数 学 年 刊
3 (3) 1982

关于Laplace-Beltrami算子的一个积分等式

沈一兵 水乃翔
(杭州大学)

1 设 M 是 $C^r(r>2)$ 级的 n 维黎曼流形. 对于任一点 $P\in M$, 存在包含 P 的坐标邻域 (U,φ), 使映射

$$\varphi: U\to \boldsymbol{R}^n$$

是可微同胚. 设 $(y^1,\cdots,y^n)$ 是 U 上局部坐标, $a_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta$ 是局部坐标系下 M 的黎曼度规*. 矩阵 $(a_{\alpha\beta})$ 是正定的, 故

$$\det|a_{\alpha\beta}|=a>0.$$

M 上的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 在局部坐标下乃是映射

$$\Delta: u(y',\cdots,y^n)\to\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left[\sqrt{a}\,a^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial y^\beta}\right].$$

其中 $(a^{\alpha\beta})$ 是 $(a_{\alpha\beta})$ 的逆矩阵, u 是 M 上的 $C^r(r\geqslant 2)$ 级可微函数. 这是微分几何中一类很重要的微分算子[1].

本文求得了黎曼流形上有关 Laplace-Beltrami 算子的一个积分等式, 并给出一些应用. 这是对不久前张维弢等在欧氏空间中所得结果[2]的推广和一般化.

2 设 $\mathscr{D}$ 是黎曼流形 M 中的一个定向正则区域(见[5]. p. 251), 它的边界 $\partial\mathscr{D}$ 是 M 中的一个 $n-1$ 维黎曼子流形. 对于任一 $P\in\partial\mathscr{D}$, 我们在 P 的邻域中可取 $\partial\mathscr{D}$ 的局部坐标 $(x^1,\cdots,x^{n-1})$, 使得超曲面 $\partial\mathscr{D}$ 在 M 中的安装方程可局部地表示为

$$y^\alpha=y^\alpha(x^1,\cdots,x^{n-1}),\ \alpha=1,\cdots,n.$$

于是, 在局部坐标下, $\partial\mathscr{D}$ 的第一基本形式是

$$I=g_{ij}(x)dx^idx^j=a_{\alpha\beta}y^\alpha_{,i}y^\beta_{,j}dx^idx^j,$$

其中 $y^\alpha_{,i}=\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$. 当然, 矩阵 (g_{ij}) 也是正定的, 故

$$\det|g_{ij}|=g>0.$$

记 $T_p(\partial\mathscr{D})$ 为 $\partial\mathscr{D}$ 在 P 的切空间, $n-1$ 个线性独立的切向量

$$\boldsymbol{A}_i=(y^1_{,i},\cdots,y^n_{,i}),\ i=1,\cdots,n-1,$$

构成 $T_p(\partial\mathscr{D})$ 的基. 它们的向量积是[3]

$$(\boldsymbol{A}_1\times\cdots\times\boldsymbol{A}_{n-1})^\alpha=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix}\delta_1^\alpha & \delta_2^\alpha & \cdots & \delta_n^\alpha\\ a_{\beta 1}y^\beta_{,1} & a_{\beta 2}y^\beta_{,1} & \cdots & a_{\beta n}y^\beta_{,1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{\beta 1}y^\beta_{,n-1} & a_{\beta 2}y^\beta_{,n-1} & \cdots & a_{\beta n}y^\beta_{,n-1}\end{vmatrix},\tag{1}$$

本文1980年6月28日收到.

* 若无特殊说明, 本文中希腊指标的取值范围是 $1\leqq\alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqq n$; 拉丁指标的取值范围是 $1\leqq i,j,k,\cdots\leqq n-1$; 并且重复指标表示求和.

其中 δ^α_β 是 Kronecker 符号. 向量 $\boldsymbol{A}_1\times\cdots\times\boldsymbol{A}_{n-1}$ 正交于 $T_P(\partial\mathscr{D})$, 因而若令 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 是 $\partial\mathscr{D}$ 在 P 的单位法向量, 则它的分量 $\widetilde{\boldsymbol{N}}^\alpha$ 可表为[4]

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}^\alpha=\frac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{A}_1\times\cdots\times\boldsymbol{A}_{n-1})^\alpha, \tag{2}$$

这时, 标架 $\{P;\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{n-1},\widetilde{\boldsymbol{N}}\}$ 的定向与 $\mathscr{D}$ 的定向相一致.

