{5}$$

$$G_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{(\beta_0+d_j)^2},\qquad H_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_0+d_j}.$$

常数 α 由(2)定义，b_k 是展开式(3)的系数.

在§4中，我们利用定理1证明中的一个渐近式证明，非负正则的(f, d_n)求和法出现 Gibbs 现象.

§2. 辅助引理

引理 1 设 $a_k\geqslant 0$, $k=1, 2, \cdots$. 那么对于 $p\geqslant 2$ 成立不等式

注二 Shoop, R. A. 的证明是不完备的——这是盛淑云同志指出的.

注三 Shoop, R. A. 在[4]中说，当所有 $d_n=0$ 时为了保证(f, d_n)方法的正则性条件 i) 是必要的. 这一说法是不妥当的，事实上 $f(z)=z^m$ 不满足 i)，但$(z^m, 0)$求和法是正则的.

$$\left(\sum_{k=1}^{p} k a_k\right)\left(\sum_{k=2}^{p}(k-1)a_k\right)\leqslant\left(\sum_{k=2}^{p}k(k-1)a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{p}a_k\right). \tag{6}$$

证　对于 $p=2$ 不难直接验证(6)的正确性．设 $p>2$．注意到当 $k\leqslant p$ 时有不等式

$$2kp-p+k\leqslant k^2+p^2-k+p.$$

不难应用数学归纳法来完成(6)的证明．　　证毕．

引理 2　设 $f(z)\neq$常数，并且(3)中系数 $b_k\geqslant 0$．那么对于由(5)所定义的诸数成立不等式

$$\lambda=2\beta_2+\beta_1-\beta_1^2\beta_0^{-1}\geqslant 0. \tag{7}$$

此外，(7)中等号成立的充要条件是 $b_0=0$ 并且诸系数 b_1, b_2, …中有且仅有一个为正数．

证　在(6)中置 $a_k=b_k$, $k=1, 2, \cdots$ 然后再让 $p\to\infty$ 得到

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} kb_k\right)\left(\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)b_k\right)\leqslant\left(\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k\right).$$

此即

$$\beta_1(\beta_1-\beta_0+b_0)\leqslant 2\beta_2(\beta_0-b_0).$$

由此推得

$$\lambda=\beta_1+2\beta_2-\beta_1^2\beta_0^{-1}\geqslant\beta_0^{-1}b_0(\beta_1+2\beta_2)\geqslant 0. \tag{8}$$

i) 假设 $b_0\neq 0$．由于 $f(z)\neq$常数，所以 b_1, b_2, … 中至少有一数为正．由(8)，这时 $\lambda\geqslant b_0\beta_1\beta_0^{-1}>0$．

ii) 设 $b_0=0$．但 b_1, b_2, … 诸数中至少有两个数为正．以 b_l, b_m 表示最前面的两个正系数，$l<m$．那么

$$\left(\sum_{k=1}^{m} kb_k\right)\left(\sum_{k=2}^{m}(k-1)b_k\right)=(l^2-l)b_l^2+(m^2-m)b_m^2+(2lm-l-m)b_lb_m.$$

$$\left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}b_k\right)=(l^2-l)b_l^2+(m^2-m)b_m^2+(m^2+l^2-l-m)b_lb_m.$$

由于 $2lm<l^2+m^2$，所以有严格不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{m} kb_k\right)\left(\sum_{k=2}^{m}(k-1)b_k\right)<\left(\sum_{k=2}^{m}k(k-1)b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}b_k\right). \tag{9}$$

另一方面，在(6)中置 $p=\infty$，并且取 $a_k=0$，若 $k=1$, …, m; $a_k=b_k$，若 $k=m+1$, …．那么得到

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} kb_k\right)\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}(k-1)b_k\right)\leqslant\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}k(k-1)b_k\right)\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k\right). \tag{10}$$

利用(9)和(10)不难导出严格不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} kb_k\right)\left(\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)b_k\right)<\left(\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k\right).$$

此即 $\beta_1(\beta_1-\beta_0)<2\beta_2\beta_0$ 或 $\lambda>0$．

iii) 设 $b_0=0$，但 b_1, b_2, … 诸数中除一个 b_m 外皆为零．那么 $\lambda=m(m-1)b_m+mb_m-(mb_m)^2b_m^{-1}=0$．　　证毕．

