数学年刊
3 (3) 1982

四元整数环上的二维射影线性群的自同构

万哲先 杨劲根
(中国科学院系统科学研究所)

§1. 引 言

设 K 是有理四元数体，它含有子环

$$R=\{(a+bi+cj+dk)/2 \mid a,\ b,\ c,\ d \text{ 同为奇数或同为偶数}\},$$

R 是个非交换欧几里得环. 由[1]知道，R 的乘法可逆元集合是

$$U=\{\pm1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k,\ (\pm1\pm i\pm j\pm k)/2\},$$

而 U 的换位子群是

$$H=\{\pm1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}.$$

以下简记 $\lambda=\frac{1}{2}(1+i+j+k)$.

记 $GL_2(R)$ 为 R 上的二维一般线性群，即所有 R 上 2×2 可逆矩阵的全体所组成之群，$SL_2(R)$ 定义为 $GL_2(R)\cap SL_2(K)$，E 为 $GL_2(R)$ 中由形为 $\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}$ $(s,t\in R)$ 的全体元素所生成的子群，由[1]知道 $GL_2(R)=SL_2(R)$，E 是 $GL_2(R)$ 的换位子群，而 $GL_2(R)/E$ 是 3 阶循环群.

显然 $GL_2(R)$ 和 E 的中心都是 $\{\pm I\}$，其中 $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. 把 $GL_2(R)/\{\pm I\}$ 和 $E/\{\pm I\}$ 分别记作 $PGL_2(R)$ 和 PE，其中的元素记作 $\overline{A}$，$A\in GL_2(R)$. 当然 PE 是 $PGL_2(R)$ 的换位子群.

本文目的是确定 $PGL_2(R)$ 和 PE 的自同构群.

§2. 射影对合

设 $A\in GL_2(R)$. 如果 $A^2=I$ 而 $A\neq\pm I$ 则 $\overline{A}$ 叫做第一类射影对合. 如果 $A^2=-I$，则 $\overline{A}$ 叫做第二类射影对合。根据 [1]，第一类射影对合在 $PGL_2(R)$ 中与 $\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$，$\overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}}$，$\overline{\begin{pmatrix}1&1+i\\0&-1\end{pmatrix}}$ 中之一共轭.

引理 1 设 $\overline{A}$ 是第二类射影对合，则 A 在 $GL_2(R)$ 中与下面两个元素之一共轭

本文 1980 年 8 月 6 日收到.

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & j \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

证 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 由 $A^2=-I$ 得

$$a^2+bc+1=0,\ ab+bd=0,\ ca+dc=0,\ cb+d^2+1=0, \tag{1}$$

那么 $N(a)=N(d)$, 其中 $N(a)$, $N(d)$ 分别为 a 和 d 的范数. 事实上, 要是 $c\neq 0$, 由(1)中第三个等式即知 $N(a)=N(d)$; 要是 $c=0$, 则 $N(a)=N(d)=1$.

可设 A 是它所在的共轭类中使 $N(a)$ 最小的一个元. 要是 $bc=0$, 可以不妨设 $c=0$ (否则用 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 作用一下就可化归到此情形), 此时 $a^2=-1=d^2$, a, $d\in\{\pm i, \pm j, \pm k\}$. 由 $\lambda i\lambda^{-1}=j$, $\lambda j\lambda^{-1}=k$, $\lambda k\lambda^{-1}=i$ 知道总可以找到 s, $t\in U$ 使 $sas^{-1}=i$, $tdt^{-1}=i$, 于是

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} i & f \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

由 $\begin{pmatrix} i & f \\ 0 & i \end{pmatrix}^2=-I$ 得 $if+fi=0$, 于是 $f=mj+nk$, 其中 m, $n\in\boldsymbol{Z}$. 由于

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & f \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} i & f+ti-it \\ & i \end{pmatrix}$$

及 $(a+bi+cj+dk)i-i(a+bi+cj+dk)=2dj-2ck$ 知道, 总可以找到 $t\in R$ 使得 $f+ti-it=0$ 或 j, 所以 A 与引理中所写的两个矩阵之一共轭. 下面我们假定 b, c 皆不等于 0.

