数 学 年 刊
3 (5) 1982

一阶非线性椭圆型偏微分方程组的两类边值问题

方爱农
(湖南大学)

前 言

本文研究一阶非线性椭圆型方程组——方程组(A)

$$w_{\bar z}=g(z,\ w,\ w_z), \tag{A.1}$$

$$|g(z,\ w,\ w_z^1)-g(z,\ w,\ w_z^2)|\leqslant q_0|w_z^1-w_z^2|,\ q_0=\text{常数}<1 \tag{A.2}$$

的下列两类典型的边值问题:

问题P(或H) 在单位圆G内寻求方程组(A)的解$w(z)$,而且在$|z|=1$上满足边值条件

$$\mathrm{Re}[z^{-n}w_z]=0,\ n=\text{整数}, \tag{1}$$

$$(\text{或}\ \mathrm{Re}[z^{-n}w]=0,\ n=\text{整数}). \tag{2}$$

较早,在$w,\ w_z\in W_p^{(1)}(p>2)$的函数类中,Данилюк, И. И. 研究过问题P[1,2]. 最近,我们在$W_p^{(1)}$中研究过问题P[3,1),2)]. 本文§1,在$C_\alpha^1(\bar G)$中,在一定的条件下研究了问题P. 关于问题H,当$g(z,\ w,\ 0)=g_0(z,\ w)+g_1(z,\ w)w+g_2(z,\ w)\bar w$,或$g(z,\ w,\ 0)$关于$w$具有其他类似于线性性质的假设下,已有一系列研究[3-6],当$g(z,\ w,\ 0)$关于w具有指数大于1的非线性时,虽然方程组(A)的某些函数论问题已有一些研究[7],但是其问题H则未见有过研究. 本文§2,研究了$g(z,\ w,\ 0)$关于w具有指数大于1甚至整函数级增长的问题H. 为了突出非线性,我们只限于研究单连通区域上的问题H. 实际上,本文研究问题H的方法也适用于多连通区域上的问题H[3,3)],只是加于方程组(A)的条件稍强一些.

§1. $C_\alpha^1(\bar G)$中的问题P

在文[3, 1]中,我们构造了问题P的算子

$$T_n(\omega,\ z)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\left[\dfrac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}-\int_0^z\dfrac{t^{2n+2}}{(1-\bar\zeta t)^2}\,dt\,\overline{\omega(\zeta)}\right]d\sigma_\zeta,\ |z|<1,\ n\geqslant-1,\\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\left\{\dfrac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}-\int_0^z\left[\dfrac{(-2n-1)\bar\zeta^{-2n-2}}{1-\bar\zeta t}+\dfrac{\bar\zeta^{-2n-1}t}{(1-\bar\zeta t)^2}\right]dt\overline{\omega(\zeta)}\right\}d\sigma_\zeta,\\ \qquad |z|<1,\ n\leqslant-2,\end{cases} \tag{3}$$

本文1979年10月29日收到,1981年11月6日收到修改稿.

证明了它是 $L_p(p>2)$ 到 $C_\alpha(\overline{G})$, $\alpha=\dfrac{p-2}{p}$ 的全连续算子, 广义导数

$$\omega=\partial_{\bar{z}}T_n(\omega, z),\ S_n(\omega, z)=\partial_z T_n(\omega, z),\ \omega\in L_p \tag{4}$$

存在, 并且 $S_n(\omega, z)$ 是 $C_\alpha(\overline{G})$ 到自身的线性有界算子; 然后建立了问题 P 在 $C^1_\alpha(\overline{G})$ 中解的表示定理

$$w(z)=T_n(\omega, z)+\Phi(z), \tag{5}$$

$$\Phi(z)=\begin{cases} C_0+iC_1, \text{ 当 } n\leqslant -1 \text{ 时}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(\frac{1}{k+1}z^{k+1}-\frac{1}{2n-k+1}z^{2n-k+1}\right)+ib_k\left(\frac{z^{k+1}}{k+1}+\frac{z^{2n-k+1}}{2n-k+1}\right) \\ \qquad\qquad +\dfrac{iC_0z^{n+1}}{n+1}+C_1+iC_2, \text{ 当 } n\geqslant 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 c_0、c_1、c_2、a_k 与 b_k 为任意实常数. 现在我们利用它们来研究问题 P 在 $C^1_\alpha(\overline{G})$ 中解的存在唯一性定理.