引理 3　设 $f(z)$的 Maclaurin 系数 $b_k\geqslant 0$ 并且至少有两个系数为正．那么方程

$$|f(e^{it})|=f(1) \tag{11}$$

在$[-\pi, \pi]$上至多只有有限个相异的根，并且当 t 是根时 $-t$ 也是根．

证　假设 $t=\xi(\neq 0)$是(11)的一个根，那么存在 $\gamma\in[-\pi, \pi]$使得

$$f(e^{i\xi})=e^{i\gamma}f(1). \tag{12}$$

于是
$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k e^{i\xi k}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k e^{i\gamma}.$$

假如对于某个 k, $b_k\neq 0$, 那么为使上式成立必有

$$e^{i\xi k}=e^{i\gamma}. \tag{13}$$

i) 设 $b_0\neq 0$. 在(13)中置 $k=0$ 得 $e^{i\gamma}=1$. 于是(12)成为

$$f(e^{it})=f(1). \tag{14}$$

根据解析函数唯一性定理,方程(14)在$[-\pi,\pi]$内只有有限个相异的根.

ii) 设 $b_0=0$. 以 b_l 表示第一个不等于零的 Maclaurin 系数. 那么

$$f(z)=z^l\left(b_l+\sum_{k=1}^{\infty}b_{l+k}z^k\right)\equiv z^l g(z).$$

其中 $g(z)$ 仍为 $|z|<R$ 内解析函数并且 $g(z)\neq$常数. 这样, 方程 (11) 转化为 $|g(e^{it})|=g(1)$. 根据已证明的情形 i), 该方程在$[-\pi,\pi]$上至多只有有限个相异的根.

显然,当 t 为根时, $-t$ 也是根. 证毕.

引理 4[9] 设 p_n 和 q_n 是正数列,满足

$$p_n\to\infty,\ q_n^2p_n^{-1}\to\infty \quad (n\to\infty). \tag{15}$$

那么对于积分

$$\lambda(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}e^{-p_nt^2}\frac{|\sin q_nt|}{t}dt$$

成立渐近式
$$\lambda(n)=\frac{2}{\pi^2}\log\frac{q_n^2}{p_n}+\alpha+o(1)\quad (n\to\infty).$$

其中常数 α 由(2)式定义.

§3. 定理1的证明

分三种情形讨论:

I. $f(z)=bz^l$, $b>0$, $l\geqslant 1$ 并且 $G_n=O(1)$.

II. $f(z)=bz^l$, $b>0$, $l\geqslant 1$ 并且 $G_n\to\infty$.

III. $f(z)$的 Maclaurin 系数至少有两个是正的.

首先考察情形 I. 这时

$$L_n(A)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\left|\mathrm{Im}\left\{e^{it}\prod_{j=1}^{n}\frac{be^{2ilt}+d_j}{b+d_j}\right\}\right|dt.$$

令 $d_j'=d_jb^{-1}$. 那么

$$L_n(A)=\frac{2}{l\pi}\int_0^{l\pi/2}\frac{1}{\sin\frac{t}{l}}\left|\mathrm{Im}\left\{e^{i\frac{t}{l}}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d_j'}{1+d_j'}\right\}\right|dt. \tag{16}$$

由于当 $0<t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时

$$e^{i\frac{t}{l}}=e^{it}+O(t),\quad \frac{1}{\sin\frac{t}{l}}=\frac{l}{\sin t}+O(1).$$

所以从(16)得到

$$L_n(A)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\left|\operatorname{Im}\left\{e^{it}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d_j'}{1+d_j'}\right\}\right|dt$$
$$+\frac{2}{l\pi}\int_{\pi/2}^{l\pi/2}\frac{1}{\sin\frac{t}{l}}\left|\operatorname{Im}\left\{e^{i\frac{t}{l}}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d_j'}{1+d_j'}\right\}\right|dt+O(1)$$
$$=L_n'+L_n''+O(1). \tag{17}$$

由[9]，当 $G_n=O(1)$ 时

$$L_n'=\frac{4}{\pi^2}\log\left(1+2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+d_j'}\right)+O(1)=\frac{4}{\pi^2}\log H_n+O(1). \tag{18}$$

另一方面显然有

$$L_n''=O(1). \tag{19}$$

综合(17)—(19)便知(4)的第一式成立.

