数 学 年 刊
3 (5) 1982

关于含有 ν-基座的本原环的结构

姚 慕 生
(复旦大学数学研究所)

众所周知，任一 Jacobson 半单纯环均可表示为本原环的子直和[参看文 1]．因此，本原环构造的研究对于探索一般环的结构具有重要的意义．在本原环结构研究中，Jacobson 给出了一个著名的结构定理：若 $\mathfrak{A}$ 是一个有非零基座的本原环，则必可找到一对偶向量空间 $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$，使 $\mathscr{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')\supseteq\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{S}$．这儿 $\mathscr{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ 表示在 $\mathfrak{M}'$–拓扑下连续的 $\mathfrak{M}$ 中的线性变换全体所成的环，$\mathfrak{S}$ 为 $\mathfrak{A}$ 的基座，这些结果可参看[2, 3]，显然这个定理把含有非零基座的本原环同一对对偶空间联系了起来，并且熟知地在半线性同构的意义下这对对偶空间是由 $\mathfrak{A}$ 唯一决定的[参看 3, 8]．由于在对偶空间中采用了有限拓扑，因此人们对本原环结构的描述往往局限在有限可迁性上．但本原环也可能是无限可迁的，如无限维向量空间线性变换完全环的双侧理想当空间维数超过 $\aleph_0$ 时就是无限可迁的．为了深入研究本原环的结构，人们对各种无限可迁本原环作了进一步的研究，可参看[4, 6, 9]．最近，许永华教授引进了 ν–基座的概念[参看 6]．并指出，如本原环 $\mathfrak{A}$ 的 ν–基座为 $\mathfrak{S}_\nu$，T_ν 表示线性变换完全环 Ω 中秩小于 $\aleph_\nu$ 的线性变换全体所成的双侧理想，则 $\mathfrak{S}_\nu=\mathfrak{A}\cap T_\nu$．此外，文[6]还建立了含有 ν–基座的本原环 $\mathfrak{A}$ 的结构定理：对含 ν–基座的本原环 $\mathfrak{A}$，总可找到一对对偶模 $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$，使 $\mathscr{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')\supseteq\mathscr{L}(\mathscr{A}, \mathscr{A}')\supseteq\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{S}_\nu\supseteq\mathfrak{S}_0$ 成立，这儿 $\mathfrak{S}_0$ 为普通基座，$\mathfrak{S}_\nu$ 为 ν–基座，$\mathscr{L}(\mathscr{A}, \mathscr{A}')=\{\omega\in\Omega\,|\,\omega\mathscr{A}\subseteq A'\}$ $\mathscr{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ 意义同前．这个定理推广并加细了经典的结构定理，这儿的 $\mathscr{A}=l\mathfrak{A}$，$\mathscr{A}'=\mathfrak{A}l$，$l$ 是 $\mathfrak{A}$ 的某个幂等元．当 $\operatorname{rank} l=1$ 时，$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}'$ 分别为 $\mathfrak{A}$ 的极小右理想与极小左理想，这时得到的结论与用对偶向量空间得到的结论完全等价[参看 8]，因此采用对偶模是对偶空间的一个自然推广．

本文在[6]的基础上对有 ν–基座的本原环的结构作进一步的研究，全文共分三节．在第一节中，我们对对偶模引进了对偶拓扑并证明在此拓扑下上述的 $\mathscr{L}(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$就是 $\mathscr{A}$ 的连续的自同态完全环．在第二节中，我们建立了有 ν–基座的本原环的同胚同构定理，即：对具有 ν–基座的任一本原环 $\mathfrak{A}$ 及任意序数 $\{\mu\leqslant\nu\}_\mu$，总可找到一组有序的幂等元 $\{l_\mu\,|\,\operatorname{rank} l_\mu<\aleph_\nu\}$ 以及相应的一族对偶模 $\{(\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}'_\mu)\}$，其中 $\mathscr{A}_\mu=l_\mu\mathfrak{A}$，$\mathscr{A}'_\mu=\mathfrak{A}l_\mu$，此时 $\mathfrak{A}$ 可嵌入下链中

$$\Omega\supseteq\mathscr{L}_0\supseteq\cdots\supseteq\mathscr{L}_\mu\supseteq\cdots\supseteq\mathscr{M}_\nu\supseteq\mathscr{L}\supseteq\mathfrak{S}_\nu\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{S}_\nu\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{S}_0,$$

