数 学 年 刊
3 (3) 1982

数论函数的逆函数(II)

莫绍揆 沈百英
(南京大学)

前 言

本文是[I]的继续，在[I]中我们较详细地介绍了一个数论函数的左、右逆函数，并对它们的性质作了多方面的刻划，本文则将列出几种左、右逆函数的表示方法，并在§1中列举并严密论证了很多有关强、弱左逆函数的重要性质(其中有一些已在[I]中介绍过).

本文中的论证很大部分是在递归算术中进行. 因此，假定读者熟悉有关递归算术的知识(它们可在文献[2, 3, 4]中找到). 有关推理根据的表述和一些缩写，都可参见[3]，关于函数 $x+y$, xNy, $x\dot{-}y$ 等的一些性质，有些可在[3, 4]中找到，但有些在[3, 4]中还未提及. 为便于下面引证，现拣一些重要的临时加以编号列出如下：

(0.01) $zN(Sy\dot{-}x)N(uN(y\dot{-}x))=zN(Sy\dot{-}x)Nu,$

(0.02) $\varphi(\omega, x)Nx=\varphi(\omega, 0)Nx,$

(0.03) $\varphi(\omega, y)N(x\dot{-}y)=\varphi(\omega, x+(y\dot{-}x))N(x\dot{-}y),$

(0.04) $\varphi(\omega, x)N^2x=\varphi(\omega, SDx)N^2x,$

(0.05) $\varphi(\omega, x)N(x\dot{\dot{-}}y)=\varphi(\omega, y)N(x\dot{\dot{-}}y),$

(0.06′) $\alpha N\gamma=\beta N\gamma\vdash\varphi(\omega, \alpha)N\gamma=\varphi(\omega, \beta)N\gamma$

(0.07′) $\alpha N\beta=0\vdash\varphi(\omega, \alpha)N\beta=\varphi(\omega, 0)N\beta,$

(0.08″) $\left.\begin{matrix}\alpha N\gamma=\beta N\gamma\\ \alpha N^2\gamma=\beta N^2\gamma\end{matrix}\right\}\vdash\alpha=\beta\quad\left(\text{或}\left.\begin{matrix}\alpha N\gamma=0\\ \alpha N^2\gamma=0\end{matrix}\right\}\vdash\alpha=0\right),$

(0.09″) $\left.\begin{matrix}\varphi(\omega, 0)=0\\ \varphi(\omega, Sx)N\varphi(\omega, x)=0\end{matrix}\right\}\overset{x}{\vdash}\varphi(\omega, x)=0,$

(0.10″) $\left.\begin{matrix}\varphi(0)=0\\ \varphi(Sx)\dot{-}\varphi(x)=0\end{matrix}\right\}\overset{x}{\vdash}\varphi(x)=0,$

(0.11″) $\left.\begin{matrix}\varphi(0)=\psi(0),\\ \varphi(Sx)N(\varphi(x)\dot{\dot{-}}\psi(x))=\psi(Sx)N(\varphi(x)\dot{\dot{-}}\psi(x))\end{matrix}\right\}\overset{x}{\vdash}\varphi(x)=\psi(x),$

(0.12″) $\left.\begin{matrix}\varphi(0)=\psi(0)\\ \varphi(Sx)=\psi(Sx)\end{matrix}\right\}\overset{x}{\vdash}\varphi(x)=\psi(x)\quad\left(\text{或}\left.\begin{matrix}\varphi(0)=0\\ \varphi(Sx)=0\end{matrix}\right\}\overset{x}{\vdash}\varphi(x)=0\right),$

(0.13‴) $\left.\begin{matrix}\varphi(0)=\psi(0)\\ \varphi(Sx)N(\varphi(x)\dot{\dot{-}}\psi(x))N\alpha=\psi(Sx)N(\varphi(x)\dot{\dot{-}}\psi(x))N\alpha\\ \varphi(Sx)N^2\alpha=\psi(Sx)N^2\alpha\end{matrix}\right\}\overset{x}{\vdash}\varphi(x)=\psi(x),$

本文1980年7月1日收到.

$$(0.14''')\quad \left.\begin{array}{l}\varphi(0)=\psi(0)\\ \varphi(Sx)N\alpha=\psi(Sx)N\alpha\\ \varphi(Sx)N(\varphi(x)\dot{-}\dot{-}\psi(x))N^2\alpha=\psi(Sx)N(\varphi(x)\dot{-}\dot{-}\psi(x))N^2\alpha\end{array}\right\}\overset{x}{\vdash}\varphi(x)=\psi(x),$$

$$(0.15'')\quad \alpha N\beta=0,\ \beta N\alpha=0\vdash N\alpha=N\beta.$$

§1. 用原始递归式定义

本节证明一个函数 $f(x)$ 的强、弱左逆函数和 f 的强、弱左剩余函数可用一个原始递归式表示. 本节还推导一些有关强、弱左逆函数和左剩余函数的性质. 本节中的证明过程都在递归算术中严密进行.

首先，我们引进

定义 对于一元函数 $f(x)$，称函数 $\Delta_x f(i)=f(Sx)\dot{-}Sf(x)$ 为 $f(x)$ 的拟差分函数，这里 i 为约束空位，而 x 为新添变元. 对于某个项 α, $\Delta_\alpha f(i)=f(S\alpha)\dot{-}Sf(\alpha)$ 称为 $f(x)$ 在 α 处的拟差分.

这样，一个函数 $f(x)$ 为难增函数(见[1])当且仅当 $\Delta_x f(i)$ 为零函数.

引理 1 若 $f(x)$ 为递增函数，则 $x\dot{-}f(x)=0$. 若 $g(x)$ 为初值是 0 的难增函数，则 $g(x)\dot{-}x=0$.

证 暂令 $F(x)=x\dot{-}f(x)$, $G(x)=g(x)\dot{-}x$, 则

$$F(0)=0\dot{-}f(0)=0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}F(Sx)\dot{-}F(x)&=Sx\dot{-}f(Sx)\dot{-}(x\dot{-}f(x))=Sx\dot{-}(x\dot{-}f(x))\dot{-}f(Sx)\\&=Sf(x)\dot{-}(f(x)\dot{-}x)\dot{-}f(Sx)=Sf(x)\dot{-}f(Sx)\dot{-}(f(x)\dot{-}x)\\&=\langle f\text{ 的递增性}\rangle\, 0\dot{-}(f(x)\dot{-}x)=0,\end{aligned} \tag{2}$$

$$F(x)=\langle 0.10'';\ (1)\ (2)\rangle 0,$$

$$G(0)=g(0)\dot{-}0=g(0)=0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}G(Sx)\dot{-}G(x)&=g(Sx)\dot{-}Sx\dot{-}(g(x)\dot{-}x)=g(Sx)\dot{-}(Sx+(g(x)\dot{-}x))\\&=g(Sx)\dot{-}(Sg(x)+(x\dot{-}g(x)))=g(Sx)\dot{-}Sg(x)\dot{-}(x\dot{-}g(x))\\&=\langle g\text{ 的难增性}\rangle 0\dot{-}(x\dot{-}g(x))=0,\end{aligned} \tag{4}$$

$$G(x)=\langle 0.10'';\ (3)\ (4)\rangle 0.$$

引理 2 若 $f(x)$ 为不减函数，则有

(a) $$f(x)\dot{-}f(x+y)=0,$$

(b) $$\alpha\dot{-}\beta=0\vdash f(\alpha)\dot{-}f(\beta)=0.$$

读者自证之.