考察情形 II. 由(16)，我们有

$$L_n(A)=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{2}{l\pi}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}\frac{1}{\sin\frac{t}{l}}\left|\operatorname{Im}\left\{e^{\frac{it}{l}}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d_j'}{1+d_j'}\right\}\right|dt=\sum_{k=0}^{l-1}\sigma_k. \tag{20}$$

由[9]，当 $0<t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时成立估计式

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d_j'}{1+d_j'}=O\left(e^{-\frac{1}{2}G_n't^2}\right). \tag{21}$$

其中 $G_n'=\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j'}{(1+d_j')^2}$. 同理，(21)对于 $-\frac{\pi}{2}\leqslant t<0$ 也成立. 于是有

$$J_n\equiv\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d_j'}{1+d_j'}\right|dt=\int_{|t|\leqslant g_n}+\int_{g_n<|t|\leqslant\frac{\pi}{2}}$$
$$=O(g_n)+O\left(\int_{g_n}^{\pi/2}e^{-\frac{1}{2}G_n't^2}dt\right)=O(g_n)+O\left(e^{-\frac{1}{2}G_n'g_n^2}\right).$$

取 $g_n=(G_n')^{-3/8}$，注意到当 $G_n\to\infty$ 时也有 $G_n'\to\infty$ 我们得到

$$J_n=o(1)\quad(n\to\infty). \tag{22}$$

这样，就有

$$\sigma_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\left|\operatorname{Im}\left\{e^{it}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d_j'}{1+d_j'}\right\}\right|dt+O(J_n)$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\left|\operatorname{Im}\left\{e^{it}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d_j'}{1+d_j'}\right\}\right|dt+o(1). \tag{23}$$

根据[9]，(23)中最后的积分等于

$$\frac{2}{\pi^2}\log\frac{(1+2H_n')^2}{2G_n'}+\alpha+o(1).$$

其中 $H_n'=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+d_j'}$. 由是，从(23)导出

$$\sigma_0=\frac{2}{\pi^2}\log\frac{2H_n'^2}{G_n'}+\alpha+o(1). \tag{24}$$

设 $1\leqslant k\leqslant l-1$. 若 k 是偶数，则由(22)得到

$$\sigma_k=\frac{2}{\pi l}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin\left(t+\frac{k\pi}{2}\right)\Big/l}\left|\mathrm{Im}\left\{e^{i\left(t+\frac{k\pi}{2}\right)/l}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2it}+d'_j}{1+d'_j}\right\}\right|dt=O(J_n)=o(1). \tag{25}$$

若 $1\leqslant k\leqslant l-1$, 但 k 是奇数, 则仍由 (22) 得到

$$\sigma_k=\int_0^{\pi/2}O(1)\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{2i\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}+d'_j}{1+d'_j}\right|dt=O(J_n)=o(1). \tag{26}$$

注意到在情形 II, $\lambda=0$, $\beta_0=b$, $\beta_1=lb$, 综合 (20)、(24)、(25) 和 (26) 便知 (4) 的第二式成立.

最后考察情形 III. 根据引理 3, 在这种情形方程 $|f(e^{2it})|=f(1)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上除 $t_0=0$ 外至多尚有有限个相异的根. 设它们是 $t_0<t_1<\cdots<t_p\leqslant\frac{\pi}{2}$. 又, 对于这些点还有 $|f(e^{-2it})|=f(1)$. 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上除去这些点外常成立

$$|f(e^{2it})|<f(1),\ |f(e^{-2it})|<f(1). \tag{27}$$

取 $\delta>0$ 充分小, 使之满足

$$\delta<\frac{1}{4}\min_{0\leqslant j\leqslant p-1}(t_{j+1}-t_j).$$

记

$$I_s(\delta)=\left\{t\,\middle|\,t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ |t-t_s|<\delta\right\},\ s=0,1,\cdots,p.$$

$$I'=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Big\backslash\bigcup_{s=0}^{p}I_s(\delta).$$

又设

$$K_n(t)=\frac{1}{2i}\left\{e^{it}\prod_{j=1}^{n}\frac{f(e^{2it})+d_j}{f(1)+d_j}-e^{-it}\prod_{j=1}^{n}\frac{f(e^{-2it})+d_j}{f(1)+d_j}\right\}.$$