这儿 $\mathfrak{S}_\mu$ 表示 $\mathfrak{A}$ 的 μ–基座，$\mathscr{L}_\mu$ 表示在对偶拓扑下 $\mathscr{A}_\mu$ 的连续自同态完全环，$\mathscr{L}_0=\mathscr{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$，$\mathfrak{S}_0$ 即通常的基座．上述链在同构同胚的意义下是唯一的．显然这个定理也可看成是对经典的同构定理的推广．本文最后一节主要建立了含于 ν–基座内的单侧理想的结构定理．

本文 1980 年 5 月 15 日收到．

需要指出的是，本文对 ν-基座本原环结构的研究不是象平常那样通过向量空间来进行，而主要是直接从本原环的单侧理想组成的模对出发来进行研究．这种方法在特殊情形下曾为 Kapalansky 采用过，后来又为 Bass 及 Amitsur 所进一步抽象化并应用到其它方面的研究中[10, 11]，而在线性变换环中的应用可参考[6, 7, 8]

为叙述方便，我们首先引进一些记号与术语，如无特别说明，这些记号术语的意义始终不变．我们用 $\mathfrak{M}$ 表示除环 Δ 上的左向量空间，用 $\mathfrak{A}$ 表示这个空间的线性变换稠密环即本原环，Ω 表示线性变换完全环．我们还假定 ν 是一个非极限序数，$\aleph_\nu$ 是相应的基数．所谓 $\mathfrak{A}$ 是 $\aleph_\nu$ 可迁的就是说对 $\mathfrak{M}$ 中任意基数小于 $\aleph_\nu$ 的线性无关的向量集 $\{x_i\}_I(\mathrm{card}I<\aleph_\nu)$ 及 $\mathfrak{M}$ 中任一具有相同基数的向量集 $\{y_i\}_I$，总可在 $\mathfrak{A}$ 中找到一个元 a 使 $x_ia=y_i$ 对 $i\in I$ 都成立．我们用 l 表示幂等元，于是 $\mathfrak{A}$ 的左、右理想 $\mathscr{A}'=\mathfrak{A}l$, $\mathscr{A}=l\mathfrak{A}$ 可分别看作为左、右 $\mathfrak{A}$ 模，我们用 $\mathscr{K}=l\mathfrak{A}l$ 记 $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}$ 作为 $\mathfrak{A}$ 模的中心化子．文[6]证明了 $\mathscr{A}=l\mathfrak{A}=l\Omega$, $\mathscr{K}=l\Omega l$, $\mathfrak{A}$ 的 ν-基座 $\mathfrak{S}_\nu=\mathfrak{A}l\mathfrak{A}=\mathfrak{A}l\Omega$．此外我们还将 $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}$ 分别看成为右、左 $\mathscr{K}$-模，文[6]指出 $\mathscr{A}$ 作为左 $\mathscr{K}$-模的自同态完全环就是 Ω．

(一)

