数 学 年 刊
3 (5) 1982

一类解析和解析 J-自伴算子环

马 吉 溥
(南京大学)

§ 1

非正常算子的研究，现仍限于一些特殊的算子类，如文献[1, 2, 3]中所指出的，等等．这些算子类，尚不清楚是否构成一个环．一些特殊的可交换算子环，J-自伴算子环，由于它们的代数结构，对于发现特殊非正常算子和它的研究不是毫无益处的，这也是这篇小文的目的．通过一种算子的解析演算，我们讨论了一种可交换的解析和解析 J-自伴算子环以及有关的具有非平凡公共约化子空间的算子代数．

设 A 是 Hilbert 空间中线性有界算子，A 的极分解为 $A=J(A^*A)^{1/2}$，$J^2=I$，$J^*=J$．以 $\rho_J(A)$ 表示这样一些复数 λ: $\lambda\in\rho_J(A)$ 表示在有界线性算子 $R_J(A,\lambda)$ 使

$$R_J(A,\lambda)(A-\lambda J)=I,\quad (A-\lambda J)R_J(A,\lambda)=I.$$

$\rho_J(A)$ 的补集以 $\sigma_J(A)$ 记之．

引理 1
$$\sigma([A^*A]^{1/2})=\sigma([AA^*]^{1/2})=\sigma_J(A),$$
$$\rho([A^*A]^{1/2})=\rho([AA^*]^{1/2})=\rho_J(A).$$

证　若 $\lambda\in\rho_J(A)$，有

$$([AA^*]^{1/2}-\lambda I)^{-1}=J(A-\lambda J)^{-1},$$
$$([A^*A]^{1/2}-\lambda I)^{-1}=(A-\lambda J)^{-1}J \tag{0}$$

所以
$$\rho_J(A)\subseteq\rho([AA^*]^{1/2}).$$

反之，若 $\lambda\in\rho([AA^*]^{1/2})$，有

$$(A-\lambda J)^{-1}=J([AA^*]^{1/2}-\lambda I)^{-1},$$

若 $\lambda\in\rho([A^*A]^{1/2})$，有

$$(A-\lambda J)^{-1}=([A^*A]^{1/2}-\lambda I)^{-1}J.$$

引理成立．

设 S 是包含 $\sigma_J(A)$ 的任一闭 Cauchy 区域，$f(z)$ 是 S 上解析函数，令

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial S}f(\xi)R_J(A,\xi)d\xi, \tag{1}$$

其中 ∂S 表示 S 的边界．(1)按算子强收敛意义是存在的，并且有：

设 $f_1(z)$，$f_2(z)$ 是 S 上的解析函数，则

$$f_1(A)Jf_2(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial S}f_1(\xi)f_2(\xi)R_J(A,\xi)d\xi. \tag{2}$$

令
$$M=\{f(A): f(z)\text{在 }S\text{ 上解析}\}.$$

本文 1979 年 11 月 29 日收到．

由(1)和(0)知：当 $f(z)=z$ 时，$f(A)=A^*\in M$；当 $f(z)=1$ 时，$f(A)=J\in M$.

对任意 B_1, $B_2\in M$, 令 $B_1\otimes B_2=B_1JB_2$, 由(2)，综合上叙，我们有：

定理 1 M 按算子乘法 $\otimes$，组成含单位元 J 的可交换环，它同构于 S 上的解析函数环.

令 $M_J=\{JB:B\in M\}$. 易知有

推论 1 M_J, 按通常算子乘法，组成含有单位元 I 的可交换环.

特别地，当 $f(z)$ 关于实轴为对称的解析函数时

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial s} f(\zeta)(A-\zeta J)^{-1}d\zeta$$

是 J-自伴的. 事实上

$$Jf(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial s} f(\zeta)([AA^*]^{1/2}-\zeta I)^{-1}d\zeta,$$

$$(Jf(A))^*=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial s} \overline{f(\zeta)}([AA^*]^{1/2}-\bar{\zeta} I)^{-1}d\zeta.$$

因 $R_J(A,\lambda)$ 在 $\rho_J(A)$ 上解析，任意非实复数 $\lambda\in\rho_J(A)$，我们不妨设 S 为包含 $\sigma_J(A)$ 且关于实轴为对称的闭区域. 这样

$$(Jf(A))^*=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial s} f(\zeta)([AA^*]^{1/2}-\zeta I)^{-1}d\zeta=Jf(A).$$

令 $M'=\{f(A):f(z)$ 为 S 上关于实轴对称的解析函数$\}$.

M' 按算子乘法 $\otimes$，组成一个含单位元 J 的可交换的解析 J-自伴算子环.