假设 $\overline{G}_w$ 与 $\overline{G}_t$ 分别表示闭圆盘: $|w|\leqslant G_1$ 与 $|t|\leqslant G_2$, 而 $B(h)$ 表示 $C_\alpha(\overline{G})$ 中的闭球: $C_\alpha(\omega, \overline{G})\leqslant h$, 其中 G_1, G_2 与 h 为常数. 为了使非线性方程组(A)的问题 P 的研究较为自然和简单明确, 我们先研究拟线性方程组

$$w_{\bar{z}}=Q_1(z, w)w_z+Q_2(z, w)\overline{w}_z+Q_3(z, w),\ \sum_{j=1}^{2}|Q_j(z, w)|\leqslant Q_0=\text{常数}<1 \tag{6}$$

的问题 P. 然后扼要的叙述非线性方程组(A)的问题 P. 另外, 为了使条件与定理的叙述比较简洁, 我们恒设解的表示式(5)中的 $\Phi(z)\equiv 0$. 显然, 这是不失一般性的.

条件 A_1 (i) 设 $Q_j(z, w)$ 定义在双圆柱 $\overline{G}\times\overline{G}_w$ 上, 对于任何 (z, w), $(z_1, w_1)\in\overline{G}\times\overline{G}_w$, 适合条件

$$|Q_j(z, w)-Q_j(z_1, w_1)|\leqslant Q_{j0}|z-z_1|^\alpha+Q_{j1}|w-w_1|, \tag{7}$$

而且, 若 $w(z)$, $w_1(z)\in C_\alpha(\overline{G})$, 则 $Q_j(z, w)$ 适合 $C_\alpha(\overline{G})$ 中的 Lipschitz 条件

$$C_\alpha[Q_j(z, w)-Q_j(z, w_1), \overline{G}]\leqslant Q_{j2}C_\alpha(w-w_1, \overline{G}), \tag{8}$$

其中 Q_{ji} 为常数, $j=1, 2, 3$, $i=0, 1, 2$; (ii) 设 Q_0, Q_{ji} 和 $\max\limits_{\overline{G}}|Q_3(z, 0)|$ 适当小, 使得有正常数 Q 适合下列条件: (1) 若 $\omega\in B(Q)$, 则 $T_n(\omega, z)\in G_w$. (2) 下列不等式成立

$$\begin{aligned} Q_1&=\Big[Q_0+\sum_{j=1}^{2}(Q_{j0}+Q_{j1}M_1Q)\Big]M_2<1, \\ Q_2&=Q_{30}+\max_{z\in\overline{G}}|Q_3(z, 0)|+Q_{31}M_1Q\leqslant(1-Q_1)Q, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 M_1 与 M_2 是下列不等式中的常数

$$C_\alpha(T_n(\omega, z), \overline{G})\leqslant M_1C_\alpha(\omega, \overline{G}),\ C_\alpha(S_n(\omega, z), \overline{G})\leqslant M_2C_\alpha(\omega, \overline{G}).$$

Tutschke, W. 曾采用过类似于(8)式的条件[8].

定理 1.1 在条件 A_1 之下, 方程组 (6) 存在形为 $w=T_n(\omega, z)$ 的解, 而且当 $n\geqslant -1$ 时, 它适合边界条件(1); 当 $n\leqslant -2$ 时, 它适合变态的边界条件

$$\operatorname{Re}[z^{-n}w_z]=-\operatorname{Re}\Big[\sum_{k=1}^{-2n-2}\frac{k}{\pi}\iint_G \overline{\omega}\zeta^{k-1}d\sigma_\zeta z^{n+k+1}\Big],\ |z|=1, \tag{10}$$

其中 ω 是下列非线性积分方程在 $B(Q)$ 中的解

$$\omega=Q_1(z, T_n(\omega, z))S_n(\omega, z)+Q_2(z, T_n(\omega, z))\overline{S_n(\omega, z)}+Q_3(z, T_n(\omega, z)). \tag{11}$$

证　引进泛函方程

$$\beta(z)=G_\omega(\beta,\ z)+Q_3(z,\ T_n(\omega,\ z)),\tag{12}$$

其中　$G_\omega(\beta,\ z)=Q_1(z,\ T_n(\omega,\ z))S_n(\beta,\ z)+Q_2(z,\ T_n(\omega,\ z))\overline{S_n(\beta,\ z)}$.