我们先对模对 $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$ 引进拓扑(称对偶拓扑)如下：设 $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$ 是相应于 ν-基座本原环 $\mathfrak{A}$ 的 $\aleph_\nu$ 型对偶模(这儿 $\aleph_\nu$ 型对偶是指 $\mathscr{A}'$ 在向量空间 $\mathfrak{M}$ 到其子空间 $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}l$ 上的线性变换中是 $\aleph_\nu$ 可迁的．文[6]证明了若 $\mathfrak{A}$ 有 ν-基座，$\mathscr{A}'$ 必为 $\aleph_\nu$ 可迁，这儿 $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$, 的意义同前述)定义 $\mathscr{A}$ 中任一点 x_0 的邻域基为 $x_0+\bigcap\limits_1^n y_i'^{\perp\mathscr{A}}$，其中 $y_i'\in\mathscr{A}'(i=1, \cdots n)$, $y'^{\perp\mathscr{A}}=\{x\in A\mid xy_i'=0\}$，$n$ 是任意的自然数．不难验证，$\mathscr{A}$ 在此定义下成为一个拓扑空间，$\mathscr{A}$ 的这种拓扑称为 $\mathscr{A}'$-拓扑．对偶地，我们也可在 $\mathscr{A}'$ 中引进 $\mathscr{A}$-拓扑：对 $\mathscr{A}'$ 中任一点 y_0'，它的邻域基定义为 $y_0'+\bigcap\limits_1^n x_i^{\perp\mathscr{A}'}$，其中 $x_i\in\mathscr{A}(i=1, \cdots n)$, $x_i^{\perp\mathscr{A}'}=\{y'\in\mathscr{A}'\mid x_iy'=0\}$．

下面证明命题1它表明了 $\mathscr{A}'$ 与 $\mathscr{A}^*=\Omega l$ 的关系：

命题1 设 $\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}^*$ 的 $\aleph_\nu$ 可迁的 $\mathscr{K}$-子模，则 $\mathscr{A}'$ 在 $\mathscr{A}^*$ 中稠密，且 $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$ 成对偶．这儿 $\mathscr{A}'$ 与 $\mathscr{A}^*$ 的拓扑都是 $\mathscr{A}$-拓扑，所谓 $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$ 成对偶是指对 $\forall x\in\mathscr{A}$，如对一切的 $y'\in A'$ 有 $xy'=0$，则必可推出 $x=0$[参看[6]的定义]．

证 先证 $\mathscr{A}'$ 在 $\mathscr{A}^*$ 中稠密．对 $\forall a^*\in\mathscr{A}^*$ 的任一邻域 $a^*+\bigcap\limits_1^n u_j^{\perp\mathscr{A}^*}$, $(u_j\in\mathscr{A})$，设 $\{e_i\}_I$ 是 $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}l$ 的基，记 $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\oplus\overline{\mathfrak{N}}$, $\overline{\mathfrak{N}}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的余子空间且可令 $\overline{\mathfrak{N}}l=0$, $\overline{\mathfrak{N}}$ 的基设为 $\{f_k\}_J$．显然 $e_il=e_i$, $f_kl=0$，作 $\bigcup\limits_{j=1}^n\{e_iu_j\}_{i\in I}$，并从中选出极大线性无关元集，记为 $\{e_iu_1\}_{I_1}\cup\cdots\cup\{e_iu_n\}_{I_n}$，这儿 I_j 是 I 的子集．由于 $\sum\limits_{j=1}^n\mathrm{card}\,I_j<\aleph_\nu$ 及 $\mathscr{A}'$ 的 $\aleph_\nu$ 可迁性知存在 $a'\in\mathscr{A}'$ 使 $e_iu_ja^*=e_iu_ja'$ 对一切 $i\in I_1\cup\cdots\cup I_n$ 及 $j=1, \cdots n$ 成立．由于 $\bigcup\limits_{j=1}^n\{e_iu_j\}_{I_j}$ 是 $\bigcup\limits_{j=1}^n\{e_iu_j\}_I$ 的生成元，因此不难知道上述等式对一切 $i\in I$ 及 $j=1, \cdots, n$ 成立．而对 f_k，我们显然有 $f_ku_j(a^*-a')=0$，由此可知 $u_ja^*=u_ja'$，此即 $a'\in a^*+\bigcap\limits_1^n u_j^{\perp\mathscr{A}^*}$，这表明 $\mathscr{A}'$ 在 $\mathscr{A}^*$ 中稠密．