我们有 $N(a)=N(d)>\min(N(b), N(c))$. 否则, 比方说 $N(a)\geqslant N(c)$, 那么由欧几里得除法, 存在 q, $r\in R$ 使得 $a=qc+r$, $N(r)<N(c)$, 于是

$$\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

这与 $N(a)$ 的最小性矛盾.

设 $a^2=a_1+a_2i+a_3j+a_4k$, 由(1)式得

$$N(bc)=N(a^2+1)=(a_1+1)^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$$
$$=2a_1+1+\sum_{i=1}^{4}a_i^2=N(a^2)+2a_1+1,$$

另一方面,
$$N(bc)\geqslant(N(a)+1)^2=N(a^2)+2N(a)+1.$$
从而推得
$$a_1\geqslant N(a)=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2},$$
于是 $a_2=a_3=a_4=0$, 并且 $N(b)=N(c)=N(a)+1$.

由于 $N(a)=a_1=a^2$, 知道 a 是有理整数, 由 (1) 得 $d=-a$, $bc=cb=-(a^2+1)$. 又因 $N(b)=N(c)$, 故 $b=-\bar{c}$. 设 $c=c_1+c_2i+c_3j+c_4k$, 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -c_1+c_2i+c_3j+c_4k \\ c_1+c_2i+c_3j+c_4k & -a \end{pmatrix},$$

其中 $c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2=a^2+1$.

$|c_1|$, $|c_2|$, $|c_3|$, $|c_4|$ 中至少有一个比 $\frac{|a|}{2}$ 大, 为简单起见, 不妨设 $|c_1|>\frac{|a|}{2}$, (其它情形可同样证明). 于是可取 $\varepsilon=1$ 或 -1 使 $|a+\varepsilon c_1|<|c_1|$. 由于 c_1 是整数或半整数, 因而 $|a+\varepsilon c_1|\leqslant|c_1|-1$. 注意

$$\begin{pmatrix}1&\varepsilon\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-c_1+c_2i+c_3j+c_4k\\c_1+c_2i+c_3j+c_4k&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\varepsilon\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

的左上角元素 $\beta=(a+\varepsilon c_1)+\varepsilon c_2i+\varepsilon c_3j+\varepsilon c_4k$, 因而

$$N(\beta)=(a+\varepsilon c_1)^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2\leqslant(|c_1|-1)^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2$$
$$=a^2+2-2|c_1|<a^2+2-|a|=N(a)+2-|a|.$$

根据 $N(a)$ 的最小性知道 $|a|<2$, 即 a 只能取 0 和 ±1.

当 $a=0$ 时, $bc=-1$,

$$\begin{pmatrix}0&-ib\\k&jb\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b\\c&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-ib\\k&jb\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}i&j\\0&i\end{pmatrix}.$$

当 $a=1$ 时, $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\bar{c}\\c&-1\end{pmatrix}$, 其中 $N(c)=2$. 于是 c 只能是形为 $\pm x\pm y$ (其中 $x\neq y$, $x, y\in\{1, i, j, k\}$) 的数. 可以在 U 中找到 s 使 $-2s-scs=\bar{c}=0$; 事实上, 当 $c=1\pm i$ 时可取 $s=-1$, 当 $c=-(1\pm i)$ 时可取 $s=1$, 当 $c=i\pm j$ 时可取 $s=i$, 当 $c=-(i\pm j)$ 时可取 $s=-i$, 其它情形不难一一验证. 那么

$$\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\bar{c}\\c&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1+sc&-2s-scs-\bar{c}\\c&-cs-1\end{pmatrix}$$

的右上角元素化为 0, 于是可以化归前面讨论过的情形.

当 $a=-1$ 时, 用 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 作用于 A 即化归 $a=1$ 的情形.　　证毕.