首先建立其解 $\beta(z)$的先验估计．由于算子 $T_n(\omega,\ z)$与 $S_n(\omega,\ z)$ 分别为 $C_\alpha(\overline{G})$ 到 $C^1_\alpha(\overline{G})$ 与自身的线性连续算子，根据条件 A_1，对于任意给定的 $\omega\in B(Q)$都有

$$Q_j(z,\ T_n(\omega,\ z))\in C_\alpha(\overline{G}),\quad j=1,\ 2,\ 3,$$

而且 $G_\omega(\beta,\ z)$是 $C_\alpha(\overline{G})$到自身的算子．所以对于泛函方程(12)的任一解 $\beta(z)$，我们得到

$$C_\alpha(G_\omega(\beta,\ z),\ \overline{G})\leqslant\sum_{j=1}^{2}C_\alpha(Q_j(z,\ T_n(\omega,\ z)),\ \overline{G})C_\alpha(S_n(\beta,\ z),\ \overline{G}).\tag{13}$$

根据(7)式，对于任一 $\omega\in B(Q)$都有

$$\begin{aligned}&|Q_j(z,\ T_n(\omega,\ z))-Q_j(z_1,\ T_n(\omega,\ z_1))|\\&\quad\leqslant[Q_{j0}+Q_{j1}H(T_n(\omega,\ z),\ \overline{G})]\,|z-z_1|^\alpha,\quad j=1,\ 2,\ 3,\\&|Q_3(z,\ T_n(\omega,\ z))|\leqslant Q_{31}|T_n(\omega,\ z)|+\max_{z\in\overline{G}}|Q_3(z,\ 0)|,\end{aligned}$$

其中 $H(T_n(\omega,\ z),\ \overline{G})$为 $T_n(\omega,\ z)$的 Hölder 系数．因此由(9)式不难得到

$$\begin{aligned}&C_\alpha(Q_3(z,\ T_n(\omega,\ z)),\ \overline{G})\leqslant Q_2\leqslant(1-Q_1)Q,\\&C_\alpha(G_\omega(\beta,\ z),\ \overline{G})\leqslant Q_1C_\alpha(\beta,\ \overline{G}).\end{aligned}\tag{14}$$

这样一来，我们便得到方程(12)的解的先验估计

$$C_\alpha(\beta,\ \overline{G})\leqslant Q.\tag{15}$$

其次，泛函方程(12)是 β 的线性方程，因此从(14)式的第二式得到，对于任一给定的 $\omega\in B(Q)$，算子 $G_\omega(\beta,\ z)$ 是 Banach 空间 $C_\alpha(\overline{G})$ 中的一个压缩算子．这样一来，利用 Banach 不动点原理，泛函方程(12)在 $C_\alpha(\overline{G})$中有唯一解 $\beta(z)$．根据先验估计(15)，$\beta(z)\in B(Q)$．于是，泛函方程(12)定义了一个 $B(Q)$到自身的算子

$$\beta(z)=\beta(\omega,\ z).\tag{16}$$

第三，我们证明算子(16)是全连续的．对于任意的 ω 与 $\omega_1\in B(Q)$，记

$$\beta_1(z)=\beta(\omega_1,\ z),$$

注意到

$$\begin{aligned}&Q_j(z,\ T_n(\omega,\ z))S_n(\beta,\ z)-Q_j(z,\ T_n(\omega_1,\ z))S_n(\beta_1,\ z)\\&\quad=Q_j(z,\ T_n(\omega,\ z))S_n(\beta-\beta_1,\ z)+[Q_j(z,\ T_n(\omega,\ z))-Q_j(z,\ T_n(\omega_1,\ z))]S_n(\beta_1,\ z),\end{aligned}$$

由方程(12)，类似于(13)式得到

$$\begin{aligned}C_\alpha(\beta-\beta_1,\ \overline{G})\leqslant&\sum_{j=1}^{2}C_\alpha(Q_j(z,\ T_n(\omega,\ z)),\ \overline{G})C_\alpha(S_n(\beta-\beta_1,\ z),\ \overline{G})\\&+\sum_{j=1}^{2}C_\alpha(Q_j(z,\ T_n(\omega,\ z))-Q_j(z,\ T_n(\omega_1,\ z)),\ \overline{G})C_\alpha(S_n(\beta_1,\ z),\ \overline{G})\\&+C_\alpha(Q_3(z,\ T_n(\omega,\ z))-Q_3(z,\ T_n(\omega_1,\ z)),\ \overline{G}).\end{aligned}$$

于是，由(8)与(15)式，类同于(15)式可以证明

$$C_\alpha(\beta-\beta_1,\ \overline{G})\leqslant\frac{1}{1-Q_1}\Big(\sum_{j=1}^{2}Q_{j2}M_2Q+Q_{32}\Big)C_\alpha(T_n(\omega,\ z)-T_n(\omega_1,\ z),\ \overline{G}).\tag{17}$$