再证$(\mathscr{A},\ \mathscr{A}')$是对偶模．假定有某个固定的 $x_0\in\mathscr{A}$，使得$(x_0,\ y')=x_0y'=0$ 对一切 $y'\in\mathscr{A}'$ 成立．若 $x_0\neq0$，显然可在 $\mathscr{A}^*=\Omega l$ 中找到一个 ωl，使 $x_0\omega l\neq0$，再作 $\omega l+x_0^{\perp\mathscr{A}^*}$，由于 $\mathscr{A}'$ 在 $\mathscr{A}^*$ 中稠密，因此存在 $a'\in\mathscr{A}'$ 使 $x_0a'=x_0\omega l\neq0$，这与原设矛盾，因此只有 $x_0=0$，即$(\mathscr{A},\ \mathscr{A}')$对偶．

引理 1 设 $\mathscr{A}^*=\Omega l$，$\mathscr{A}=l\Omega$，$\mathscr{K}=l\Omega l$，$y_i'\in\mathscr{A}^*$，$i=1,\ \cdots,\ n$，则

$$\sum_{i=1}^{n}y_i'\mathscr{K}=\Big(\bigcap_{i=1}^{n}y_i'^{\perp\mathscr{A}}\Big)^{\perp\mathscr{A}^*}$$

证 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\mathscr{K}\subseteq\Big(\bigcap\limits_{1}^{n}y_i'^{\perp\mathscr{A}}\Big)^{\perp\mathscr{A}^*}$ 是显然的．现用数学归纳法证明反包含关系．

当 $n=1$ 时，令 $v'\in(y'^{\perp\mathscr{A}})^{\perp\mathscr{A}^*}$，即$(y'^{\perp\mathscr{A}})v'=0$，也就是说若有 $xy'=0$，则 $xv'=0(x\in\mathscr{A})$．首先可断言，对 $\forall u\in\mathfrak{M}$，若 $uy'=0$，则 $uv'=0$．事实上，如不然，有某个 $u\in\mathfrak{M}$，$uy'=0$ 但 $uv'\neq0$，令 e 是 $\mathfrak{M}l$ 的一个基元，使 $x\in\Omega$ 使 $ex=u$ 而 x 将其余 $\mathfrak{M}$ 的基元都变为零，则 $lx=x$，即 $x\in\mathscr{A}$．又因 $exy'=uy'=0$，得 $xy'=0$，但是 $exv'=uv'\neq0$，即 $xv'\neq0$，这就得出了矛盾．

现设 $\{e_i\}_J$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一组基，又设 $\{e_jy'\}_J$ 中极大线性无关元组为 $\{e_hy'\}_H$，$H\subseteq J$．将 $\{e_hy'\}_H$ 按下列方式扩张为 $\mathfrak{M}$ 的基，令 $\overline{\mathfrak{N}}=\mathfrak{M}(1-l)$，则 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}l\oplus\overline{\mathfrak{N}}$．由于 $\mathfrak{M}y'\subseteq\mathfrak{M}l$，故可令 $\mathfrak{M}l=\mathfrak{M}y'\oplus\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$ 是 $\mathfrak{M}y'$ 在 $\mathfrak{M}l$ 中的余空间．设 $\mathscr{F}$ 的基为 $\{f_m\}_M$，$\overline{\mathfrak{N}}$ 的基为 $\{g_n\}_N$，于是 $\mathfrak{M}$ 的基成了 $\{e_hy'\}_H\cup\{f_m\}_M\cup\{g_n\}_N$，现作 $r\in\Omega$ 使

$$e_hy'r=e_h(h\in H),\ f_mr=0(m\in M),\ g_nr=0(n\in N).$$

由 $y'=y'l$，$e_hy'r=e_hy'lr$，$f_m(lr)=(f_ml)r=f_mr=0$，$g_n(lr)=0=g_nr$，我们立得 $r=lr$．再令 $k=rv'$，显然 $k=lrv'l\in l\Omega l=\mathscr{K}$．对 $\{e_hy'\}_H$ 显然 $e_hy'k=(e_hy')rv'=(e_hy'r)v'=e_hv'$；而对 $j\bar{\in}H$，因为 $e_jy'\in\mathfrak{M}y'$，因此

$$e_jy'=\alpha_1e_{h_1}y'+\cdots+\alpha_ne_{h_n}y'\quad(h_i\in H,\ \alpha_i\in\Delta),\tag{*}$$

$$e_jy'rv'=(\alpha_1e_{h_1}y'+\cdots+\alpha_ne_{h_n}y')rv'=(\alpha_1e_{h_1}+\cdots+\alpha_ne_{h_n})v'.\tag{**}$$