引理 3 若 $f(x)$ 为递增函数，则有

(a) $$f(Sx)=Sf(x)+\Delta_x f(i),$$

(b) $$N(x\dot{-}y)=N(f(x)\dot{-}f(y)),$$

(c) $$xN(f(x)\dot{-}\dot{-}f(y))=yN(f(x)\dot{-}\dot{-}f(y)).$$

证 (a) 显然，对于(b)有

$$
\begin{aligned}
N^2(x\dot{-}y)N(f(x)\dot{-}f(y)) &= N(Sy\dot{-}x)N(f(x)\dot{-}f(y))\\
&= N(f(x)\dot{-}f(y))N(Sy\dot{-}x)\\
&= \langle 0.03\rangle N[f(Sy+(x\dot{-}Sy))\dot{-}f(y)]N(Sy\dot{-}x)\\
&= N[Sf(y+(x\dot{-}Sy))+\Delta_{y+(x\dot{-}Sy)}f(i)\dot{-}f(y)]N(Sy\dot{-}x)\\
&= N[Sf(y+(x\dot{-}Sy))\dot{-}f(y)]N(\cdots)N(Sy\dot{-}x)\\
&= N^2[f(y)\dot{-}f(y+(x\dot{-}Sy))]N(\cdots)N(Sy\dot{-}x)\\
&= \langle f\text{ 的不减性}\rangle N^2ON(\cdots)N(Sy\dot{-}x)=0, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

由(1)得

$$(x\dot{-}y)N(f(x)\dot{-}f(y))=0, \qquad (2)$$

$$
\begin{aligned}
(f(x)\dot{-}f(y))N(x\dot{-}y) &= \langle 0.03\rangle[f(x)\dot{-}f(x+(y\dot{-}x))]N(x\dot{-}y)\\
&= \langle f\text{ 的不减性}\rangle ON(x\dot{-}y)=0, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$N(x\dot{-}y)=\langle 0.14'';\ (2)\,(3)\rangle N(f(x)\dot{-}f(y)), \qquad (4)$$

对于(c)

$$
\begin{aligned}
xN(f(x)\ddot{-}f(y)) &= xN(f(x)\dot{-}f(y))N(f(y)\dot{-}f(x))\\
&= \langle(4)\rangle xN(x\dot{-}y)N\\
N(y\dot{-}x) &= xN(x\ddot{-}y)=yN(x\ddot{-}y)\\
&= \langle\text{同理}\rangle yN(f(x)\ddot{-}f(y)).
\end{aligned}
$$

于是本引理得证.

定理 1　一个递增函数 $f(x)$ 的弱左逆函数可用原始递归式表示为:

(1.01)　　$f^{(}(0)=0,$

(1.02)　　$f^{(}(Sx)=f^{(}(x)+N(f(Sf^{(}(x))\dot{-}Sx).$

为了要证明由(1.01)和(1.02)定义的 $f^{(}(x)$ 为 $f(x)$ 的弱左逆函数, 必须要证明三个事实:

(一) $f^{(}f(x)=x,$

(二) 当 $f(x)\leqslant y<f(Sx)$ 时 $f^{(}(y)=x$ 或当 $\alpha\dot{-}\Delta_\beta(i)=0$ 时 $f^{(}(f(\beta)+\alpha)=\beta,$

(三) 当 $y\leqslant f(0)$ 时 $f^{(}(y)=0.$

为此,我们要证一系列公式,由于每个公式都表示 $f^{(}(x)$ 的一个性质,因此我们都逐个编号以备引用. 另外,为方便起见,还引入常要用到的几个缩写:

用 $f^{r}(x)$ 表示 $f(Sf^{(}(x))\dot{-}Sx,$

用 $f^{(r}(x)$ 表示 $x\dot{-}ff^{(}(x),$

用 $f^{[r}(x)$ 表示 $ff^{[}(x)\dot{-}x.$

(1.03)　　$\varphi(f^{(}(Sx))Nf^{r}(x)=\varphi(Sf^{(}(x))Nf^{r}(x)$

(φ 为任意一个含有参数的函数, 下同).

证　$f^{(}(Sx)Nf^{r}(x)=\langle 1.02\rangle(Sf^{(}(x))Nf^{r}(x)$, 再使用规则(0.06)即得.

(1.04)　　$\varphi(f^{(}(Sx))N^2f^{r}(x)=\varphi(f^{(}(x))N^2f^{r}(x).$

证　$f^{(}(Sx)N^2f^{r}(x)=\langle 1.02\rangle f^{(}(x)N^2f^{r}(x)$, 再使用规则(0.06)即得.

(1.05)　　$Sx\dot{-}f(Sf^{(}(x))=0.$

证

$$\text{左}(Sx)N\,\text{左}(x)Nf^{r}(x)=\langle 1.03\rangle[SSx\dot{-}f(SSf^{(}(x))]N\,\text{左}(x)Nf^{r}(x)$$
$$=\langle f\text{ 的递增性}\rangle[SSx\dot{-}Sf(Sf^{(}(x))\dot{-}(\cdots)]N\,\text{左}(x)Nf^{r}(x)$$
$$=[\text{左}(x)\dot{-}(\cdots)]N\,\text{左}(x)Nf^{r}(x)$$
$$=\langle 0.02\rangle[0\dot{-}(\cdots)]N\,\text{左}(x)Nf^{r}(x)$$
$$=0N\,\text{左}(x)Nf^{r}(x)=0, \quad (1)$$

$$\text{左}(Sx)N\,\text{左}(x)N^{2}f^{r}(x)=\langle 1.04\rangle[SSx\dot{-}f(Sf^{(}(x))]N\,\text{左}(x)N^{2}f^{r}(x)$$
$$=(\text{左}(x)+Nf^{r}(x))N\,\text{左}(x)N^{2}f^{r}(x)$$
$$=\langle 0.02\rangle(0+0)N\,\text{左}(x)N^{2}f^{r}(x)=0, \quad (2)$$
$$\text{左}(Sx)N\,\text{左}(x)=\langle 0.08'';(1)(2)\rangle 0, \quad (3)$$
$$\text{左}(0)=S0\dot{-}f(S0)=\langle f\text{ 的递增性}\rangle\,0, \quad (4)$$
$$\text{左}(x)=\langle 0.09'';(4)(3)\rangle 0,$$

(1.06) $$f^{(}(x)N(Sx\dot{-}x(1))=0.$$

证

$$\text{左}(Sx)N\,\text{左}(x)=\langle 0.01;1.02\rangle(f^{(}(x)+Nf^{r}(x))Nf^{(}(x)N(SSx\dot{-}f(1))$$
$$=\langle 0.02\rangle(0+N(f(S0)\dot{-}Sx))Nf^{(}(x)N(SSx\dot{-}f(1))$$
$$=N(f(1)\dot{-}Sx)N(SSx\dot{-}f(1))Nf^{(}(x)=0Nf^{(}(x)=0, \quad (1)$$
$$\text{左}(0)=0N(S0\dot{-}f(1))=0, \quad (2)$$
$$\text{左}(x)=\langle 0.09'';(1)(2)\rangle 0.$$

(1.07) $$[f^{(}(f(x)+y)\ddot{-}x]N(y\dot{-}\Delta_{x}f(i))N(f^{(}(f(x))\ddot{-}x)=0.$$

证

$$[f^{(}(f(x)+Sy)\ddot{-}x]N(f^{(}(f(x)+y)\ddot{-}x)$$
$$=\langle 1.02;0.05\rangle[x+N(f(Sx)\dot{-}(Sf(x)+y))\ddot{-}x]N(f^{(}(f(x)+y)\ddot{-}x)$$
$$=N(\Delta_{x}f(i)\dot{-}y)N(f^{(}(f(x)+y)\ddot{-}x), \quad (1)$$
$$\text{左}(Sy)N\,\text{左}(y)=[f^{(}(f(x)+Sy)\ddot{-}x]N(Sy\dot{-}\Delta_{x}f(i))N(f^{(}(x)\ddot{-}x)N,$$
$$N(f^{(}(f(x)+y)\ddot{-}x)=\langle(1)\rangle N(\Delta_{x}f(i)\dot{-}y)N(f^{(}(f(x)+y)\ddot{-}x)N(Sy$$
$$\dot{-}\Delta_{x}f(i))N(f^{(}(f(x))\ddot{-}x)=N(\Delta_{x}f(i)\dot{-}y)N(Sy$$
$$\dot{-}\Delta_{x}f(i))N(\cdots)N(\cdots)=0. \quad (2)$$
$$\text{左}(0)=(f^{(}f(x)\ddot{-}x)N(0\dot{-}\Delta_{x}f(i))N(f^{(}f(x)\ddot{-}x)$$
$$=(f^{(}f(x)\ddot{-}x)N(f^{(}f(x)\ddot{-}x)N(\cdots)=0N(\cdots)=0, \quad (3)$$
$$\text{左}(y)=\langle 0.09'';(3)(2)\rangle 0.$$

(1.08) $$[f^{(}(f(x)+\Delta_{x}f(i))\ddot{-}x]N(f^{(}f(x)\ddot{-}x)=0$$

(由 1.07 中取 y 为 $\Delta_{x}f(i)$ 得).