§3. 自　同　构

以下用符号 C_{PE} 表示在 PE 中求中心化子, D 表示求换位子群的运算

引理 2　$$D^2C_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}\right)=\left\{\overline{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}}\Big|a, d\in H\right\}.$$

证　首先有

$$C_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}\right)=\left\{\overline{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix}0&b\\c&0\end{pmatrix}}\Big|a, b, c, d\in U; ad, bc\in H\right\}. \qquad (2)$$

于是　$$DC_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}\right)\subseteq\left\{\overline{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}}\Big|a, d\in U, ad\in H\right\}.$$

因为 U 的换位子群是 H, 所以

$$D^2C_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}\right)\subseteq\left\{\overline{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}}\Big|a, d\in H\right\}.$$

另一方面

$$\overline{\begin{pmatrix}0&\lambda-1\\\lambda&0\end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix}0&\lambda-1\\\lambda&0\end{pmatrix}}^{-1}\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}^{-1}=\overline{\begin{pmatrix}0&\lambda-1\\\lambda&0\end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix}0&1-\lambda\\-\lambda&0\end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}$$
$$=\overline{\begin{pmatrix}\lambda-1&0\\0&\lambda\end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix}1-\lambda&0\\0&-\lambda\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}}\in DC_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}\right),$$

又显然
$$\left\{\overline{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}}\,\middle|\, a,\ d\in H\right\}\subseteq DC_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\right),$$
所以
$$\overline{\begin{pmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}}^{-1}\overline{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}}^{-1}\in D^2C_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\right),\ \forall a,\ d\in H.$$
根据 $i\lambda i^{-1}\lambda^{-1}=-k$, $j\lambda j^{-1}\lambda^{-1}=-i$, $iji^{-1}j^{-1}=-1$ 知
$$\overline{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}}\in D^2C_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\right),\ \forall a,\ d\in H.$$

证毕.

设 $\Lambda\in \mathrm{Aut}PE$, 由于 $\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & x\\ 0 & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i & x\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$对任何自然数 n 都成立, 根据引理1就知道对任意第二类射影对合 $\overline{B}$, $C_{PE}(\overline{B})$ 中总含有无穷多个元素. 另一方面, 从[1]中不难看出
$$\left|C_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\right)\right|=24\times 8,$$
$$\left|C_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\right)\right|<24\times 8,$$
$$\left|C_{PE}\left(\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1+i\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\right)\right|=24\times 8.$$
因此 Λ 一定把第一类射影对合变为第一类射影对合, 而且 $\Lambda\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$ 在 $PGL_2(R)$ 中与 $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$共轭, 或者说 Λ 把 $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$在 $PGL_2(R)$ 中所属的共轭类变到自身之上, 由于 $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$, 所以 $\Lambda\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}=\overline{P}\,\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}\,\overline{P}^{-1}$, 其中 $P\in GL_2(R)$. 因此不妨设
$$\Lambda\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}.$$
设此时 $\Lambda\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}}$, 那么
$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \tag{3}$$
$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^2=I. \tag{4}$$
如果(3)式取正号, 则 $a=d$, $b=c$. 由 (4) 式得 $a^2+b^2=1$, $ab+ba=0$, 从而 $(a+b)^2=1$, $(a-b)^2=1$, 于是
$$\begin{cases} a+b=\pm 1,\\ a-b=\pm 1.\end{cases}$$
推得 $a=0$ 或 $b=0$, 此二种情形都不可能发生. 所以(3)式一定取负号, 此时根据[1]中完

全类似的讨论知道$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 即$\varLambda\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$. 因此可设

$$\varLambda\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}},\ \varLambda\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}. \tag{5}$$

根据 $C_{PE}\left\{\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}},\ \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\right\}=\left\{\overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \pm x \end{pmatrix}},\ \overline{\begin{pmatrix} 0 & x \\ \pm x & 0 \end{pmatrix}}\,\middle|\, x=1,\ i,\ j,\ k\right\}$
及引理 2 知道 $\varLambda$ 把集合

$$\left\{\overline{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}},\ \overline{\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \pm j \end{pmatrix}},\ \overline{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \pm k \end{pmatrix}}\right\}$$

变到自身.