由(*)得$[e_j-(\alpha_1e_{h_1}+\cdots+\alpha_ne_{h_u})]y'=0$，由上面证明的从 $uy'=0$ 可推出 $uv'=0$ 的性质可得：$[e_j-(\alpha_1e_{h_1}+\cdots+\alpha_ne_{h_n})]v'=0$，于是(**)式变成为：$e_jy'rv'=e_jv'$，这就是说，不管 $j\in H$ 或 $j\bar{\in}H$，总有 $e_jy'rv'=e_jv'$，因此 $y'rv'=v'$，即 $y'k=v'$，所以 $v'\in y'\mathscr{K}$，$(y'^{\perp\mathscr{A}})^{\perp\mathscr{A}^*}\subseteq y'\mathscr{K}$，对 $n=1$ 成立．

现假定当 $n-1$ 时引理已成立，令 $v'\in\Big(\bigcap\limits_{1}^{n}y_i'^{\perp\mathscr{A}}\Big)^{\perp\mathscr{A}^*}$，现只要证明存在 $k\in\mathscr{K}$，使

$$v'-y_n'k\in\Big(\bigcap_{1}^{n-1}y_i'^{\perp\mathscr{A}}\Big)^{\perp\mathscr{A}^*}=\sum_{1}^{n-1}y_i'\mathscr{K}$$

即可．由于$\Big(\bigcap\limits_{1}^{n}y_i'^{\perp\mathscr{A}}\Big)v'=0$，因此若 $x\in\mathscr{A}$ 且 $xy_i'=0(i=1,\ n)$，便可推出 $xv'=0$．用上面同样的办法可证对 $\forall u\in\mathfrak{A}$，若 $uy_i'=0(i=1,\ \cdots,\ n)$，则 $uv'=0$．

令 $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}\Big(\bigcap\limits_{1}^{n-1}y_i'^{\perp\mathscr{A}}\Big)=\sum\limits_{s}\mathfrak{M}s$，$s\in\bigcup\limits_{1}^{n-1}y_i'^{\perp\mathscr{A}}$，显然 $\mathfrak{N}y_i'=0(i=1,\ \cdots,\ n-1)$．且 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子空间，而 $\mathfrak{N}y_n'$ 是 $\mathfrak{M}l$ 的子空间．令 $\mathfrak{N}$ 的基为 $\{f_j\}_J$，考察 $\{f_jy_n'\}_J$，设其中极大线性无关向量组为 $\{f_hy_n'\}_H$．$H\subseteq J$，它构成了 $\mathfrak{N}y_n'$ 的一组基．再设 $\overline{\mathfrak{N}}=\mathfrak{M}(1-l)$，$\mathscr{F}$ 为 $\mathfrak{N}y_n'$ 关于 $\mathfrak{M}l$ 的余空间，即有 $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}y_n'\oplus\mathscr{F}\oplus\overline{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M}l=\mathfrak{N}y_n'\oplus\mathscr{F})$，令 $\mathscr{F}$ 的基为 $\{g_i\}_I$，$\overline{\mathfrak{N}}$ 的基为

$\{p_t\}_T$, $\mathfrak{M}$ 的基就成了 $\{f_h y'_n\}_H\cup\{g_i\}_I\cup\{p_t\}_T$，现作 $\mathfrak{M}$ 的线性变换 k 使：$f_h y'_n k=f_h v'$, $g_i k=p_t k=0$，不难验证 $k=lkl\in\mathscr{K}$. 而对 $j\in H$，我们考虑 $f_j y'_n k$：令 $f_j y'_n=\alpha_1 f_{h_1}y'_n+\cdots+\alpha_m f_{h_m}y'_n$，于是

$$f_j y'_n k=\alpha_1 f_{h_1}y'_n k+\cdots+\alpha_m f_{h_m}y'_n k=\alpha_1 f_{h_1}v'+\cdots+\alpha_m f_{h_m}v' \qquad (***)$$