(1.09) $$f^{(}f(x)=x.$$

证

$$f^{(}(f(x)+\Delta_{x}f(i))N(f^{(}f(x)\ddot{-}x)=\langle 1.08\rangle xN(f^{(}f(x)\ddot{-}x), \quad (1)$$
$$\varphi(f^{(}(f(x)+\Delta_{x}f(i)))N(f^{(}f(x)\ddot{-}x)=\langle 0.06';(1)\rangle\varphi(x)N(f^{(}f(x)\ddot{-}x), \quad (2)$$

$左(Sx)N(左(x)\dot{-}右(x))=f^{\langle}(Sf(x)+\Delta_x f(i))N(f^{\langle}f(x)\dot{-}x)$

$=\langle 1.02;(1)\rangle[x+N(f(Sx)\dot{-}(Sf(x)$

$+\Delta_x f(i)))]N(f^{\langle}f(x)\dot{-}x)=[x+N0]N(左(x)\dot{-}右(x))$

$=(Sx)N(左(x)\dot{-}右(x))=右(Sx)N(左(x)\dot{-}右(x))$.　(3)

$左(0)=f^{\langle}f(0)=\langle f 的递增性\rangle f^{\langle}f(0)N(Sf(0)\dot{-}f(1))=\langle 1.06\rangle 0=右(0)$,　(4)

$左(x)=\langle 0.11'';(3)(4)\rangle 右(x)$.

(1.10)　$f^{\langle}(f(x)+y)N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=xN(y\dot{-}\Delta_x f(i))$　(由(1.07), (1.09)得).

(1.11′)　$\alpha\dot{-}\Delta_\beta f(i)=0\vdash f^{\langle}(f(\beta)+\alpha)=\beta$　(由(1.10)得)

(1.12)　$f^{\langle}(x)N(x\dot{-}f(0))=0$.

证

$左=\langle f 的递增性\rangle f^{\langle}(x)N(Sx\dot{-}Sf(0))N(Sf(0)\dot{-}f(1))$

$=f^{\langle}(x)N(Sx\dot{-}f(1))N(\cdots)N(\cdots)=\langle 1.06\rangle 0$.

由(1.09), (1.11)和(1.12)知$f^{\langle}(x)$为$f(x)$的弱左逆函数,　证毕.

定理 2　一个递增函数$f(x)$的强左逆函数$f^{\llcorner}(x)$可用原始递归式表示为

(1.13)　$f^{\llcorner}(0)=0$,

(1.14)　$f^{\llcorner}(Sx)=f^{\llcorner}(x)+N(f(f^{\llcorner}(x))\dot{-}x)$.

为了证明由1.13和1.14定义的$f^{\llcorner}(x)$为$f(x)$的强左逆函数,亦须证明三个事实:

(一) $f^{\llcorner}f(x)=x$,

(二) 当$f(x)<y\leqslant f(Sx)$时$f^{\llcorner}(y)=Sx$或当$\alpha\dot{-}\Delta_\beta f(i)=0$时$f^{\llcorner}(f(\beta)+S\alpha)=S\beta$,

(三) $y\leqslant f(0)$时$f^{\llcorner}(y)=0$,

为此分下列几步.

(1.15)　$f^{\llcorner}(x)N(x\dot{-}f(0))=0$,

证

$左(Sx)N左(x)=\langle 0.01, 1.14\rangle[f^{\llcorner}(x)+N(f(f^{\llcorner}(x))\dot{-}x)]Nf^{\llcorner}(x)N(Sx\dot{-}f(0))$

$=\langle 0.02\rangle[0+N(f(0)\dot{-}x)]Nf^{\llcorner}(x)N(Sx\dot{-}f(0))$

$=N(f(0)\dot{-}x)N(Sx\dot{-}f(0))Nf^{\llcorner}(x)=0Nf^{\llcorner}(x)=0$,　(1)

$左(0)=0N(0\dot{-}f(0))=0$,　(2)

$左(x)=\langle 0.09'';(1)(2)\rangle 0$,

(1.16)　$f^{\llcorner}(Sx)=f^{\langle}(x)+N(f(0)\dot{-}x)$.

证

$左(Sx)N(左(x)\dot{-}右(x))N(f(0)\dot{-}x)=f^{\llcorner}(SSx)N(f^{\llcorner}(Sx)\dot{-}Sf^{\langle}(x))N(f(0)\dot{-}x)$

$=\langle 1.14;0.05\rangle[Sf^{\langle}(x)+N(f(Sf^{\langle}(x))\dot{-}Sx)]N(f^{\llcorner}(Sx)$

$\dot{-}Sf^{\langle}(x))N(f(0)\dot{-}x)=\langle 1.02\rangle(Sf^{\langle}(Sx))N(f^{\llcorner}(Sx)$

$\dot{-}Sf^{\langle}(x))N(f(0)\dot{-}x)=(f^{\langle}(Sx)+ND0)N(左(x)\dot{-}右(x))N(f(0)$

$\dot{-}x)=\langle 0.02\rangle(f^{\langle}(Sx)+ND(f(0)\dot{-}x))N(左(x)$

$\dot{-}右(x))N(f(0)\dot{-}x)=右(Sx)N(左(x)\dot{-}右(x))N(f(0)\dot{-}x)$,　(1)

$左(Sx)N^2(f(0)\dot{-}x)=左(Sx)N(Sx\dot{-}f(0))=\langle 1.14\rangle[f^{\mathrm{L}}(Sx)$
$+N(ff^{\mathrm{L}}(Sx)\dot{-}Sx)]N(Sx\dot{-}f(0))$
$=\langle 0.07';1.15\rangle[0+N(f(0)\dot{-}Sx)]N(Sx\dot{-}f(0))$
$=\langle 0.07';1.12\rangle[f^{\mathrm{L}}(Sx)+N(f(0)\dot{-}Sx)]N(Sx\dot{-}f(0))$
$=右(Sx)N^2(f(0)\dot{-}x)$, (2)

$左(0)=f^{\mathrm{L}}(S0)=0+N(f(0)\dot{-}0)=Nf(0)=右(0)$, (3)

$左(x)=\langle 0.13'''; (1)(2)(3)\rangle右(x)$.

(1.17) $f^{\mathrm{L}}(f(x)+\Delta_x f(i))=x$ (由1.10得)

(1.18) $f^{\mathrm{L}}(Df(Sx))=x$.

证 $左=f^{\mathrm{L}}(DS(f(x)+\Delta_x f(i)))=f^{\mathrm{L}}(f(x)+\Delta_x f(i))=\langle 1.17\rangle x$.

(1.19) $f^{\mathrm{L}}f(x)=x$.