由于 $T_n(\omega,\ z)$是 $C_\alpha(\overline{G})$到自身的全连续算子．因此由(17)式得到算子(16)是 $B(Q)$ 到自身的全连续算子。事实上，假设 $\{\omega_m\}$，$\omega\in C_\alpha(\overline{G})$，则我们可以证明下列两点：

(i) 若 $C_\alpha(\omega_m-\omega,\overline{G})\to 0(m\to\infty)$，则 $C_\alpha(\beta(\omega_m,z)-\beta(\omega,z),\overline{G})\to 0(m\to\infty)$；

(ii) 若 $\{\omega_m\}$ 在 $C_\alpha(\overline{G})$ 中有界，则在 $\{\beta(\omega_m,z)\}$ 中，有子列是 $C_\alpha(\overline{G})$ 中的 Cauchy 序列.

现在证明(ii). 根据文[3.1]中的定理1.1与本文中的第(3)式，算子 $T_n(\omega,z)$ 是 $L_p(p>2)$ 到 $C_\alpha(\overline{G})$，$\alpha=\dfrac{p-2}{p}$ 的全连续算子，于是它也是 $C_\alpha(\overline{G})$ 到自身的全连续算子. 因此，若 $\{\omega_m\}$ 是 $C_\alpha(\overline{G})$ 中的有界序列，则 $\{T_n(\omega_m,z)\}\in C_\alpha(\overline{G})$，并且其中有子列 $\{T_n(\omega_{m_k},z)\}$ 是 $C_\alpha(\overline{G})$ 中的 Cauchy 序列：对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，可以找到正整数 K，使得当正整数 K，$l>K$ 时，$C_\alpha(T_n(\omega_{m_k},z)-T_n(\omega_{m_l},z),\overline{G})<\varepsilon$. 将此式代入(17)式得到

$$C_\alpha(\beta(\omega_{m_k},z)-\beta(\omega_{m_l},z),\overline{G})\leqslant\frac{1}{1-Q_1}\Big(\sum_{j=1}^{2}Q_{j2}M_2Q+Q_{32}\Big)\varepsilon.$$

因此 $\{\beta(\omega_{m_k},z)\}$ 是 $C_\alpha(\overline{G})$ 中的 Cauchy 序列. (ii)证明完毕. 由(17)式与算子 $T_n(\omega,z)$ 的全连续性，(i)是显然的. 因此算子 $\beta(z)=\beta(\omega,z)$ 是 $B(Q)$ 到自身的完全连续算子.

最后，应用 Schauder 不动点原理得到算子 $\beta(z)=\beta(\omega,z)$ 在 $B(Q)$ 中至少有一个不动点 ω：$\omega=\beta(\omega,z)$，这就是说方程(11)在 $B(Q)$ 中至少有一个解 ω. 于是，根据文[3, 1)]中的定理1.1得到方程(6)的问题P存在解 $w=T_n(\omega,z)$. 定理的存在性部分证毕. 应用文[3, 1)]中的定理2.1的(ii)得到定理的未竟部分. 证毕.

条件 A_2 (i)设 $g(z,w,t)$ 定义在三圆柱 $\overline{G}\times\overline{G}_w\times\overline{G}_t$ 上，对于任意 (z,w,t)，$(z_1,w_1,t_1)\in\overline{G}\times\overline{G}_w\times\overline{G}_t$，适合 Hölder-Lipschitz 条件

$$|g(z,w,t)-g(z_1,w_1,t_1)|\leqslant H_0|z-z_1|^\alpha+H_1|w-w_1|+H_2|t-t_1|,\tag{18}$$

而且，若 $w(z)$，$w_1(z)$，$t(z)$ 与 $t_1(z)\in C_\alpha(\overline{G})$，则 $g(z,w,t)$ 适合 $C_\alpha(\overline{G})$ 中的 Lipschitz 条件

$$C_\alpha[g(z,w,t)-g(z,w_1,t_1),\overline{G}]\leqslant H_3C_\alpha(w-w_1,\overline{G})+H_4C_\alpha(t-t_1,\overline{G}),\tag{19}$$

其中 H_i，$i=0,1,\cdots,4$，为常数；(ii)设 H_3，H_4 和 $C_\alpha(g(z,0,0),\overline{G})$ 适当小，使得存在正常数 H 适合下列条件：(1)若 $\omega\in B(H)$，则 $T_n(\omega,z)\in\overline{G}_w$，$S_n(\omega,z)\in\overline{G}_t$. (2)下列不等式成立

$$H_4M_2<1,\ H_3M_1H+C_\alpha(g(z,0,0),\overline{G})\leqslant(1-H_4M_2)H.\tag{20}$$

其中 M_1 与 M_2 是不等式(9)中的常数.