由(1)和(2), 不难验证, $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 的共变分量 $\widetilde{\boldsymbol{N}}_\alpha$ 是

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}_\alpha=a_{\alpha\beta}\widetilde{\boldsymbol{N}}^\beta=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}}(-1)^{n+\alpha}\frac{D(y^1,\cdots\hat{y^\alpha},\cdots,y^n)}{D(x^1,\cdots,x^{n-1})}, \tag{3}$$

其中脱字号"∧"表示该项被取消.

定义 $\partial\mathscr{D}$ 的外法向单位向量 $\boldsymbol{N}$ 为[5]

$$\boldsymbol{N}=(-1)^n\widetilde{\boldsymbol{N}}. \tag{4}$$

于是, 当 n 为偶数时, $\partial\mathscr{D}$ 具有从 $\mathscr{D}$ 诱导的定向; 当 n 为奇数时, 具有相反的定向(见 [5], p. 257).

现设 $\boldsymbol{X}$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的任一向量场, 用 ∇ 表示 M 的黎曼联络, 则 $\boldsymbol{X}$ 的散度为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{X}=\nabla_\alpha\boldsymbol{X}^\alpha=\nabla^\alpha\boldsymbol{X}_\alpha,$$

其中 $\boldsymbol{X}^\alpha$ 和 $\boldsymbol{X}_\alpha$ 分别是 $\boldsymbol{X}$ 的反变分量和共变分量, ∇_α 表示关于联络 ∇ 的共变微分,

$$\nabla^\alpha=a^{\alpha\beta}\nabla_\beta.$$

区域 $\mathscr{D}$ 上的体积元为

$$dV=\sqrt{a}\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n,$$

其中 $\wedge$ 表示外乘积, d 表示外微分.

引理 1 设 $\boldsymbol{N}$ 是区域 $\mathscr{D}\subseteq M$ 的边界 $\partial\mathscr{D}$ 的外法向单位向量场, 则对于 $\mathscr{D}$ 上的任何向量场 $\boldsymbol{X}$ 成立等式

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{X})dV=-d(\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}\rangle ds), \tag{5}$$

其中 $\langle,\rangle$ 表示由 M 的黎曼度规所确定的内积, ds 是边界 $\partial\mathscr{D}$ 的面积元.

证 利用(3)和(4), 由定义直接计算可得

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\boldsymbol{X})dV&=(\nabla_\alpha\boldsymbol{X}^\alpha)dV=\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}(\sqrt{a}\,\boldsymbol{X}^\alpha)dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n\\&=\sum_\alpha d\{(-1)^{\alpha-1}(\sqrt{a}\,\boldsymbol{X}^\alpha)dy^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dy^\alpha}\wedge\cdots\wedge dy^n\}\\&=\sum_\alpha d\left\{(-1)^{\alpha-1}(\sqrt{a}\,\boldsymbol{X}^\alpha)\frac{D(y^1,\cdots,\hat{y}^\alpha,\cdots,y^n)}{D(x^1,\cdots,x^{n-1})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}\right\}\\&=(-1)^{n-1}d\{(a_{\alpha\beta}\boldsymbol{X}^\alpha\widetilde{\boldsymbol{N}}^\beta)\sqrt{g}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}\}\\&=-d\{(a_{\alpha\beta}\boldsymbol{X}^\alpha\boldsymbol{N}^\beta)ds\}=-d(\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}\rangle ds).\end{aligned}$$

证毕.

现在, 我们对 Sobolev 空间概念作一点推广.