写着

$$\begin{aligned}L_n(A)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|K_n(t)|}{\sin t}dt=\sum_{s=0}^{p}\frac{2}{\pi}\int_{I_s(\delta)}\frac{|K_n(t)|}{\sin t}dt\\&\quad+\frac{2}{\pi}\int_{I'}\frac{|K_n(t)|}{\sin t}dt\equiv\sum_{s=0}^{p}\tau_s+\sigma.\end{aligned} \tag{28}$$

首先计算 τ_0. 记

$$f(e^{2it})+d_j=\rho_je^{i\theta_j},\ f(e^{-2it})+d_j=\rho_je^{-i\theta_j}.$$

那么由 Taylor 展开

$$\begin{aligned}\rho_je^{i\theta_j}&=\beta_0+\beta_1(e^{2it}-1)+\beta_2(e^{2it}-1)^2+d_j+O(t^3)\\&=\beta_0-2\beta_1t^2-4\beta_2t^2+d_j+2i\beta_1t+O(t^3).\end{aligned} \tag{29}$$

从而

$$\theta_j=\frac{2\beta_1t}{\beta_0+d_j}+O\left(\frac{t^3}{\beta_0+d_j}\right).$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}K_n(t)&=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\rho_j}{\beta_0+d_j}\right)\sin\left(\sum_{\nu=1}^{n}\theta_\nu+t\right)\\&=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\rho_j}{\beta_0+d_j}\right)\sin\{2\beta_1H_nt+t+O(H_nt^3)\}\\&=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\rho_j}{\beta_0+d_j}\right)\sin2\beta_1H_nt+O(t)+O(H_nt^3).\end{aligned}$$

设 $t=t'_n$ 是方程

$$e^{-\lambda H_n t^2}=t \tag{30}$$

的根．显然，当 $H_n\uparrow\infty$ 时 $t'_n\to 0$．

$$\tau_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{|K_n(t)|}{\sin t}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{t'_n}+\frac{2}{\pi}\int_{t'_n}^\delta=\tau_{01}+\tau_{02}.$$

我们见到

$$\tau_{01}=\frac{2}{\pi}\int_0^{t'_n}\left(\prod_{j=1}^n\frac{\rho_j}{\beta_0+d_j}\right)\frac{|\sin 2\beta_1 H_n t|}{t}dt+O(t'_n)+O(H_n(t'^3_n)). \tag{31}$$

另一方面，由(29)又可推得，只要 $\delta>0$ 充分小，在 $(0, \delta]$ 内有

$$\frac{\rho_j e^{i\theta_j}}{\beta_0+d_j}=\exp\left\{\frac{2i\beta_1 t}{\beta_0+d_j}+t^2\left[-\frac{2\beta_1^2\beta_0^{-1}d_j}{(\beta_0+d_j)^2}-\frac{4\beta_2+2\beta_1-2\beta_1^2\beta_0^{-1}}{\beta_0+d_j}\right]+O\left(\frac{t^3}{\beta_0+d_j}\right)\right\}.$$

这样，就有

$$\prod_{j=1}^n\frac{\rho_j e^{i\theta_j}}{\beta_0+d_j}=e^{2i\beta_1 tH_n+t^2(-2\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n-2\lambda H_n)+O(t^3H_n)}. \tag{32}$$

从而

$$\prod_{j=1}^n\frac{\rho_j}{\beta_0+d_j}=e^{-2t^2(\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+\lambda H_n)}+O(t^3H_n). \tag{33}$$

由(30)，我们见到

$$t'^3_n H_n=\frac{t'_n}{\lambda}\ln\frac{1}{t'_n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以把(33)代入(31)得到

$$\tau_{01}=\frac{2}{\pi}\int_0^{t'_n}e^{-2t^2(\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+\lambda H_n)}\frac{|\sin 2\beta_1 H_n t|}{t}dt+o(1). \tag{34}$$

注意到 $e^{-2t^2\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n}\leqslant 1$，从(32)又可导出

$$\prod_{j=1}^n\frac{\rho_j}{\beta_0+d_j}\leqslant e^{-2\lambda H_n t^2+O(t^3H_n)}. \tag{35}$$

由引理 2，在情形 III 有 $\lambda>0$．所以只要 δ 适当小，使(35)中的 $O(1)$ 因子不超过 λ/δ，我们就有

$$\prod_{j=1}^n\frac{\rho_j}{\beta_0+d_j}\leqslant e^{-\lambda H_n t^2}\quad(0<t\leqslant\delta).$$