定理1.2 在条件 A_2 之下，非线性方程组(A)存在形为 $w=T_n(\omega,z)$ 的解，而且当 $n\geqslant-1$ 时，它适合边界条件(1)，当 $n\leqslant-2$ 时，它适合变态的边界条件(10)，其中 ω 是下列非线性积分方程在 $B(H)$ 中的解

$$\omega=g(z,T_n(\omega,z),S_n(\omega,z)).\tag{21}$$

证 引进泛函方程

$$\beta(z)=g(z,T_n(\omega,z),S_n(\beta,z)).\tag{22}$$

由(18)式与算子 $T_n(\omega,z)$，$S_n(\omega,z)$ 的性质[3,1)]得到，对于任意的 $\omega\in B(H)$ 和 $\beta\in C_\alpha(\overline{G})$ 都有 $g(z,T_n(\omega,z),S_n(\beta,z))\in C_\alpha(\overline{G})$. 类似于定理1.1，由(19)与(20)式可以证明泛函方程(22)定义一个 $B(H)$ 到自身的全连续算子. 于是应用 Schauder 不动点原理与文[3, 1)]可以完成定理的证明.

条件 B　设 $g(z, w, t)$ 适合条件 A_2 而且 $H_1M_3+H_2M_4<1$, 其中 M_3 与 M_4 是下列不等式中的常数

$$\|T_n(\omega, z)\|_{L_p}\leqslant M_3\|\omega\|_{L_p},\ \|S_n(\omega, z)\|_{L_p}\leqslant M_4\|\omega\|_{L_p}.$$

系 1.1　在条件 B 之下, 定理 1.2 中形为 $w=T_n(\omega, z)$ 的解是唯一的.

证　设定理 1.2 中的解有两个 $w_1(z)=T_n(\omega_1, z)$ 和 $w_2=T_n(\omega_2, z)$, 其中 $\omega_1=w_{1\bar{z}}$ 和 $\omega_2=w_{2\bar{z}}$ 分别为积分方程(21)在 $C_\alpha(\bar{G})$ 中的两个解. 作

$$w(z)=w_1(z)-w_2(z)=T_n(\omega_1-\omega_2, z),$$

若记

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{g(z, T_n(\omega_1, z), S_n(\omega_1, z))-g(z, T_n(\omega_1, z), S_n(\omega_2, z))}{S_n(\omega_1-\omega_2, z)}, \\ \qquad\qquad \text{当 } S_n(\omega_1-\omega_2, z)\neq 0 \text{ 时}, \\ 0,\ \text{当 } S_n(\omega_1-\omega_2, z)=0 \text{ 时},\end{cases}\tag{23}$$

$$A(z)=\begin{cases}\dfrac{g(z, T_n(\omega_1, z), S_n(\omega_2, z))-g(z, T_n(\omega_2, z), S_n(\omega_2, z))}{T_n(\omega_1-\omega_2, z)}, \\ \qquad\qquad \text{当 } T_n(\omega_1-\omega_2, z)\neq 0 \text{ 时}, \\ 0,\ \text{当 } T_n(\omega_1-\omega_2, z)=0 \text{ 时},\end{cases}\tag{24}$$

则从条件 B 得到 $q(z)$, $A(z)\in L_p$, $p>2$, 并且 $|q(z)|\leqslant H_2$, $|A(z)|\leqslant H_1$. 从积分方程(21)不难得到 $\omega_1-\omega_2$ 是积分方程

$$\omega_1-\omega_2=q(z)S_n(\omega_1-\omega_2, z)+A(z)T_n(\omega_1-\omega_2, z)\tag{25}$$

在 L_p 中的解, 根据件条 B, 积分方程(25)在 L_p 中只有零解, 所以在 L_p 中 $\omega_1=\omega_2$. 因此 $w(z)\equiv 0$, 也就是说 $w_1(z)\equiv w_2(z)$.　　证毕.

利用文[3, 1)]中的定理 2.1 的(ii)(2), 当 $n\leqslant -2$ 时, 我们还可以写出本文定理 1.1 与 1.2 中的解是问题 P 的解的可解条件. 类似于系 1.1, 我们也可以建立定理 1.1 中解的唯一性定理. 所有这些都不再重述.