设 (U,φ) 是包含点 $P\in\mathscr{D}$ 的一个坐标邻域, 于是映射 $\varphi: U\to\boldsymbol{R}^n$ 使 U 可微同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开子集 $\varphi(U)$. 对于 U 上的可微分函数 u, 若

$$u\circ\varphi^{-1}\in W^m_p(\varphi(U)),\quad(p\geqslant1,\ m\text{ 为非负整数}).$$

其中 $W^m_p(\varphi(U))$ 表示欧氏区域 $\varphi(U)$ 上的 Sobolev 空间[6], 则称 u 属于邻域 U 上的 Sobolev 空间, 记作

$$u\in W_p^m(U).$$

对于区域 $\mathscr{D}$ 上的可微分函数 u，若在每点 $P\in\mathscr{D}$，都有一个邻域 U，$(P\in U)$，使 $u\in W_p^m(U)$，则称 u 属于 $\mathscr{D}$ 上的 Sobolev 空间，记作

$$u\in W_p^m(\mathscr{D}).$$

如果函数 $u\in W_p^m(\mathscr{D})$ 在边界 $\partial\mathscr{D}$ 上恒消失，即

$$u|_{\partial\mathscr{D}}=0, \tag{6}$$

则记为 $$u\in W_{p,0}^m(\mathscr{D}).$$

显然，当 M 为欧氏空间时，这些就是通常的 Sobolev 空间概念(见[6]，p. 406)。

对于 M 上的 $C^r(r>2)$ 级可微函数 $u(y^1, \cdots, y^n)$，引入记号

$$\begin{aligned} u_\alpha&=\nabla_\alpha u, & u_{\alpha\beta}&=\nabla_\alpha u_\beta, \\ u^\alpha&=a^{\alpha\beta}\nabla_\beta u, & u^{\alpha\beta}&=a^{\alpha r}\nabla_r u^\beta. \end{aligned} \tag{7}$$

于是，Laplace-Beltrami 算子可写为

$$\Delta u=\nabla^\alpha u_\alpha=\nabla_\alpha u^\alpha=\nabla^\alpha(\nabla_\alpha u)=\nabla_\alpha(\nabla^\alpha u). \tag{8}$$

利用这些记号，我们有

引理 2　设 $u\in W_{2,0}^2(\mathscr{D})$，则

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{D}} u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}dV=&\int_{\mathscr{D}}(\Delta u)^2dV+\int_{\mathscr{D}}\mathrm{Ric}\,(du,\ du)dV \\ &+\int_{\partial\mathscr{D}}(\Delta u-u_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta)(\nabla_N u)\,ds, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\mathrm{Ric}(du,\ du)$ 表示关于向量场 du 的 M 的 Ricci 曲率；$\boldsymbol{N}$ 是边界 $\partial\mathscr{D}$ 的外法向单位向量场；$\nabla_{\boldsymbol{N}}$ 表示关于 $\boldsymbol{N}$ 的方向导数。

证　用 $C_0^\infty(\mathscr{D})$ 表示定义在 $\mathscr{D}$ 上且在 $\partial\mathscr{D}$ 上恒为零的光滑函数的全体。因为 $C_0^\infty(\mathscr{D})$ 在 $W_{2,0}^2(\mathscr{D})$ 中，依范数 $\|\cdot\|_{W_2^2(\mathscr{D})}$ 的意义是稠密的，故只要对 $u\in C_0^\infty(\mathscr{D})$ 证明引理就可以了。

利用(7)，(8)和 Ricci 恒等式，得

$$(\Delta u)^2=\nabla_\alpha((\Delta u)u^\alpha)-u^\alpha\nabla_\alpha(\Delta u),$$

和

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(u^\beta\nabla^\alpha u_\beta)&=(\nabla_\alpha u^\beta)(\nabla_\beta u^\alpha)+u^\beta\nabla^\alpha\nabla_\alpha u_\beta \\ &=u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}+u^\alpha\nabla_\alpha(\Delta u)-R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta, \end{aligned}$$

其中 $R_{\alpha\beta}$ 表示 M 的 Ricci 张量的分量。

上面两式相加得

$$(\Delta u)^2+\nabla_\alpha(u^\beta\nabla^\alpha u_\beta)=\nabla_\alpha((\Delta u)u^\alpha)+u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}-R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

或者

$$u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}=(\Delta u)^2-\mathrm{div}\boldsymbol{X}+\mathrm{Ric}(du,\ du), \tag{10}$$