设 $$\varLambda\overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} \alpha(x) & 0 \\ 0 & \varepsilon(x)\alpha(x) \end{pmatrix}}(x=i,\ j,\ k),$$

其中 α 是 $\{i,\ j,\ k\}$ 的一个置换, $\varepsilon(x)=\pm1$. 根据$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$知 $\varepsilon(i)\varepsilon(j)=\varepsilon(k)$, 因此 $\varepsilon(i)$, $\varepsilon(j)$, $\varepsilon(k)$ 或全为 1 或有一个 1 其余两个是 -1. 我们来证明后一种情形不能发生. 为叙述简单, 不妨设 $\varepsilon(i)=\varepsilon(j)=-1$, $\varepsilon(k)=1$. 再施加一个$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha(k) \end{pmatrix}$所引起的内自同构之后便可以设 $\varLambda$ 保持

$$\left\{\overline{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}},\overline{\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}},\overline{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}\right\}$$

不变, 注意此时 $\varLambda$ 保持$\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$不动, 但把$\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$变到$\overline{\begin{pmatrix} 0 & \alpha(k) \\ -\alpha(k) & 0 \end{pmatrix}}$. 易见

$$C_{PE}\left\{\overline{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}},\ \overline{\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}},\ \overline{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}\right\}$$
$$=PGL_2(\boldsymbol{Z})\cup\overline{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}PGL_2(\boldsymbol{Z})\cup\overline{\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}}PGL_2(\boldsymbol{Z})\cup\overline{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}PGL_2(\boldsymbol{Z}), \tag{6}$$

它在 $\varLambda$ 之下不变. 现在定义映射

$$\varLambda^{\#}:\ PGL_2(\boldsymbol{Z})\to PGL_2(\boldsymbol{Z})$$

如下: 对任意 $\overline{A}\in PGL_2(\boldsymbol{Z})$, 要是 $\varLambda(\overline{A})=\overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}\overline{B}$, 其中 $x\in\{1,i,j,k\}$, $\overline{B}\in PGL_2(\boldsymbol{Z})$, 则规定 $\varLambda^{\#}(\overline{A})=\overline{B}$. 设 $\varLambda(\overline{A}_1)=\overline{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}}\overline{B}_1$, $\varLambda(\overline{A}_2)=\overline{\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}}\overline{B}_2$, 则 $\varLambda(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\overline{\begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & x_1x_2 \end{pmatrix}}\overline{B}_1\overline{B}_2$, 于是 $\varLambda^{\#}(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\overline{B}_1\overline{B}_2=\varLambda^{\#}(\overline{A}_1)\varLambda^{\#}(\overline{A}_2)$, 于是 $\varLambda^{\#}$ 是同态映射. 显然 $\ker\varLambda^{\#}=\left\{\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\right\}$. 我们再来证 $\varLambda^{\#}$ 是满的. 对任何 $\overline{B}\in PGL_2(\boldsymbol{Z})$, 总有 $x\in\{1,\ i,\ j,\ k\}$ 及 $\overline{A}\in PGL_2(\boldsymbol{Z})$ 使 $\varLambda\left(\overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}\overline{A}\right)=\overline{B}$, 于是 $\varLambda(\overline{A})=\overline{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}}\overline{B}$, 其中 $y\in\{1,\ i,\ j,\ k\}$, 即 $\varLambda^{\#}(\overline{A})=\overline{B}$, 于是 $\varLambda^{\#}$ 是满的. 因此 $\varLambda^{\#}$ 是 $PGL_2(\boldsymbol{Z})$ 的一个自同构. 由 [2] 的一

个结果, $\varDelta^{\#}$ 或者是内自同构, 或者是内自同构与外自同构

$$\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}\to\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}},\quad \overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}\to\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}},\quad \overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}\to\overline{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}}$$