证

$Nf(Sx)=NS(f(x)+\Delta_x f(i))=0$, (1)

$左(Sx)=左(Sx)N0=\langle(1)\rangle左(Sx)N^2f(Sx)=\langle 0.04\rangle f^{\mathrm{L}}(SDf(Sx))N^2f(Sx)$
$=\langle 1.16\rangle[f^{\mathrm{L}}(Df(Sx))+N(f(0)\dot{-}Df(Sx))]N^2f(Sx)$
$=\langle 1.18\rangle[x+N(Sf(0)\dot{-}SDf(Sx))]N^2f(Sx)$
$=\langle 0.04\rangle[x+N(Sf(0)\dot{-}f(Sx))]N^2f(Sx)$
$=\langle f 的递增性\rangle[x+N0]N^2f(Sx)=(Sx)N^2f(Sx)$
$=\langle(1)\rangle右(Sx)N0=右(Sx)$, (2)

$左(0)=f^{\mathrm{L}}f(0)=(f^{\mathrm{L}}f(0))N(f(0)\dot{-}f(0))=\langle 1.15\rangle 0=右(0)$, (3)

$左(x)=\langle 0.12''; (2)(3)\rangle右(x)$,

(1.20) $f^{\mathrm{L}}(f(x)+Sy)N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=(Sx)N(y\dot{-}\Delta_x f(i))$.

证

$左=\langle 1.16\rangle[f^{\mathrm{L}}(f(x)+y)+N(f(0)\dot{-}(f(x)+y))]N(y\dot{-}\Delta_x f(i))$
$=\langle 0.06';1.10\rangle[x+N(f(0)\dot{-}(f(x)+y))]N(y\dot{-}\Delta_x f(i))$
$=\langle f 的不减性\rangle[x+N0]N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=右$.

(1.21') $\alpha\dot{-}\Delta_\beta f(i)=0\vdash f^{\mathrm{L}}(f(\beta)+S\alpha)=S\beta$ 由(1.20)得.

由(1.15), (1.19)和(1.21)知, $f^{\mathrm{L}}(x)$为$f(x)$的强左逆函数. **证毕.**

推论1 $f^{\mathrm{L}}(x)$和$f^{\mathrm{L}}(x)$都是初值为0的缓增函数, 从而$f^{\mathrm{L}}(x)\leqslant x$, $f^{\mathrm{L}}(x)\leqslant x$.

下面再证一些有关$f^{\mathrm{L}}(x)$和$f^{\mathrm{L}}(x)$的有用性质.

(1.22) $f^{\mathrm{L}}(x)=f^{\mathrm{L}}(Sx)\dot{-}1$ (或$f^{\mathrm{L}}(Dx)=f^{\mathrm{L}}(x)\dot{-}1$).

证

$右N(f(0)\dot{-}x)=\langle 1.16\rangle(f(x)+1\dot{-}1)N(f(0)\dot{-}x)=左N(f(0)\dot{-}x)$, (1)

$左N^2(f(0)\dot{-}x)=左N(Sx\dot{-}f(0))=左N(x\dot{-}f(0))N^2(f(0)\dot{-}x)$
$=\langle 1.12\rangle 0=0\dot{-}N(Sx\dot{-}f(0))$
$=\langle 1.15\rangle f^{\mathrm{L}}(Sx)N(Sx\dot{-}f(0))\dot{-}N(Sx\dot{-}f(0))$
$=右N(Sx\dot{-}f(0))=右N^2(f(0)\dot{-}x)$, (2)

$$左=\langle 0.08''; (1)(2)\rangle 右,$$

(1.23) $$x \dot{-} ff^{c}(x)=0.$$

证

$$左(Sx)N(f(0)\dot{-}x)=(Sx\dot{-}ff^{c}(Sx))N(f(0)\dot{-}x)$$
$$=\langle 1.16\rangle [Sx\dot{-}f(f^{c}(x)+N(f(0)\dot{-}x))]N(f(0)\dot{-}x)$$
$$=\langle 0.02\rangle [Sx\dot{-}f(Sf^{c}(x))]N(f(0)\dot{-}x)$$
$$=\langle 1.05\rangle 0N(f(0)\dot{-}x)=0, \quad (1)$$

$$左(Sx)N^{2}(f(0)\dot{-}x)=\langle 1.16; 0.02\rangle [Sx\dot{-}f(f^{c}(x))]N^{2}(f(0)\dot{-}x)$$
$$=[Sx\dot{-}f(f^{c}(x))]N(x\dot{-}f(0))N^{2}(f(0)\dot{-}x)$$
$$=\langle 0.07'; 1.12\rangle [Sx\dot{-}f(0)]N(x\dot{-}f(0))N^{2}(f(0)\dot{-}x)$$
$$=(Sx\dot{-}f(0))N(Sx\dot{-}f(0))=0, \quad (2)$$
$$左(Sx)=\langle 0.08''; (1)(2)\rangle 0. \quad (3)$$
$$左(0)=0\dot{-}ff^{c}(0)=0, \quad (4)$$
$$左(x)=\langle 0.12''; (3)(4)\rangle 0,$$

(1.24) $$ff^{c}(x)\dot{-}x=f(0)\dot{-}x.$$

证

$$左(Sx)N(左(x)\dot{\dot{-}}右(x))N^{2}f^{r}(x)=\langle 1.04\rangle (ff^{c}(x)\dot{-}(Sx)N(左(x)$$
$$\dot{\dot{-}}右(x))N^{2}f^{r}(x)=D(左(x))N(左(x)\dot{\dot{-}}右(x))N^{2}f^{r}(x)$$
$$=D(右(x))N(左(x)\dot{\dot{-}}右(x))N^{2}f^{r}(x)$$
$$=右(Sx)N(左(x)\dot{\dot{-}}右(x))N^{2}f^{r}(x), \quad (1)$$
$$左(Sx)Nf^{r}(x)=\langle 1.03\rangle [f(Sf^{c}(x))\dot{-}Sx]Nf^{r}(x)=f^{r}(x)Nf^{r}(x)=0, \quad (2)$$
$$f(0)\dot{-}f(Sf^{c}(x))=\langle f\text{ 的不减性}\rangle 0, \quad (3)$$
$$右(Sx)Nf^{r}(x)=(f(0)\dot{-}Sx)N(f(Sf^{c}(x))\dot{-}Sx)=\langle (3)\rangle 0$$
$$=\langle (2)\rangle 左(Sx)Nf^{r}(x), \quad (4)$$
$$左(0)=ff^{c}(0)\dot{-}0=f(0)=右(0), \quad (5)$$
$$左(x)=\langle 0.14'''; (5)(4)(1)\rangle 右(x),$$

(1.25) $$(x\dot{-}ff^{c}(x))N(x\dot{-}f(0))=0.$$

证　$左=\langle 0.07'; 1.12\rangle (x\dot{-}f(0))N(x\dot{-}f(0))=0,$

(1.26) $$f(Df^{c}(x))\dot{-}Dx=f(0)\dot{-}Dx.$$

证

$$左(Sx)=\langle 1.22\rangle f(f^{c}(x))\dot{-}x=\langle 1.24\rangle f(0)\dot{-}x=右(Sx), \quad (1)$$
$$左(0)=f(0)\dot{-}0=右(0), \quad (2)$$
$$左(x)=\langle 0.12''; (1)(2)\rangle 右(x).$$

(1.27) $$f^{c}(x)=f^{c}(Dx)+N^{2}(x\dot{-}f(0)).$$

证

$$左(0)=0=右(0), \quad (1)$$
$$左(Sx)=\langle 1.16\rangle f^{c}(x)+N(f(0)\dot{-}x)=f^{c}(x)+N^{2}(Sx\dot{-}f(0))=右(Sx), \quad (2)$$
$$左(x)=\langle 0.12''; (1)(2)\rangle 右(x),$$

(1.28) $$f^{c}(f(Sx)\dot{-}y)N(y\dot{-}\Delta_{x}f(i))=(Sx)N(y\dot{-}\Delta_{x}f(i)).$$