其中已令向量场 $\boldsymbol{X}$ 的反变分量为

$$\boldsymbol{X}^\alpha=(\Delta u)u^\alpha-u^\beta\nabla_\beta u^\alpha. \tag{11}$$

对(10)式在 $\mathscr{D}$ 上积分，应用 Stokes 定理(见[5]，p. 257)，由引理1得

$$\int_{\mathscr{D}} u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}dV=\int_{\mathscr{D}}(\Delta u)^2dV+\int_{\mathscr{D}}\mathrm{Ric}\,(du,\ du)\,dV+\int_{\partial\mathscr{D}}\langle\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{N}\rangle ds. \tag{12}$$

另一方面，从(6)得

$$(u_\alpha y^\alpha_{;i})|_{\partial\mathscr{D}}=0,\ i=1,\ \cdots,\ n-1. \tag{13}$$

因此，在 $\partial\mathscr{D}$ 上有

$$u_\alpha=(\nabla_N u)N_\alpha,\ u^\alpha=(\nabla_N u)N^\alpha.$$

代入(11)得

$$X^\alpha=((\varDelta u)N^\alpha-N^\beta\nabla_\beta u^\alpha)(\nabla_N u).$$

这样，在 $\partial\mathscr{D}$ 上成立

$$\langle X,\ N\rangle=(\varDelta u-u_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta)(\nabla_N u). \tag{14}$$

上式代入(12)便得(9)。 证毕.

现在可以建立本文的主要结果：

定理 设 $u\in W^2_{2,0}(\mathscr{D})$，则

$$\int_{\mathscr{D}}u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}dV=\int_{\mathscr{D}}(\varDelta u)^2dV+\int_{\mathscr{D}}\mathrm{Ric}(du,\ du)dV-\int_{\partial\mathscr{D}}(\nabla_N u)^2\Omega ds, \tag{15}$$

其中 Ω 是超曲面 $\partial\mathscr{D}$ 的平均曲率，$\mathrm{Ric}(du,\ du)$ 是关于向量场 du 的 M 的 Ricci 曲率.

证 由引理 2，只要证明在 $\partial\mathscr{D}$ 上成立

$$\varDelta u-u_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta=-\Omega(\nabla_N u). \tag{16}$$

为此，对(13)式进行广义共变微分[3]，易得

$$u_{\alpha\beta}y^\alpha_{;i}y^\beta_{;j}+(\nabla_N u)\Omega_{ij}=0, \tag{17}$$

其中 Ω_{ij} 是 $\partial\mathscr{D}$ 的第二基本张量的分量.

上式与 g^{ij} 缩并，利用关系式

$$a^{\alpha\beta}=g^{ij}y^\alpha_{;i}y^\beta_{;j}+N^\alpha N^\beta,\ \Omega=g^{ij}\Omega_{ij},$$

这里 Ω 是 $\partial\mathscr{D}$ 的平均曲率，便得(16). 证毕.

显然，当 M 为 n 维欧氏空间时，(15)式就是[2]的(16)式.

3 现在指出等式(15)的一些应用.

i) 若 M 是 Einstein 流形，则(15)变为

$$\int_{\mathscr{D}}u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}dV=\int_{\mathscr{D}}(\varDelta u)^2dV+\frac{R}{n}\int_{\mathscr{D}}\langle du,\ du\rangle dV-\int_{\partial\mathscr{D}}(\nabla_N u)^2\Omega ds, \tag{15'}$$

其中 R 是 M 的数量曲率. 当 $R=0$ 时，便得

$$\int_{\mathscr{D}}u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}dV=\int_{\mathscr{D}}(\varDelta u)^2dV-\int_{\partial\mathscr{D}}(\nabla_N u)^2\Omega ds.$$

因此，在数量曲率为 0 的 Einstein 流形上，线性椭圆算子

$$Lu\equiv a^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}+b^\alpha u_\alpha+cu=f$$

的先验估计为

$$\|u\|_{W^2_2(\mathscr{D})}\leqq C(\|u\|_{L_2(\mathscr{D})}+\|f\|_{L_2(\mathscr{D})}), \tag{18}$$