因为 $[f_j-(\alpha_1 f_{h_1}+\cdots+\alpha_m f_{h_m})]y'_n=0$ 而 $u=f_j-(\alpha_1 f_{h_1}+\cdots+\alpha_m f_{h_m})\in\mathfrak{N}$，因此 $uy'_i=0$ 对 $i=1,\cdots,n-1$ 成立，现又有 $uy'_k=0$，因此 $uy'_i=0$ 对 $i=1,\cdots n$ 皆成立，于是 $u v'=0$，即 $f_j v'=(\alpha_1 f_{h_1}+\cdots+\alpha_m f_{h_m})v'$，故 (***) 式成为 $f_j y'_n k=f_j v'$. 因而对一切 $\{f_j\}_J$ 有 $f_j y'_n k=f_j v'$ 或 $\mathfrak{N}(y'_n k-v')=0$，这就是说我们有 $(\mathfrak{M}s)(y'_n k-v')=0$ 因此 $\left(\bigcap_1^{n-1}y_i'^{\perp\mathscr{A}}\right)(y'_n k-v')=0$，此即 $y'_n k-v'\in\bigcap_1^{n-1}(y_i'^{\perp\mathscr{A}})^{\perp\mathscr{A}^*}$. 至此引理证毕.

推论　当 $\nu=0$ 时，$\mathscr{A}$ 就是极小右理想，且 $\mathscr{A}\cong\mathfrak{M}$（半线性同构），$\mathscr{A}^*\cong\mathfrak{M}^*$（$\mathfrak{M}^*$ 为 $\mathfrak{M}$ 的共轭空间），$\mathscr{K}\cong\Delta$ 为除环，这时对任意的 $y'_i\in\mathfrak{M}^*$，$\sum_1^n y'_i\Delta=\left(\bigcap_1^n y_i'^{\perp\mathfrak{M}}\right)^{\perp\mathfrak{M}_*}$[注]

完全类似可证：

引理 2　设 $\mathscr{A}=l\Omega$, $\mathscr{K}=l\Omega l$, $\mathscr{A}^*=\Omega l$, $x_i\in\mathscr{A}_i\,(i=1,\cdots,n)$，则有

$$\sum_{i=1}^n\mathscr{K}x_i=\left(\bigcap_{i=1}^n x_i^{\perp\mathscr{A}^*}\right)^{\perp\mathscr{A}}$$

命题 2　设 $\mathscr{A}=l\Omega$, $\mathscr{K}=l\Omega l$, $\mathscr{A}'=\mathfrak{A}l$，如果把 $\mathscr{K}$ 看成是 $\mathscr{A}$ 的子空间，则 $\mathscr{K}$ 在 $\mathscr{A}'$-拓扑下是离散的.

证　显然只要证明存在某个 $a'\in\mathscr{A}'$ 使 $a'^{\perp\mathscr{K}}=\{0\}$ 即可. 事实上由 [6] 知 $l\Omega=l\mathfrak{A}$, $l\in l\mathfrak{A}$，不妨令 $l=la$, $(a\in\mathfrak{A})$. 显然由于 l 是幂等元，$lal=l^2=l$，这表明 $l\in\mathscr{A}'$ 而 $l^{\perp\mathscr{K}}=\{x\in\mathscr{K}\,|\,xl=0\}=\{0\}$ 命题得证.

定理 1　设 $(\mathscr{A},\mathscr{A}')$ 是相伴于 $\mathfrak{A}$ 的对偶模，$\mathscr{K}=l\Omega l$, $\mathscr{A}'=\mathfrak{A}l$, $\mathscr{A}$ 取 $\mathscr{A}'$-拓扑，$\mathscr{K}$ 取离散拓扑，又 f 是 $\mathscr{A}\to\mathscr{K}$ 的左 $\mathscr{K}$ 模同态（或如 [6] 称为 $\mathscr{K}$-线性函数），则 f 连续的充要条件是 $f\in\mathscr{A}'$.