之积. 但在现在的情形下, $\varDelta\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$, 它与 $\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}$ 在 $PGL_2(R)$ 中不共轭, 所以 $\varDelta^{\#}$ 只能是内自同构. 但 $\varDelta\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}0&\alpha(k)\\-\alpha(k)&0\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}\alpha(k)&0\\0&\alpha(k)\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}$, 于是 $\varDelta^{\#}\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}$, 因而存在 $\overline{A}\in PGL_2(\boldsymbol{Z})$ 使 $\overline{A}\,\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}\,\overline{A}^{-1}=\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}$, 这是不可能的. 于是 $\varepsilon(i)$, $\varepsilon(j)$, $\varepsilon(k)$ 只能全都是 1, 也就是说 $\varDelta$ 满足(5)式并使(6)不变.

设 $\varDelta\left(\overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}\right)=\overline{\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}}\overline{B}$, 其中 $x\in\{1, i, j, k\}$, $\overline{B}\in PGL_2(\boldsymbol{Z})$. 根据 $\left[\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}\right]^3=\overline{I}$ 知

$$\left[\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}}\overline{B}\right]^3=\overline{\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}}\left[\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}\overline{B}\right]^3=\overline{I},$$

于是 $x=1$, 即 $\varDelta\overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}\in PGL_2(\boldsymbol{Z})$. 于是 $\varDelta$ 把 $PGL_2(\boldsymbol{Z})$ 映到自身之中. 由(6)式容易看出 $\varDelta$ 对 $PGL_2(\boldsymbol{Z})$ 的限制 $\varDelta|_{PGL_2(\boldsymbol{Z})}$ 是 $PGL_2(\boldsymbol{Z})$ 的自同构. 根据与前面同样的理由 $\left(\text{即}\overline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}\text{不与}\overline{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}\text{共轭}\right)$ 知道 $\varDelta|_{PGL_2(\boldsymbol{Z})}$ 是内自同构, 因此我们现在就可以假设 $\varDelta$ 保持 $PGL_2(\boldsymbol{Z})$ 中每个元素不动.

设 $\varDelta\overline{\begin{pmatrix}1&i\\0&1\end{pmatrix}}=\overline{C}$, 由 (2) 及 $\overline{\begin{pmatrix}1&i\\0&1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}i&0\\0&1\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}i&0\\0&1\end{pmatrix}}^{-1}$ 得 $\overline{C}=\overline{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}}^{-1}$ 或 $\overline{C}=\overline{\begin{pmatrix}0&b\\c&0\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}0&b\\c&0\end{pmatrix}}^{-1}$. 在后一情形下, 推出 $\overline{C}=\overline{\begin{pmatrix}1&0\\\mu&1\end{pmatrix}}$, 其中 $\mu\neq0$, 这与 $\overline{C}$ 与 $\overline{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}$ 交换矛盾, 于是可写 $\overline{C}=\overline{\begin{pmatrix}1&\sigma(i)\\0&1\end{pmatrix}}$, 即

$$\varDelta\overline{\begin{pmatrix}1&i\\0&1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}1&\sigma(i)\\0&1\end{pmatrix}}.$$

同样可写

$$\varDelta\overline{\begin{pmatrix}1&j\\0&1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}1&\sigma(j)\\0&1\end{pmatrix}},\quad \varDelta\overline{\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}1&\sigma(k)\\0&1\end{pmatrix}}.$$

由 $\overline{\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}$ 得

$$\varDelta\overline{\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}1&0\\\sigma(x)&1\end{pmatrix}}\text{对 } x=i,\ j,\ k \text{ 均成立.}$$

再将 $\varDelta$ 作用在等式

$$\overline{\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix}1&i\\0&1\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}1&0\\i&1\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}\overline{\begin{pmatrix}1&0\\i&1\end{pmatrix}}$$

的两边，再注意 Λ 保持 $\left\{\overline{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}\right\}$ 不变，得

$$\overline{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} 1 & \sigma(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(i) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(i) & 1 \end{pmatrix}}.$$