证

$$\text{左}=f^{\mathrm{L}}(Sf(x)+\Delta_x f(i)\dot{-}y)N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=f^{\mathrm{L}}(Sf(x)$$
$$+(\Delta_x f(i)\dot{-}y))N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=f^{\mathrm{L}}(f(x)+S(\Delta_x f(i)\dot{-}y))N(\Delta_x f(i)$$
$$\dot{-}y\dot{-}\Delta_x f(i))N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=\langle 1.20\rangle(Sx)N(\Delta_x f(i)$$
$$\dot{-}y\dot{-}\Delta_x f(i))N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=(Sx)N0N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=\text{右}.$$

根据(1.05)和(1.23)可得下列

推论 2 定义 $f^{\mathrm{l}}(x)$ 与 $f^{\mathrm{L}}(x)$ 的原始递归式可改为

(1.01) $f^{\mathrm{l}}(0)=0,$

(1.29) $f^{\mathrm{l}}(Sx)=f^{\mathrm{l}}(x)+N(f(Sf^{\mathrm{l}}(x))\dot{-}Sx),$

(1.03) $f^{\mathrm{L}}(0)=0,$

(1.30) $f^{\mathrm{L}}(Sx)=f^{\mathrm{L}}(x)+N(f(f^{\mathrm{L}}(x))\dot{-}x).$

关于弱、强左逆函数之间还有等式

(1.31) $f^{\mathrm{L}}(Sx)N(f(0)\dot{-}x)=(Sf^{\mathrm{l}}(x))N(f(0)\dot{-}x)$ （由 1.16 得）.

关于 $f(x)$ 的弱左剩余与强左剩余函数有

(1.32) $\mathrm{rmlw}_x f(i)=f(0)\dot{-}x+(x\dot{-}ff^{\mathrm{l}}(x))=\begin{cases} f(0)\dot{-}x, & \text{当 } x<f(0)\text{ 时,}\\ x\dot{-}ff^{\mathrm{l}}(x), & \text{当 } x\geqslant f(0)\text{ 时.}\end{cases}$

证 左 $=ff^{\mathrm{l}}(x)\dot{-}x=(ff^{\mathrm{l}}(x)\dot{-}x)+(x\dot{-}ff^{\mathrm{l}}(x))=\langle 1.24\rangle$中（等式的中间部分），再由(1.25)可得后半部分.

(1.33) $\mathrm{rmls}_x f(i)=ff^{\mathrm{L}}(x)\dot{-}x.$

证 左 $=ff^{\mathrm{L}}(x)\dot{-}x=(ff^{\mathrm{L}}(x)\dot{-}x)+(x\dot{-}ff^{\mathrm{L}}(x))=\langle 1.23\rangle$右.

由 (1.32) 知，当 $x\geqslant f(0)$ 时 $f(x)$ 的弱左剩余为 $x\dot{-}ff^{\mathrm{l}}(x)$，即 $f^{\mathrm{lr}}(x)$，因此我们就把 $f^{\mathrm{lr}}(x)$ 称为 $f(x)$ 的拟弱左剩余函数，可记为 $\mathrm{grlw}_x f(i)$. 这样，当 $f(0)=0$ 或 $x\geqslant f(0)$ 时 $\mathrm{grlw}_x f(i)=\mathrm{rmlw}_x f(i)$. 由(1.33)知，$f(x)$ 的强左剩余函数为 $f^{\mathrm{Lr}}(x)$.

定理 3 $f(x)$ 的弱左剩余函数 $\mathrm{rmlw}_x f(i)$ 可由原始递归式定义为

(1.34) $\mathrm{rmlw}_0 f(i)=f(0).$

(1.35) $\mathrm{rmlw}_{Sx} f(i)=[\mathrm{rmlw}_x f(i)+N(f(0)\dot{-}x)\dot{-}N^2(f(0)\dot{-}x)]N^2 f^{\mathrm{r}}(x).$

证 $\mathrm{rmlw}_0 f(i)=\langle 1.32\rangle f(0)\dot{-}0+(0\dot{-}ff^{\mathrm{l}}(0))=f(0),$

$$\begin{aligned}\mathrm{rmlw}_{Sx} f(i)Nf^{\mathrm{r}}(x)&=\langle 1.32;1.03\rangle[f(0)\dot{-}Sx+(Sx\dot{-}f(Sf^{\mathrm{l}}(x)))]Nf^{\mathrm{r}}(x)\\&=\langle 1.05\rangle(f(0)\dot{-}Sx)Nf^{\mathrm{r}}(x)\\&=\langle 1.05\rangle(f(0)\dot{-}Sx)N(Sx\dot{-}f(Sf^{\mathrm{l}}(x)))\\&=\langle 0.05\rangle(f(0)\dot{-}f(Sf^{\mathrm{l}}(x)))N(\cdots)\\&=\langle f\text{ 的不减性}\rangle ON(\cdots)=0,\end{aligned} \quad (1)$$

$$Dy+Ny+x=x+y+Ny\dot{-}N^2y. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rmlw}_{Sx} f(i)N^2f^{\mathrm{r}}(x)&=\langle 1.32;1.04\rangle[D(f(0)\dot{-}x)+(Sx\dot{-}ff^{\mathrm{l}}(x))]N^2f^{\mathrm{r}}(x)\\&=[D(f(0)\dot{-}x)+(x\dot{-}ff^{\mathrm{l}}(x))+N(ff^{\mathrm{l}}(x)\dot{-}x)]N^2f^{\mathrm{r}}(x)\\&=\langle 1.24\rangle[D(f(0)\dot{-}x)+N(f(0)\dot{-}x)\\&\quad+(x\dot{-}ff^{\mathrm{l}}(x))]N^2N^2f^{\mathrm{r}}(x)=\langle(2);1.32\rangle[\mathrm{rmlw}_x f(i)\\&\quad+N(f(0)\dot{-}x)\dot{-}N^2(f(0)\dot{-}x)]N^2f^{\mathrm{r}}(x),\end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathrm{rmlw}_{Sx}f(i)=\mathrm{rmlw}_{Sx}f(i)Nf^{r}(x)+\mathrm{rmlw}_{Sx}f(i)N^2f^r(x)$$
$$=\langle(1);(3)\rangle[\mathrm{rmlw}_x f(i)+N(f(0)\dot{-}x)\dot{-}N^2(f(0)\dot{-}x)]N^2f^r(x).$$

证毕.

定理 4 $f(x)$的拟弱左剩余函数$f^{(r}(x)$可由原始递归式定义为

(1.36) $f^{(r}(0)=0,$

(1.37) $f^{(r}(Sx)=[f^{(r}(x)+N(f(0)\dot{-}x)]N^2f^r(x).$

证 $f^{(r}(0)=0\dot{-}ff^{(}(0)=0,$

$$f^{(r}(Sx)Nf^r(x)=\langle 1.03\rangle(Sx\dot{-}f(Sf^{(}(x)))Nf^r(x)=\langle 1.05\rangle 0, \quad (1)$$

$$f^{(r}(Sx)N^2f^r(x)=\langle 1.04\rangle(Sx\dot{-}ff^{(}(x))N^2f^r(x)$$
$$=[f^{(r}(x)+N(ff^{(}(x)\dot{-}x)]N^2f^r(x)$$
$$=\langle 1.24\rangle[f^{(r}(x)+N(f(0)\dot{-}x)]N^2f^r(x), \quad (2)$$

$$f^{(r}(Sx)=f^{(r}(Sx)Nf^r(x)+f^{(r}(Sx)N^2f^r(x)$$
$$=\langle(1);(2)\rangle[f^{(r}(x)+N(f(0)\dot{-}x)]N^2f^r(x).$$