证　[6] 已证明 $\mathscr{A}\to\mathscr{K}$ 的 $\mathscr{K}$ 线性函数全体就是 $\mathscr{A}^*=\Omega l$，我们现在要证 f 是连续的等价于 $f\in\mathscr{A}'$.

若 $f\in\mathscr{A}'$，则对 $\mathscr{A}$ 中任一点 x_0，作 x_0 的邻域 $x_0+f^{\perp\mathscr{A}}$，显然对 $\forall x\in x_0+f^{\perp\mathscr{A}}$ 有 $x_0 f=xf$，因此 f 连续. 反之若 f 连续，f 在零点有邻域 $\bigcap_1^n y_i'^{\perp\mathscr{A}}\,(y'_i\in\mathscr{A}')$，使当 $y\in\bigcap_1^n y_i'^{\perp\mathscr{A}}$ 时 $xf=0$，所以 $f\in\left(\bigcap_1^n y_i'^{\perp\mathscr{A}}\right)^{\perp\mathscr{A}^*}=\sum_1^n y'_i\mathscr{K}\subseteq\mathscr{A}'$，　　证毕.

定义 1　设有 $\mathscr{K}_i$ 左模 $\mathscr{A}_i\,(i=1,2)$，若存在一个 $\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_2$ 的映照 S 及 $\mathscr{K}_1\to\mathscr{K}_2$ 的同构 σ，S 是一个加法群同态且对一切的 $k_1\in\mathscr{K}_1$, $x_1\in\mathscr{A}_1$ 皆有 $(k_1x_1)S=k_1^\sigma(x_1S)$，则称 S 为 $\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_2$ 的半模同态. 当 S 是 1——1 映上时称 S 为半模同构.

定义 2　设 $(\mathfrak{M}_i,\mathfrak{M}'_i)$ 是 $\Delta_i\,(i=1,2)$ 上的对偶空间，且 $\mathfrak{M}_1$ 与 $\mathfrak{M}_2$ 半线性同构，Ω_i 是 $\mathfrak{M}_i$ 的线性变换完全环. 又 $\mathscr{A}_i=l_i\Omega_i$, $\mathscr{K}_i=l_i\Omega_i l_i$, l_i 为秩等于 $\aleph_{\nu-1}$ 的幂等元且 $(\mathscr{A}_i,\mathscr{A}'_i)$ 是 $\aleph_\nu$ 型对偶模，$(x_i,y'_i)_i=x_i y'_i$ 是相应的双线性型 [参看 [6]]. 如 $\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_2$ 中有一个半模

注　这就是通常的结论，见 [3] p. 71.

同态(S, σ)，同时又存在从 $\mathscr{A}'_2 \to \mathscr{A}'_1$ 的映照 S' 使对于一切的 $x_1 \in \mathscr{A}_1$，$y'_2 \in \mathscr{A}'_2$ 都有 $(x_1S, y'_2)_2^{\sigma^{-1}} = (x_1, y'_2S')_1$ 成立，则称 S' 为 S 伴随.

命题 3 若 S' 存在，则 S' 是 $\mathscr{A}'_2 \to \mathscr{A}'_1$ 内的半模同态.

证　因为 $(x_1, (y'_2+z'_2)S')_1 = (x_1S, (y'_2+z'_2))_2^{\sigma^{-1}} = (x_1S, y'_2)_2^{\sigma^{-1}} + (x_1S, z'_2)_2^{\sigma^{-1}} = (x_1, y'_2S')_1 + (x_1, z'_2S')_1 = (x_1, y'_2S' + z'_2S')$ 对一切 $x_1 \in \mathscr{A}$ 成立，故 $(y'_2+z'_2)S' = y'_2S + z'_2S'$，又显然 $0S'=0$，因此 S' 是加法群同态. 再考虑$(y'_2k_2)S'$：$(x_1, (y'_2k_2)S')_1 = (x_1S, y'_2k_2)_2^{\sigma^{-1}} = (x_1S, y'_2)_2^{\sigma^{-1}} \cdot k_2^{\sigma^{-1}} = (x_1, y'_2S')_1 k_2^{\sigma^{-1}} = (x_1, (y'_2S')k_2^{\sigma^{-1}})_1$，所以$(y'_2k_2)S' = (y'_2S')k_2^{\sigma^{-1}}$，即 S' 是半模同态. 且相伴的 $\mathscr{K}_2 \to \mathscr{K}_1$ 的同构恰为 σ^{-1}. 容易看出 S' 由 S 唯一决定，且若 S 为半模同构，则 S' 亦然.