§2. 带 $|w|^{m+1}$ 的问题 H

首先研究非正指标的($n\leqslant 0$)情形, 我们采用 Виноградов 研究线性和拟线性椭圆型方程的算子 $P_n\omega$、$S_n\omega$、$P_k^*\omega$ 和 $S_k^*\omega$, 恒设 $p>2$, $q_0\Lambda_p^*<1$, 其中 Λ_p^* 是 S_k^* 在 L_p 中的范数[1]. 应该指出, 类同于文 [3, 1] 中定理 1.2 的 $\Lambda_2=1$, 可以证明 S_0 在 L_2 中的范数为 1. 因此, 统一地记

$$P_k^*\omega=\begin{cases}P_0\omega, \\ P_k^*\omega,\end{cases}\qquad S_k^*\omega=\begin{cases}S_0\omega, & \text{当 } k=n=0 \text{ 时}, \\ S_k^*\omega, & \text{当 } -k=n<0 \text{ 时},\end{cases}\tag{26}$$

则 $S_k^*\omega$ 仍然具有文[1]中指出的, 当 $k=-n>0$ 时 S_k^* 的性质, 例如 S_k^*w 在 L_2 中的范数为 1 等. 所以, 我们将 $n=0$ 与 $n<0$ 合并在一起研究, S_0 在 L_p 中的范数也记为 Λ_p^*.

条件 C　(i) 若 $w\in W_p^{(1)}(\bar{G})$, $t\in L_p(\bar{G})$, 则 $g(z, w, t)\in L_p(\bar{G})$, 而且 $g(z, w, 0)$ 适合下列不等式

$$|g(z, w, 0)|\leqslant A(z, w)|w|^{m+1}+B(z, w),\ m=\text{正整数},\tag{27}$$

$$\|A(z, w)\|_{L_p}\leqslant N,\ \|B(z, w)\|_{L_p}\leqslant(1-K^0)\gamma.\tag{28}$$

其中 γ 为小于 $((1-q_0\Delta_p^*)/M_pN)^{1/m}/M_p$ 的任意固定正数，N 为常数，

$$K^0=q_0\Delta_p^*+(M_p\gamma)^mM_pN<1,$$

而 M_p 是下列不等式中的常数

$$|P_k^*\omega|\leqslant M_p\|\omega\|_{L_p};\tag{29}$$

(ii)对于任意的 $\{w_l\}$，$w\in W_p^{(1)}(\overline{G})$ 和 $t\in L_p(\overline{G})$，若 $|w_l-w|\to 0(l\to\infty)$，则关于 t, z 一致地成立

$$|g(z,\ w_l,\ t)-g(z,\ w,\ t)|\to 0\ \ (l\to\infty).$$

条件 F　设 $g(z,\ w,\ t)$ 适合条件 C，而且关于 w 适合下列不等式

$$|g(z,\ w_1,\ t)-g(z,\ w_2,\ t)|\leqslant[C(z)\max(|w_1|^m,\ |w_2|^m)+M_5|t|]\,|w_1-w_2|,\tag{30}$$

其中 M_5 为常数，$C(z)\in L_p(\overline{G})$ 并且 $\|C(z)\|_{L_p}<N$.

记 $L_p(G)$ 中适合 $\|\omega\|_{L_p}\leqslant r$ 的全体元素所成的集合为 Ω^*，显然，它是一个有界凸性闭集.

定理 2.1　在条件 C 之下，对于方程组 (A)：1)当 $n=0$ 时，问题 H 有形为 $w(z)=P_0\omega$ 的解；2)当 $n<0$ 时，变态问题 H

$$\mathrm{Re}[z^{-n}w]=-\sum_{j=0}^{-n-1}\mathrm{Re}(a_jz^j).\tag{31}$$

有形为 $w(z)=P_k^*\omega$ 的解；而且 1)与 2)中的 ω 分别是非线性积分方程

$$\omega=g(z,\ P_k^*\omega,\ S_k^*\omega),\tag{32}$$

当 $n=0$ 与 $n<0$ 时，在 Ω^* 中的解，而当 $n<0$ 时

$$a_j=-\frac{1}{\pi}\iint_G[\zeta^{k-j-1}\omega(\zeta)+\overline{\zeta}^{k+j-1}\overline{\omega(\zeta)}]d\sigma_\zeta,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ -n-1,\ k=-n,$$

$$a_0=-\frac{1}{\pi}\iint_G\zeta^{k-1}\omega(\zeta)d\sigma_\zeta,\ k=-n.\tag{33}$$

证　将(26)代入方程组 (A) 得到非线性积分方程 (32). 如果我们能证明它在 L_p 中有解，则定理的存在性部分就被证明了，利用文[1]得到(31)与 (33)，完成了定理的证明.