乘开后比较系数知 $\sigma(i)^2=-1$, $a=\pm\sigma(i)$. 于是

$$\Lambda\overline{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} \sigma(i) & 0 \\ 0 & \sigma(i) \end{pmatrix}}, \quad \sigma(i)^2=-1.$$

同理

$$\Lambda\overline{\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} \sigma(j) & 0 \\ 0 & \sigma(j) \end{pmatrix}}, \quad \Lambda\overline{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} \sigma(k) & 0 \\ 0 & \sigma(k) \end{pmatrix}}$$

及 $\sigma(j)^2=\sigma(k)^2=-1$. 再根据 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 便知

$$\sigma(i)\sigma(j)=\pm\sigma(k). \tag{7}$$

当(7)式取正号时，由[1]中引理 2 知，σ 可扩充成为 R 的自同构．由

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\left[\Lambda\overline{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\right]^2=\overline{\begin{pmatrix} 1 & 2\sigma(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

由 $\Lambda\overline{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ 与 $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & \sigma(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & \sigma(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & \sigma(k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ 交换推出 $\Lambda\overline{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$，而 $2\mu=2\sigma(\lambda)$，于是

$$\Lambda\overline{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}=\overline{\begin{pmatrix} 1 & \sigma(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

当[7]式取负号时，由[1]中引理 3 知道 σ 可以扩充成 R 的一个反自同构．于是

$$\Lambda(\overline{A})=\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}(\overline{A'})^{-1}\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{-1} \tag{8}$$

对 $\overline{A}=\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ 均成立．根据上面同样的推理可知(8)式对 $\overline{A}=\overline{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ 也成立．

由于 $\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ 是 PE 的一组生成元，于是得到

定理 1　PE 的任何一个自同构必为下面两种形式之一

$$\overline{A}\mapsto \overline{P}\overline{A^{\sigma}}\overline{P}^{-1},$$
$$\overline{A}\mapsto \overline{P}(\overline{A^{\tau'}})^{-1}\overline{P}^{-1},$$

其中 $\overline{P}\in PGL_2(R)$，σ 是 R 的一个自同构，τ 是 R 的一个反自同构，A^{σ} 和 A^{τ} 分别表示 σ 和 τ 作用在 A 的每个系数上，A' 表示 A 的转置．

仿照[1]最后一段的论证得

定理 2　$PGL_2(R)$ 的自同构也是如定理 1 中给出的形式．

参考文献

[1] 万哲先、杨劲根,四元整数环上二维线性群的自同构,数学年刊,2:3(1981),387—397.
[2] Dyer, J. L., Automorphism Sequences of Integer Unimodular Groups, *Illinois J. of Math.* **22**(1978), 1—30.

AUTOMORPHISMS OF THE PROJECTIVE QUATERNION UNIMODULAR GROUP OF TWO DIMENSIONS

WAN ZHEXIAN YANG JINGEN

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Let K be the skew field of rational quaternions. Let $R=\{(a+bi+cj+dk)/2 \mid a, b, c, d\in \boldsymbol{Z}$ and have the same parity$\}$, where $\boldsymbol{Z}$ denotes the ring of rational integers. R is a subring of K and K is the quotient skew field of R. R is usually called the ring of quaternion integers.

Let E denote the subgroup of $GL_2(R)$ generated by all elements of the form $\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$ $(s, t\in R)$. Denote the factor groups of $GL_2(R)$ and E moduls their centers, both of which are $\{\pm I\}$, by $PGL_2(R)$ and PE respectively. PE is the commutator subgroup of $PGL_2(R)$.

Theorem. Any automorphism of $PGL_2(R)$ (or PE) is one of the following two standard forms

$$\overline{A}\mapsto \overline{P}\overline{A^\sigma}\overline{P}^{-1},$$
$$\overline{A}\mapsto \overline{P}\,(\overline{A^{\tau'}})^{-1}\overline{P}^{-1},$$

where $\overline{P}\in PGL_2(R)$, σ is an automorphism of R and τ is an anti-automorphism of R.