其中 $\|\cdot\|_{W^2_2(\mathscr{D})}$ 表示在 $W^2_2(\mathscr{D})$ 空间的范数，$\|\cdot\|_{L_2(\mathscr{D})}$ 表示在 $L_2(\mathscr{D})$ 空间的范数，而 $L_2(\mathscr{D})$ 是定义在区域 $\mathscr{D}$ 上的平方可积函数空间.

ii) 若 M 是数量曲率非正的 Einstein 流形，而边界 $\partial\mathscr{D}$ 具有非负平均曲率，则由(15′)得不等式

$$\int_{\mathscr{D}}[(\varDelta u)^2-u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}]dV\geqq 0. \tag{19}$$

尤其是当 M 为常曲率 $K\geqq 0$ 的黎曼流形，$\partial\mathscr{D}$ 具有非负平均曲率时，成立不等式(19).

iii) 若在 $\partial\mathscr{D}$ 上有 $\nabla_N u=0$, 并且关于向量场 du 的 M 的 Ricci 曲率为 0, 则成立等式

$$\int_{\mathscr{D}}(\Delta u)^2 dV=\int_{\mathscr{D}} u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}dV. \tag{20}$$

上述(18)～(20)式分别是[2]中(17), (19), (20)的推广.

作者感谢王传芳付教授的有益指教.

参 考 文 献

[1] Yau, S. T., The Role of Partial Differential Equations in Differential Geometry, *Proc. Int. Con. Math.*, (1978), Helsinki.

[2] 张维弢、顾永耕、吉新华, 平均曲率的一个积分等式, 数学学报, **21**(1978), 247—252.

[3] Hsiung, C. C., Lin, I. D. & Mittra, S. S., Integral formulas for closed submanifolds of a Riemannian manifold, *J. Diff. Geo.*, **12**(1977), 133—151.

[4] Hsiung, C. C., Some integral formulas for closed hypersurfaces in Riemannian space, *Pacific J. Math.*, **6**(1956), 291—299.

[5] Boothby, W. M., An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry, 1975.

[6] Yvonne, C. B., Cécile D. M. & Margaret, D. B., Analysis, Manifolds and Physics, (1977).

AN INTEGRAL EQUALITY ON THE LAPLACE-BELTRAMI OPERATOR

SHEN YIBING SHUI NAIXIANG
(Hangzhou University)

ABSTRACT

Let M be an n-dimensional Riemannian manifold of class C^r $(r>2)$, and $\mathscr{D}\subset M$ be a regular oriented domain on M with boundary $\partial\mathscr{D}$, and $W^2_{2,0}(\mathscr{D})$ denote the Sobolev space defined on $\mathscr{D}$ with the property that every $u\in W^2_{2,0}(\mathscr{D})$ vanishes at $\partial\mathscr{D}$, i. e., $u|_{\partial\mathscr{D}}=0$. Let $(a_{\alpha\beta})$ be the symmetric matrix of the positive definite metric of M, and ∇_α denote the operator of the covariant derivative with respect to $a_{\alpha\beta}$. For any $u\in C^\infty(M)$, it is convenient to define

$$\begin{aligned} &u_\alpha=\nabla_\alpha u, \quad u_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha u_\beta, \\ &u^\alpha=a^{\alpha\beta}u_\beta, \quad u^{\alpha\beta}=a^{\alpha\gamma}\nabla_\gamma u^\beta. \end{aligned} \qquad (1\leqq\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqq n).$$

In this paper we establish the following

Theorem. Let $u\in W^2_{2,0}(\mathscr{D})$. Then

$$\int_{\mathscr{D}} u^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}dV=\int_{\mathscr{D}}(\Delta u)^2dV+\int_{\mathscr{D}}\mathrm{Ric}(du,\ du)\,dV-\int_{\partial\mathscr{D}}(\nabla_N u)^2\Omega ds,$$

where Δ is the Laplace-Beltrami operator, $\mathrm{Ric}(du, du)$ is the Ricci curvature of M with respect to the vector field du, ∇_N is the directional derivative in the direction of the exterior normal vector $\boldsymbol{N}$ at $\partial\mathscr{D}$, Ω is the mean curvature of $\partial\mathscr{D}$ in M.