现在研究泛函方程

$$\Omega=g(z,\ P_k^*\omega,\ S_k^*\Omega).\tag{34}$$

首先证明，它对于任一 $\omega\in\Omega^*$ 都有唯一解 $\Omega\in L_p$. 引进算子

$$\rho\Omega=g(z,\ P_k^*\omega,\ S_k^*\Omega).\tag{35}$$

对于任一给定的 $\omega\in\Omega^*$，和任意的 Ω_1, $\Omega_2\in L_p$，利用条件 (A.2) 与算子 $S_k^*\Omega$ 的范数的性质得到

$$\|g(z,\ P_k^*\omega,\ S_k^*\Omega_1)-g(z,\ P_k^*\omega,\ S_k^*\Omega_2)\|_{L_p}\leqslant q_0\Delta_p^*\|\Omega_1-\Omega_2\|_{L_p}.\tag{36}$$

由此知道算子(35)是一个压缩算子，因此利用 Banach 不动点定理，对于任意给定 $\omega\in\Omega^*$，它有唯一的不动点 Ω，也就是说，泛函方程(34)有唯一解 $\Omega\in L_p$

$$\Omega=\Omega(\omega).\tag{37}$$

其次，从泛函方程(34)得到

$$\|\Omega\|_{L_p}\leqslant\|g(z,\ P_k^*\omega,\ S_k^*\Omega)-g(z,\ P_k^*\omega,\ 0)\|_{L_p}+\|g(z,\ P_k^*\omega,\ 0)\|_{L_p}.\tag{38}$$

因此，应用(A.2)，(27)和算子 S_k^* 的性质得到

$$\|\Omega\|_{L_p}\leqslant q_0\Delta_p^*\|\Omega\|_{L_p}+\|A(z,\ w)\|_{L_p}(M_p\|\omega\|_{L_p})^{m+1}+\|B(z,\ w)\|_{L_p}.\tag{39}$$

由此，利用 $q_0\Delta_p^*<1$ 与(28)，注意到 $\omega\in\Omega^*$，我们得到算子(37)是 Ω^* 到自身的映照. 利用条件 C(ii)，我们还可进一步证明，算子(37)是 Ω^* 到自身的全连续算子.

最后，根据 Schauder 不动点原理，算子(37)在 Ω^* 中至少有一个不动点 ω: $\omega=\Omega(\omega)$. 代入(34)得到此不动点 ω 就是非线性积分方程(32)的解. 证毕.

根据此定理中的(33)，可以写出 $n<0$ 时问题 H 的可解条件为

$$a_j=0,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ -n-1.$$

定理 2.2 在条件 F 之下，若(28)中的 r 是适合

$$q_0\Delta_p^*+[N(M_pr)^m+M_5\Delta_p^*r]M_p<1 \tag{40}$$

的任一固定正数，则对于方程组(A)的问题 H，定理 2.1 中的解唯一.

证　显然，如果我们能证明积分方程(32)在 Ω^* 中有唯一解，则定理就被证明了. 引进算子

$$\rho_0\omega=g(z,\ P_k^*\omega,\ S_k^*\omega). \tag{41}$$

对于任意给定的 $\omega\in\Omega^*$，它都有意义，并且类同于(39)得到

$$\|\rho_0\omega\|_{L_p}\leqslant[q_0\Delta_p^*+\|A(z,\ w)\|_{L_p}(M_pr)^m\cdot M_p]r+\|B(z,\ w)\|_{L_p}\leqslant r.$$

因此算子 $\rho_0\omega$ 是 Ω^* 到自身的映射. 应用(30)，类同于(36)有

$$\|\rho_0\omega_1-\rho_0\omega_2\|_{L_p}\leqslant\{q_0\Delta_p^*+M_p[N(M_pr)^m+M_5\Delta_p^*r]\}\|\omega_1-\omega_2\|_{L_p}.$$

因此，根据(40)，算子(41)是压缩算子，利用 Banach 不动点原理得到，积分方程(32)在 Ω^* 中有唯一解. 证毕.