定理 5 $f(x)$的强左剩余函数$f^{[r}(x)$可由原始递归式定义为

(1.38) $f^{[r}(0)=f(0),$

(1.39) $f^{[r}(Sx)=\Delta_{f^{(}(x)}f(i)Nf^{[r}(x)+D(f^{[r}(x))N^2f^{[r}(x).$

证 $f^{[r}(0)=ff^{[}(0)\dot{-}0=f(0),$

$$f^{[r}(Sx)Nf^{[r}(x)=(ff^{[}(Sx)\dot{-}Sx)N(ff^{[}(x)\dot{-}x)$$
$$=\langle 1.14\rangle(f(Sf^{[}(x))\dot{-}Sx)Nf^{[r}(x)=(Sf(f^{[}(x))$$
$$+\Delta_{f^{(}(x)}f(i)\dot{-}Sx)Nf^{[r}(x)=\langle 1.23\rangle[f^{[r}(x)+\Delta_{f^{(}(x)}f(i)]Nf^{[r}(x)$$
$$=\Delta_{f^{[}(x)}f(i)Nf^{[r}(x), \quad (1)$$

$$f^{[r}(Sx)N^2f^{[r}(x)=\langle 1.14\rangle(ff^{[}(x)\dot{-}Sx)N^2f^{[r}(x)=Df^{[r}(x)N^2f^{[r}(x), \quad (2)$$

$$f^{[r}(Sx)=f^{[r}(Sx)Nf^{[r}(x)+f^{[r}(Sx)N^2f^{[r}(x)$$
$$=\langle(1)(2)\rangle\Delta_{f^{(}(x)}f(i)Nf^{[r}(x)+Df^{[r}(x)N^2f^{[r}(x).$$

(1.40) $f^{(r}(x)\dot{-}\Delta_{f^{(}(x)}f(i)=0.$

证

$$左=x\dot{-}ff^{(}(x)\dot{-}\Delta_{f^{(}(x)}f(i)=x\dot{-}(ff^{(}(x)+\Delta_{f^{(}(x)}f(i))$$
$$=Sx\dot{-}f(Sf^{(}(x))=\langle 1.05\rangle 0.$$

(1.41) $f^{(r}(f(x))=0.$

证 $左=f(x)\dot{-}ff^{(}(f(x))=\langle 1.09\rangle f(x)\dot{-}f(x)=0.$

(1.42) $f^{[r}(f(x))=0.$

证 $左=ff^{[}(f(x))\dot{-}f(x)=\langle 1.19\rangle f(x)\dot{-}f(x)=0.$

(1.43) $f^{(r}(f(x)+y)N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=f^{[r}(f(Sx)\dot{-}y)N(y\dot{-}\Delta_x f(i))$
$$=yN(y\dot{-}\Delta_x f(i)).$$

证

$$左=[f(x)+y\dot{-}ff^{(}(f(x)+y)]N(y\dot{-}\Delta_x f(i))$$
$$=\langle 0.06';1.10\rangle[f(x)+y\dot{-}f(x)]N(y\dot{-}\Delta_x f(i))=yN(y\dot{-}\Delta_x f(i)),$$
$$中=[ff^{[}(f(Sx)\dot{-}y)\dot{-}(f(Sx)\dot{-}y)]N(y\dot{-}\Delta_x f(i))$$
$$=\langle 0.06';1.28\rangle[f(Sx)\dot{-}(f(Sx)\dot{-}y)]N$$

$$N(y \dot{-} \Delta_x f(i)) = [y \dot{-} (y \dot{-} f(Sx))]N(y \dot{-} \Delta_x f(i))$$
$$= [y \dot{-} (y \dot{-} \Delta_x f(i) \dot{-} Sf(x))]N(y \dot{-} \Delta_x f(i))$$
$$= \langle 0.02\rangle [y \dot{-} (0 \dot{-} Sf(x))]N(y \dot{-} \Delta_x f(i)) = yN(y \dot{-} \Delta_x f(i)).$$

(1.44) $$x + f^{\lceil r}(x) = ff^{\lceil}(x).$$

证　左 $= x + (ff^{\lceil}(x) \dot{-} x) = ff^{\lceil}(x) + (x \dot{-} ff^{\lceil}(x)) = \langle 1.23\rangle ff^{\lceil}(x) + 0 =$ 右.

(1.45) $$f^{r}(x)N(f(0) \dot{-} x) = f^{\lceil r}(Sx)N(f(0) \dot{-} x).$$

证

右 $= (ff^{\lceil}(Sx) \dot{-} Sx)N(f(0) \dot{-} x)$

$= \langle 1.31\rangle [f(Sf^{(}(x)) \dot{-} Sx]N(f(0) \dot{-} x) =$ 左.

(1.46) $$[f^{r}(x) \dot{-} \Delta_{f^{(}(x)} f(i)]N(f(0) \dot{-} x) = 0.$$

证

左 $= [f(Sf^{(}(x)) \dot{-} Sx \dot{-} \Delta_{f^{(}(x)} f(i)]N(f(0) \dot{-} x)$

$= [f(f^{(}(x)) + S\Delta_{f^{(}(x)} f(i) \dot{-} (x + S\Delta_{f^{(}(x)} f(i))]N(f(0) \dot{-} x)$

$= (f(f^{(}(x)) \dot{-} x)N(f(0) \dot{-} x) = \langle 1.24\rangle (f(0) \dot{-} x)N(f(0) \dot{-} x) = 0.$

(1.47) $$[f^{\lceil r}(x) \dot{-} f(0)]N(x \dot{-} f(0)) = 0.$$

证

左 $= (ff^{\lceil}(x) \dot{-} x \dot{-} f(0))N(x \dot{-} f(0))$

$= \langle 1.15\rangle (f(0) \dot{-} x \dot{-} f(0))N(x \dot{-} f(0)) = 0N(x \dot{-} f(0)) = 0.$

(1.48) $$[f^{\lceil r}(x) \dot{-} \Delta_{f^{(}(Dx)} f(i)]N^2(x \dot{-} f(0)) = 0.$$

证

左 $(Sx) = [f^{\lceil r}(Sx) \dot{-} \Delta_{f^{(}(x)} f(i)]N(f(0) \dot{-} x)$

$= \langle 1.45\rangle [f^{r}(x) \dot{-} \Delta_{f^{(}(x)} f(i)]N(f(0) \dot{-} x) = \langle 1.46\rangle 0,$

左 $(0) = 0.$

(1.49) $$[f^{\lceil r}(x) \dot{-} \Delta_{Df^{(}(x)} f(i)]N(f(0) \dot{-} Dx) = 0.$$

证　左 $(0) = [f(0) \dot{-} (\cdots)]N(f(0)) = [0 \dot{-} (\cdots)]Nf(0) = 0Nf(0) = 0,$

左 $(Sx) = \langle 1.22\rangle [f^{\lceil r}(Sx) \dot{-} \Delta_{f^{(}(x)} f(i)]N(f(0) \dot{-} x) = \langle 1.45; 1.46\rangle 0.$

(1.50) $$f^{(r}(x)N(x \dot{-} f(0)) = 0.$$

证　左 $= (x \dot{-} ff^{(}(x))N(x \dot{-} f(0)) = \langle 1.25\rangle 0.$

(1.51) $$f^{r}(f(x) + \Delta_x f(i)) = 0.$$

证

左 $= f(Sf^{(}(f(x) + \Delta_x f(i))) \dot{-} S(f(x) + \Delta_x f(i))$

$= \langle 1.17\rangle f(Sx) \dot{-} f(Sx) = 0.$

(1.52) $$f^{r}(f(x)) = \Delta_x f(i).$$

证　左 $= f(Sf^{(}(f(x))) \dot{-} Sf(x) = f(Sx) \dot{-} Sf(x) = \Delta_x f(i).$

(1.53) $$ff^{(}(x) + f^{(r}(x) = x + (f(0) \dot{-} x) = f(0)N^2(f(0) \dot{-} x) + xN(f(0) \dot{-} x).$$

证　左 $= ff^{(}(x) + (x \dot{-} ff^{(}(x)) = x + (ff^{(}(x) \dot{-} x) = \langle 1.24\rangle x + (f(0) \dot{-} x) =$ 中,

中 $=$ 中 $N(f(0) \dot{-} x) +$ 中 $N^2(f(0) \dot{-} x) = xN(f(0) \dot{-} x) + (f(0)$

$+ (x \dot{-} f(0)))N(x \dot{-} f(0))N^2(f(0) \dot{-} x) = xN(f(0) \dot{-} x)$

$+ f(0)N^2(f(0) \dot{-} x) =$ 右.