因此，注意到 t'_n 是(30)的根，我们有

$$\tau_{02}\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{t'_n}^\delta\frac{1}{t}e^{-\lambda H_n t^2}dt\leqslant\frac{2\delta}{\pi}\cdot\frac{e^{-\lambda H_n t'^2_n}}{t'_n}=\frac{2\delta}{\pi}. \tag{36}$$

由(34)，(36)我们见到，

$$\left|\tau_0-\frac{2}{\pi}\int_0^{t'_n}e^{-t^2(2\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+2\lambda H_n)}\frac{|\sin 2\beta_1 H_n t|}{t}dt\right|\leqslant o(1)+\frac{2\delta}{\pi}.$$

从而又有 $$\left|\tau_0-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}e^{-t^2(2\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+2\lambda H_n)}\frac{|\sin 2\beta_1 H_n t|}{t}dt\right|\leqslant o(1)+\frac{4\delta}{\pi}.$$

设 $$p_n=2(\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+\lambda H_n),\quad q_n=2\beta_1 H_n.$$

在我们假设下条件(15)满足，故由引理 4

$$\left|\tau_0-\frac{2}{\pi^2}\log\frac{2\beta_1^2H_n^2}{\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+\lambda H_n}-\alpha\right|\leqslant o(1)+\frac{4\delta}{\pi}. \tag{27}$$

现在估计 τ_s, 其中 $s\geqslant1$. 当 $s\geqslant1$ 时我们有

$$\max_{t\in I_s(\delta)}\frac{1}{\sin t}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{t_1}{2}}.$$

所以

$$\tau_s\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{I_s(\delta)}\frac{dt}{\sin t}\leqslant\frac{4\delta}{\pi\sin\frac{t_1}{2}}\quad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ p).\tag{38}$$

再来估计 σ. 显然, 由(27)推知, 对于固定的 δ, 存在正数 $\mu\in(0,\ f(1))$ 使得

$$\sup_{t\in I'}|f(e^{\pm2it})|\leqslant\beta_0-\mu<\beta_0.$$

因此有 $$\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{f(e^{\pm2it})+d_j}{\beta_0+d_j}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{n}\frac{\beta_0-\mu+d_j}{\beta_0+d_j}=\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{\mu}{\beta_0+d_j}\right)\leqslant e^{-\mu H_n}.$$

这样就有

$$\sigma=\frac{2}{\pi}\int_{I'}\frac{|K_n(t)|}{\sin t}dt\leqslant\frac{2}{\pi\sin\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}O(e^{-\mu H_n})dt=o(1).\tag{39}$$

综合(28)、(37)、(38)和(39), 我们得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|L_n(A)-\frac{2}{\pi^2}\log\frac{2\beta_1^2H_n^2}{\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+\lambda H_n}-\alpha\right|\leqslant\frac{4}{\pi}\left(\frac{p}{\sin\frac{t_1}{2}}+1\right)\delta.$$

在上式中令 $\delta\to0$ 便知(4)的第二式成立. 证毕.

§4. Gibbs 现象

关于 Fourier 级数求和过程中的 Gibbs 现象的定义可参见[10]第 95 页. 本节证明下述

定理 2 设非负的 $(f,\ d_n)$ 求和法是正则的. 又设函数 $h(x)$ 是周期 2π 的有界变差函数, x_0 是 $h(x)$ 的第一类间断点. 那么 $h(x)$ 是 Fourier 级数的 $(f,\ d_n)$ 平均在 x_0 处显出 Gibbs 现象.

证 由[10]定理 1 的证明, 我们只要对函数

$$h(x)\sim\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots$$

来证明就够了. 它的导级数是 $\cos x+\cos 2x+\cdots$, 所以 $h(x)$ 的 $(f,\ d_n)$ 平均为

$$\sigma_n(x)=\sigma_n(h,\ x)=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{K_n\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

其中 $K_n(t)$ 的定义见 §3. 前面已经证明, 对于 $K_n(t)$ 有渐近式

$$\begin{aligned}K_n(t)&=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\rho_j}{\beta_0+d_j}\right)\sin 2\beta_1H_nt+O(t)+O(H_nt^3)\\&=e^{-2t^2(\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+\lambda H_n)}\sin 2\beta_1H_nt+O(t)+O(t^3H_n).\end{aligned}$$