令 $M'_J=\{JB:B\in M'\}$，综合上述，不难看到：

定理 2

(i) 解析 J-自伴算子环 M' 同构于对称实轴的解析函数环；

(ii) M'_J 按通常算子乘法是一个含单位元 I 的可交换环.

类似定理 1 和推论 1 的讨论，可证明这个定理.

§ 2

在这节里，我们首先讨论一种直交投影算子，他属于 M_J 和 M'_J 中. 由[2]易知有

引理 2 设 $f(z)$ 是 S 上对称实轴的解析函数，且 $f^2(z)=f(z)$，则

$$Jf(A)=\frac{J}{2\pi i}\oint_{\partial s} f(\zeta)(A-\zeta J)^{-1}d\zeta$$

是直交投影算子.

现在我们让 $[A^*A]^{1/2}$ 的谱是可分离的. 这样，$\sigma_J(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$, $S_1\supset\sigma_1$, $S_2\supset\sigma_2$. 不妨设 S_1, S_2 对称实轴，$S=S_1\cup S_2$. 令 $f_j(z)$ 为 S_j 的特征函数. 它们是 S 上对称实轴的解析函数，且 $f_j^2(z)=f_j(z)$, $j=1, 2$.

$$P_j=Jf_j(A),\quad j=1,\ 2.$$

按引理 2 是直交投影算子，并且

$$P_1+P_2=J(f_1(A)+f_2(A))=J^2=I,$$

P_1, P_2 是互补的.

由于 $(A^*A)^{1/2}$ 的谱是可分离的, 和 (0) 式

$$P_j = Jf_j(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial s}([AA^*]^{1/2} - \zeta I)^{-1} d\zeta,$$

从 Riesz 定理[4]知, P_j 的值域 R_j 为非平凡的, $j=1, 2$.

因为 $f_j(z)$ 的对称性知, $f_j(A) \in M$ 和 M'. 于是 $Jf_j(A) \in M_J$ 和 M'_J, 有

定理 3 设 $(A^*A)^{1/2}$ 的谱可分离, A 的极分解 $A=J(A^*A)^{1/2}$, $J^2=I$, $J^*=J$, 则环 M_J 和 M'_J 具有公共非平凡的约化子空间.

令 C 和 C' 分别表示 M_J 和 M'_J 按算子强拓扑的包, 因为 M_J 和 M'_J 含有单位元 I, 因此也是按算子弱拓扑的包. 所以有

定理 4 算子代数 C 和 C' 具有公共非平凡约化子空间.

当 $A=U(A^*A)^{1/2}$, U 是一般部分等距算子时, 上述结果, 很多是可以推广的, 将于另外的工作中讨论.

参 考 文 献

[1] 夏道行, 关于非正常算子——半亚正常算子, 中国科学, **10**(1979), 936—946.

[2] Putnam, C. R., Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics, Springer Verlag, N. Y., 1967.

[3] 马吉溥, 一类非正常算子, 南京大学学报(自然), **3**(1965), 263—272.

[4] Radjavi, H. and Rosenthal, P., Invariant Subspaces, Springer, Verleg, Berlin, 1973.

ANALYTIC OPERATOR RINGS AND ANALYTIC J-SELF ADJOINT OPERATOR RING

MA JIPU
(Nanjin University)

ABSTRACT

Let A be a linear bounded operator in Hilbert space H with polar respresentation $A=J(A^*A)^{1/2}$ where $J^2=I$, $J^*=J$. we use $\rho_J(A)$ to denote the set of all complex λ, such that for any $\lambda\in\rho_J(A)$ there exist an bounded inverce $R_J(A, \lambda)$ of $(A-\lambda J)$ and $\sigma_J(A)$ to complement of $\rho_J(A)$.

Let S be a closed Cauchy domain, $S\supset\sigma_J(A)$ and $f(z)$ an analytic function on S. We define

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial S} f(\zeta)R_J(A, \zeta)d\zeta,$$

the set of all such $f(A)$ is denoted M.

If $f(z)$ be analytic on S and symmetrical for real axis then $f(A)$ is J-self adjoint. The set of all such $f(A)$ is denoted M'. Let $A\otimes B=AJB$ for A, $B\in M$ (or M'). We have

Theorem. the ring of functions analytic on S (or analytic symmetrical for real axis on S) is a algebra homomorphism of M (or M'). The constant function 1 or z corresponds to operator J or A^* respectively.

Let $M_J=\{JB\,|\,B\in M\}$ and $M'_J=\{JB\,|\,B\in M'\}$. If the spectrum of $(A^*A)^{1/2}$ is detached, we have

Theorem. M_J has common non-trivial reducing subspace and it is true for M_J.