(1.54) $$ff^{\lfloor}(x)Nf^{\lfloor r}(x)=xNf^{\lfloor r}(x),$$

证 右 $=(x+f^{\lfloor r}(x))Nf^{\lfloor r}(x)=\langle 1.44\rangle ff^{\lfloor}(x)Nf^{\lfloor r}(x)=$ 左.

(1.55) $$(f(0)\dot{-}x)Nf^{\lfloor r}(x)=0.$$

证 左 $=\langle 1.54\rangle(f(0)\dot{-}ff^{\lfloor}(x))Nf^{\lfloor r}(x)=\langle$ f 的不减性 $\rangle 0Nf^{\lfloor r}(x)=0.$

(1.56) $$f^{(r}(x)Nf^{\lfloor r}(x)=0.$$

证 左 $=\langle 1.54\rangle f^{(r}(ff^{\lfloor}(x))Nf^{\lfloor r}(x)=\langle 1.41\rangle 0Nf^{\lfloor r}(x)=0.$

(1.57) $$ff^{(}(x)Nf^{\lfloor r}(x)=xNf^{\lfloor r}(x).$$

证 右 $=\langle 1.55;1.56\rangle[x+(f(0)\dot{-}x)\dot{-}f^{(r}(x)]Nf^{\lfloor r}(x)=\langle 1.53\rangle$ 左.

(1.58) $ff^{(}(x)Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=xNf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)$ (由(1.53)得).

(1.59) $f^{\lfloor r}(x)Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=0.$

证 左 $=\langle 1.58\rangle f^{\lfloor r}(ff^{(}(x))Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=\langle 1.42\rangle 0.$

(1.60) $ff^{\lfloor}(x)Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=xNf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x).$

证 左 $=\langle 1.44\rangle(x+f^{\lfloor r}(x))Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=\langle 1.59\rangle$ 右.

(1.61) $$f^{(}(x)Nf^{\lfloor r}(x)=f^{\lfloor}(x)Nf^{\lfloor r}(x).$$

证 左 $=\langle 1.54\rangle f^{(}(ff^{\lfloor}(x))Nf^{\lfloor r}(x)=f^{\lfloor}(x)Nf^{\lfloor r}(x)=$ 右

(1.62) $$f^{\lfloor r}(x)Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=0.$$

证 左 $=\langle 1.58\rangle f^{\lfloor r}(ff^{(}(x))Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=\langle 1.42\rangle 0.$

(1.63) $$Nf^{(r}(x)N^2f^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=0.$$

证

$$\text{左}=\langle 1.62\rangle Nf^{(r}(x)N^2f^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x)N[f^{\lfloor r}(x)Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)]$$
$$=Nf^{(r}(x)N^2f^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x)Nf^{\lfloor r}(x)=0.$$

(1.64) $f^{\lfloor}(x)N^2f^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=Sf^{(}(x)N^2f^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x).$

证

$$\text{左}=\langle 1.53\rangle f^{\lfloor}(ff^{(}(x)+f^{(r}(x))N^2f^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x)$$
$$=\langle 1.63\rangle f^{\lfloor}(f(f^{(}(x))+SDf^{(r}(x))N^2f^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x)$$
$$=\langle 1.21';1.40\rangle Sf^{(}(x)N^2f^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=\text{右}.$$

(1.65) $$Nf^{\lfloor r}(x)N(f(0)\dot{-}x)=Nf^{(r}(x)N(f(0)\dot{-}x)$$
(由(0.15″), (1.56), (1.62)得).

定义 对两个一元函数 $A(x)$ 和 $B(x)$ 若有性质

$$A(Sx)N^2A(Sx)=(SA(x))N^2A(Sx),\ B(Sx)N^2A(Sx)=B(x)N^2A(Sx),$$

则称 $A(x)$ 对 $B(x)$ 是上平梯的.

若有性质 $A(Sx)N^2A(x)=(DA(x))N^2A(x)$, $B(Sx)N^2A(x)=B(x)N^2A(x)$, 则称 $A(x)$ 对 $B(x)$ 是下平梯的.

定理 6 拟弱左剩余函数 $f^{(r}(x)$ 对弱左逆函数 $f^{(}(x)$ 是上平梯的; 强左剩余函数 $f^{\lfloor r}(x)$ 对强左逆函数 $f^{\lfloor}(x)$ 是下平梯的.

为了证此定理, 须证下列几个等式.

(1.66) $$f^{(}(Sx)N^2f^{(r}(Sx)=f^{(}(x)N^2f^{(r}(Sx).$$

证

左 $=\langle 1.29\rangle [f^{(}(x)+N(f(Sf^{(}(x))\dot{-}Sx)]N^2f^{(r}(Sx)$

$=f^{(}(x)N^2f^{(r}(Sx)+N^2f^{(r}(Sx)N(f(Sf^{(}(x))\dot{-}Sx)$

$=\langle 0.05\rangle$ 右 $+N^2f^{(r}(f(Sf^{(}(x)))N(\cdots)=\langle 1.41\rangle$ 右 $+N^2 0N(\cdots)=$ 右 $+0=$ 右.

(1.67) $$f^{(r}(Sx)N^2f^{(r}(Sx)=Sf^{(r}(x)N^2f^{(r}(Sx).$$

证

左 $=SDf^{(r}(Sx)N^2f^{(r}(Sx)=SD(Sx\dot{-}ff^{(}(Sx))N^2f^{(r}(Sx)$

$=S(x\dot{-}ff^{(}(Sx))N^2f^{(r}(Sx)=\langle 1.66\rangle S(x\dot{-}ff^{(}(x))N^2f^{(r}(Sx)=$ 右,

(1.68) $$f^{[r}(Sx)N^2f^{[r}(x)=Df^{[r}(x)N^2f^{[r}(x)\quad (由 (1.39) 得).$$

(1.69) $$f^{[}(Sx)N^2f^{[r}(x)=f^{[}(x)N^2f^{[r}(x).$$

证

左 $=\langle 1.30\rangle [f^{[}(x)+N(ff^{[}(x)\dot{-}x)]N^2f^{[r}(x)=$ 右 $+N^2f^{[r}(x)N(ff^{[}(x)\dot{-}x)$

$=\langle 0.05\rangle$ 右 $+N^2f^{[r}(ff^{[}(x))N(\cdots)=\langle 1.42\rangle$ 右 $+N^2 0N(\cdots)=$ 右.

证毕.

推论 3 设 $\varphi(x)$ 为任意一元函数, 则 $f^{(r}(x)$ 对 $\varphi(f^{(}(x))$ 是上平梯的; $f^{[r}(x)$ 对 $\varphi(f^{[}(x))$ 是下平梯的.

注 函数对的平梯性在组成具平梯性的配对函数组时有极大的作用. 对此我们将在另文详论.

直到现今, 我们还不知道怎样利用穷尽不减函数 g 及原始递归式来定义 g 的强、弱右逆函数. 要想由 g 定义其强、弱右逆函数须找到 g 的代表数列 $\{d_x\}$ (参见[1])才成, 但有了 $\{d_x\}$ 后, 即可使用显式定义 $g^{\rangle}$ 与 $g^{]}$, 不必借助原始递归式了, 怎样由 $g(t)$ 的显式表示或它的原始递归式定义来找 g 的代表数列还是一个问题.

§2. 用摹状式定义

本节证明一个函数 $f(x)$ 的强、弱左逆函数可用一个受限摹状式表示, 但对强、弱右逆函数只能由不受限的摹状式给出.