现在讨论 $n>0$ 的情形. 只要注意到，这种情形与 $n\leqslant0$ 的主要区别在于[1]中的 $S_n\omega$ 在 $L_2(G)$ 中的范数不等于 1，但是 $\hat{S}_n\omega$ 在 L_2 中的范数等于 1，而且[1]

$$S_n\omega=\hat{S}_n\omega+(2n+1)z^{2n}T_0\omega,\ T_0\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}d\sigma_\zeta.$$

以及

$$\|(2n+1)z^{2n}T_0\omega\|_{L_p}\leqslant M_6\|\omega\|_{L_p}\|(2n+1)z^{2n}\|_{L_p}\leqslant M_7\|\omega\|_{L_p}.$$

其中 $M_7=\left(\dfrac{2\pi}{2np+1}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot(2n+1)\cdot M_6$，而 M_6 是下列不等式中的常数：$|T_0\omega|\leqslant M_6\|\omega\|_{L_p}$. 那么容易知道，只要将(28)中的 Δ_p^* 改为 $(\Delta_p^*+M_7)$，就得到当 $n>0$ 时，与条件 C、F 相应的条件，于是就不难得到当 $n>0$ 时，与定理 2.1 及 2.2 相应的定理，这里不再详述.

最后，我们从定理 2.1 的证明过程中看到下列

注 1　若将条件 C 中的 m 改为取正常数，则定理 2.1 成立.

注 2　若将条件 C 中对任何 $w\in W_p^{(1)}(G)$ 改为对任何 $w\in\{w: |w|\leqslant\gamma_1\}$，$\gamma_1$ 为正常数，其他不变，则定理 2.1 成立.

显然，适合注 2 的 $g(z,\ w,\ 0)$，包含了关于 w 的非线性增长的相当广泛的函数类，甚至包含按整函数增长的非线性函数类. 例如，对于方程 $w_{\bar{z}}=e^w-w-1$ 定理 2.1 成立. 因此在条件 C 或注 2 中，加于方程组(A)的种种限制中，只有加于 $B(z,\ w)$ 的限制(见(28)式的第二式)较强. 但是 $B(z,\ w)$ 在方程组(A)中的地位，从某种意义上可以说，它相当于一般非齐次方程的右端或自由项.

在条件 C 中当 $m=0$ 时的问题 H，已在更广泛的意义下被解决了[3, 3), 4-6]. 但是，对于条件 C 中的 $m<0$ 或 $B(z,\ w)$ 不适合(28)式第二式的问题 H，还有待进一步研究.

参 考 文 献

[1] Векуа, И. Н., 广义解析函数, 人民教育出版社, 1960.

[2] Данилюк, И. И. СМЖ., **3**: 1 (1962), 17—55.

[3] 方爱农, 1) 湖南大学学报, **6**: 3 (1979), 25—43; 2) 湖南大学学报, **6**: 4 (1979), 1—13; 3) 科学通报, **25**; 21 (1980), 961—963.

[4] 闻国椿、方爱农, 应用数学与计算数学, 函数论专辑, 1979.

[5] Виноградов, В. С., ДАН., **121**: 4 (1958), 579—581.

[6] 闻国椿, 1) 数学学报, **23**: 2 (1980), 244—255; 2) 非线性椭圆型复方程的函数论方法, 1979 年全国广义解析函数与边值问题会议资料.

[7] Гусейнов, А. И., Абдурагимов, М. А., ДАН., **232**: 1 (1977), 9—12.

[8] Tutschke, W., Analytic Functions, Kozubnik, 1979, *Springer Mathematical Book*, **798** (1980), 446—455.

TWO KINDS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE FIRST ORDER SYSTEMS OF NONLINEAR ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

FANG AINONG

(*Hunan University*)

ABSTRACT

In this paper we establish the existence and uniqueness theorems of a solution of the problem $P(|z|=1, \operatorname{Re}[z^{-n}w_z]=0)$ and H $(|z|=1, \operatorname{Re}[z^{-n}w]=0)$ for the nonlinear system (A): $w_{\bar z}=g(z, w, w_z)$, $|g(z, w, w_z^1)-g(z, w, w_z^2)|\leqslant q_0|w_z^1-w_z^2|$, $q_0=$ const. <1, $z\in G=\{|z|<1\}$. For the problem P, where $w(z)\in C_\alpha^1(\overline{G})$, let $C_\alpha(g(z, w, t)-g(z, w_1, t_1), \overline{G})\leqslant H_3C_\alpha(w-w_1, \overline{G})+H_4C_\alpha(t-t_1, \overline{G})$, H_3, H_4 and $C_\alpha(g(z, 0, 0), \overline{G})$ be the suitable small constants. For the problem H, where $w(z)\in W_p^{(1)}(\overline{G})$, $p>2$, let $|g(z, w, 0)|\leqslant A(z, w)|w|^m+B(z, w)$, $m>1$, $A(z, w)\in L_p(\overline{G})$ and $\|B(z, w)\|_{L_p(\overline{G})}$ be the suitable small.