又因 $$|1-e^{-2t^2(\beta_1^2\beta_0^{-1}G_n+\lambda H_n)}|=O((G_n+H_n)t^2)=O(t^2H_n).$$

所以
$$\frac{K_n\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sin\beta_1 H_n t}{t}+O(1)+O(tH_n).$$

取 $x_n=\mu/\beta_1 H_n$, 其中 μ 为任意给定的实数, 那么
$$\sigma_n(x_n)=-\frac{x_n}{2}+\int_0^{x_n}\frac{K_n\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\int_0^{\mu}\frac{\sin t}{t}dt+o(1).$$

这表明 $\sigma_n(x)$ 在 $x=0$ 处出现 Gibbs 现象.　证毕.

参 考 文 献

[1] Smith, G., On the (f, d_n)-method of summability, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 506—526.

[2] Sonnenschein, J., Sur les séries divergentes, *Bull. Acad. Royale de Belgiqve*, **35** (1949), 594—601.

[3] Jakimovski, A., Ageneralization of the Lototsky method, *Michigan Math. J.*, **6** (1959), 270—290.

[4] Shoop, R. A., The Lebesgue constants for (f, d_n)-summability, *Pacific J. Math.*, **80**: 1 (1979), 255—263.

[5] Fejér, L., Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *J. für die reine und angew. Math.*, **138** (1910), 22—53.

[6] Lorch, L., The Lebesgue constants for Borel summability, *Duke Math. J.*, **11** (1944), 459—467.

[7] Lorch, L., The Lebesgue constants for $(E, 1)$ summation of Fourier series, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 45—50.

[8] Livingston, A. E., The Lebesgue constants for Euler (E, P) summation of Fourier series, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 309—313.

[9] Lorch, L. and Newman, D. J., On the $[F, d_n]$ summation of Fourer series *Comm. on Pure and Appl. Math.*, **15** (1962) 109—118.

[10] 陈建功, 三角级数论(上册), 上海科学技术出版社(1964).

THE LEBESGUE CONSTANTS AND GIBBS PHENOMENON FOR NON-NEGATIVE (f, d_n)-SUMMABILITY METHOD

SHI XIANLIANG
(*Hangzhou University*)

ABSTRACT

The (f, d_n)-summability method is defined as follows[1,4]: Let f be a nonconstant function, analytic in $|z|<R$ for $R>1$, and let $\{d_n\}$ be a sequence of complex numbers, such that for all n, $d_n \neq -f(1)$. Suppose that the elements of the metrix $A=(a_{nk})$ are given by the relations

$$a_{00}=1, \ a_{0k}=0 \ (k\geqslant 1),$$

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{f(z)+d_j}{f(1)+d_j} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z^k.$$

A sequence $\{S_n\}$ is said to be (f, d_n)-summable to s, if $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \to s$ as $n\to\infty$. The (f, d_n)-summability method is said to be non-negative if for all n, $d_n \geqslant 0$ and the Maclaurin coefficients of f are real and non-negative. The Lebesgue constants for the (f, d_n)-method are defined by

$$L_n(\mathrm{A}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \sin(2k+1)t \right|}{\sin t} dt.$$

In this parer we prove the following two theorems.

Theorem 1. If the (f, d_n)-method is non-negative and regular, then

$$L_n(A) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2} \log H_n + O(1), \text{ if } f(z) = bz^m, \ m\geqslant 1, \ b>0 \text{ and } G_n = O(1); \\ \dfrac{2}{\pi^2} \log \dfrac{2\beta_1^2 H_n^2}{\beta_1^2 \beta_0^{-1} G_n + \lambda H_n} + \alpha + o(1), \text{ other cases,} \end{cases}$$

where

$$\beta_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = f(1), \qquad \beta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k\, b_k = f'(1),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k = \frac{1}{2} f''(1), \qquad \lambda = 2\beta_2 + \beta_1 - \beta_1^2 \beta_0^{-1},$$

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\beta_0 + d_j)}, \qquad G_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{(\beta_0 + d_j)^2},$$

$$\alpha = -\frac{2}{\pi^2} C + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt - \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{t} \left\{ \frac{2}{\pi} - |\sin t| \right\} dt,$$

C is Euler Constant and b_k are the Maclaurin coefficients of f.

Theorem 2. The non-negative and regular (f, d_n)-method preserves the Gibbs phenomenon.