受限摹状算子作用于函数 $f(x)$ 得到函数 $g(x)=\mathrm{rti}_x f(i)$, 它被定义为

$$g(x)=\mathrm{rti}_x f(i)=\begin{cases} x \text{ 以下的 } f(t) \text{ 的最小零点}, & \text{若 } f(t) \text{ 在 } x \text{ 以下有零点}, \\ x, & \text{此外}. \end{cases}$$

在递归算术中, $g(x)$ 由原始递归式给出为

$$\begin{cases} g(0)=\mathrm{rti}_0 f(i)=0, \\ g(Sx)=\mathrm{rti}_{Sx} f(i)=g(x)+N^2 f(g(x)). \end{cases}$$

定理 7 一个递增函数 $f(x)$ 的弱左逆函数可用受限摹状式表示为

(2.1) $$f^{(}(x)=\mathrm{rti}_x[Sx\dot{-}f(Si)].$$

证 首先因 $f(x)$ 的递增性可得 $Sx\dot{-}f(Sx)=0$. 这就说明在 x 以下必存在使 $Sx\dot{-}f(St)=0$ 的最小 t 值.

其次, 由 §1 中 (1.05) 知, $Sx\dot{-}f(Sf^{(}(x))=0$, 且 $f^{(}(x)\leqslant x$, 故知 $f^{(}(x)$ 为 x 以下的 $Sx\dot{-}f(St)$ 的 t 零点. 剩下的须表明 $f^{(}(x)$ 亦是最小 t 零点:

当 $x<f(1)$ 时，由(1.06)知，$f^{(}(x)=0$，故 $f^{(}(x)$ 必是最小 t 零点.

当 $x\geqslant f(1)$ 时，$f^{(}(x)\neq 0$，$SDf^{(}(x)=f^{(}(x)$，$N(Sx\dot{-}f(SDf^{(}(x))=N^2(f(f^{(}(x))\dot{-}x)$ $=\langle 1.24\rangle 0$；即 $Sx\dot{-}f(SDf^{(}(x))>0$，这就表明 $Df^{(}(x)$ 不是 $Sx\dot{-}f(St)$ 的 t 零点，再按 $f(x)$ 的递增性知所有比 $f^{(}(x)$ 小的值都不是 t 零点，亦即 $f^{(}(x)$ 为最小 t 零点. 证毕.

注　当 $f(0)=0$ 时，$f^{(}(x)$ 亦可用受限摹状算子 rta_x (见[5]p. 77)表示为

$$f^{(}(x)=\mathrm{rta}_x[f(i)\dot{-}x],$$

相比之下，它没有 2.1 式优越.

定理 8　一个递增函数 $f(x)$ 的强左逆函数可用受限摹状式表示为

$$f^{[}(x)=\mathrm{rti}_x[x\dot{-}f(i)]. \tag{2.2}$$

证　首先由 $f(x)$ 的递增性有 $x\dot{-}f(x)=0$，即在 x 以下有 $x\dot{-}f(t)$ 的 t 零点. 再由§1 公式(1.23)知，$f^{[}(x)$ 为 x 以下的 $x\dot{-}f(t)$ 的一个 t 零点. 剩下的要表明 $f^{[}(x)$ 为最小 t 零点：

当 $x\leqslant f(0)$ 时，由§1. (1.15)知 $f^{[}(x)=0$，故 $f^{[}(x)$ 必是最小 t 零点；

当 $x>f(0)$ 时，有 $x>0$ 即 $x=SDx$，且 $f(0)\dot{-}Dx=0$，$N(x\dot{-}f(Df^{[}(x)))=N(SDx\dot{-}f(Df^{[}(x)))=N^2(fDf^{[}(x))\dot{-}Dx)=\langle 1.26\rangle N^2 0=0$，即 $x\dot{-}f(Df^{[}(x))>0$. 从而知 $f^{[}(x)$ 为 $x\dot{-}f(t)$ 的最小 t 零点(按 $f(x)$ 的递增性).　　证毕.

按 $g(x)$ 的右逆函数的定义，有

定理 9　函数 $g(x)$ 的弱、强右逆函数分别可用摹状式表示为

$$g^{)}(x)=\mathrm{rti}[g(i)\ddot{-}x] \tag{2.3}$$

$$g^{]}(x)=\mathrm{rta}[g(i)\ddot{-}x]\ (\text{亦可}=\mathrm{rta}[g(i)\dot{-}x]). \tag{2.4}$$

注　在(2.3)的表示中，g 的最小 t 根的上界未必予先给出，故想直接用受限摹状式表示似乎是不成的，这是右逆与左逆的又一不同点. 另外由(2.3)式可知，[5]p. 77 中介绍的求逆算子 $\mathrm{inv}_x f(i)$ 实为本文中的求弱右逆算子.

参 考 文 献

[1] 莫绍揆、沈百英，数论算子的逆函数(I)，*数学年刊*，**3**:1(1982)，103—114.

[2] Goodstein, R. L., Recursive number theory, Amsterdam, 1957.

[3] 莫绍揆、沈百英，原始递归算术的新系统(I)，*数学进展* **9**(1966)，1—26.

[4] 莫绍揆、沈百英，原始递归算术的新系统(II)，*数学进展* **9**(1966)，103—148.

[5] 莫绍揆，*递归函数论*，上海科学技术出版社，1965 年.

[6] Peter, R.，*递归函数论*，莫绍揆译，科学出版社，1958 年.

INVERSE FUNCTIONS OF NUMBER-THEORETIC FUNCTIONS (II)

MO SHAOKUI SHEN BAIYING

(*Nanjing University*)

ABSTRACT

In the paper[1] we defined the weak and the strong left inverse functions of f and the weak and the strong right inverse functions of f. In the present paper we shall give their definitions by means of the primitive recursion or the limited minimal or maximal operator.

The principal results are:

1. The weak left inverse function $f^{\langle}$ of a strict increasing function f may be defined by the primitive recursion

$$\begin{cases} f^{\langle}(0)=0, \\ f^{\langle}(Sx)=f^{\langle}(x)+N(f(Sf^{\langle}(x))\dot{-}Sx). \end{cases}$$

2. The strong left inverse function $f^{\llcorner}$ of a strict increasing function f may by defined by the primitive recursion

$$f^{\llcorner}(0)=0,$$
$$f^{\llcorner}(Sx)=f^{\llcorner}(x)+N(f(f^{\llcorner}(x))\dot{-}x).$$

For any function $f(x)$, we define

$$g(0)=\mathrm{rti}_0 f(i)=0,$$
$$g(Sx)=\mathrm{rti}_{Sx} f(i)=g(x)+N^2 f(g(x)).$$

We may prove that when $f(i)$ is zero for some i from 0 to x, $\mathrm{rti}_x f(i)$ is the least value of i, between 0 and x, for which $f(i)$ is zero, but if none of $f(0)$, $f(1)$, $\cdots$, $f(x)$ is zero then $\mathrm{rti}_x f(i)=x$.

3. The weak left inverse function $f^{\langle}$ of a strict increasing function f may be defined also by the limited minimal operator rti_x

$$f^{\langle}(x)=\mathrm{rti}_x(Sx\dot{-}f(Si)).$$

4. The strong left inverse function $f^{\llcorner}$ of a strict increasing function f may be defiined also by the limited minimal operator rti_x

$$f^{\llcorner}(x)=\mathrm{rti}_x(x\dot{-}f(i)).$$

5. The weak (strong) right inverse function $f^{\rangle}$ ($f^{\rfloor}$) of an exhaustive slow increasing function g may be defined by the minimal (maximal) operator

$$g^{\rangle}(x)=\mathrm{rti}(g(i)\dot{-}\dot{-}x),$$
$$(g^{\rfloor}(x)=\mathrm{rta}(g(i)\dot{-}\dot{-}x) \text{ or } g^{\rfloor}(x)=\mathrm{rta}(g(i)\dot{-}x)),$$

here $\mathrm{rti}\, f(i)$, $\mathrm{rta}\, f(i)$ is the least value (the greatest value) of i for which $f(i)$ vanishes.