定理 2 设$(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}'_i)$，$\mathscr{K}_i$ 的意义同上，(S, σ)是 $\mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ 的半模同态，则 S 连续的充要条件是它的伴随 S' 存在.

证　若 S 连续，固定 $y'_2 \in \mathscr{A}'_2$，对 $\forall x_1 \in \mathscr{A}_1$，$(x_1S, y'_2)_2 = (x_1S)y'_2$. 考虑映照：$x_1 \to x_1S \to (x_1S)y'_2 \to ((x_1S)y'_2)^{\sigma^{-1}}$. $x_1S \to (x_1S)y'_2$. 由于 $y'_2 \in \mathscr{A}'_2$，由定理 1 知这是个连续映照. 又由于 $\mathscr{K}_1$，$\mathscr{K}_2$ 都为离散拓扑空间，故 $(x_1S)y'_2 \to ((x_1S)y'_2)^{\sigma^{-1}}$ 也连续. 因此 $x_1 \to ((x_1S)y'_2)^{\sigma^{-1}}$ 是 $\mathscr{A}_1 \to \mathscr{K}_1$ 的连续性函数，由定理 1 知存在 $y'_1 \in \mathscr{A}'_1$ 使$(x_1S, y'_2)_2^{\sigma^{-1}} = (x_1, y'_1)_1$ 定义 S'：$y'_2S' = y'_1$，故伴随 S' 存在. 反之若 S' 存在，即 $(x_1S, y'_2)_2^{\sigma^{-1}} = (x_1, y'_2S')_1$ 对一切 $x_1 \in \mathscr{A}_1$ 及 $y'_2 \in \mathscr{A}'_2$ 成立，取 $\mathscr{A}_2$ 的 x_1S 的任一邻域 $x_1S + \bigcap_1^n y'^{\perp \mathscr{A}_2}_{2_i}$，再作 x_1 的邻域 $x_1 + \bigcap_1^n (y'_{2_i}S')^{\perp \mathscr{A}_1}$，当 $x \in x_1 + \bigcap_1^n (y'_{2_i}S')^{\perp \mathscr{A}_1}$ 时，不难验证 $xS \in x_1S + \bigcap_1^n y'^{\perp \mathscr{A}_2}_{2_i}$，因而 S 连续.

推论 $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$为 $\aleph_\nu$ 型对偶模，$(x, y') = xy'$ 为相伴的双线性型，则 $\mathscr{A}$ 中的 $\mathscr{K}$-模自同态 S 在对偶拓扑下连续的充要条件为存在伴随 S'，即有 $\mathscr{A}' \to \mathscr{A}'$ 的自同态 S' 使 $(xS, y') = (x, y'S')$ 对一切 $x \in \mathscr{A}$，$y' \in \mathscr{A}'$ 成立.

定理 3 $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$为 $\aleph_\nu$ 型对偶模，(x, y')为其相伴的双线性型，则 $\mathscr{A}$ 的 $\mathscr{K}$-左模自同态 S 连续的充要条件是 S 在 $\mathscr{A}^*$ 中的伴随 S^* 将 $\mathscr{A}'$ 映到 $\mathscr{A}'$ 内.

证　由[6]知$(x, y') = xy'$，这儿 $x \in \mathscr{A}$，$y \in \mathscr{A}'$，且 S 也可看成为 Ω 中的元素，S 对 $\mathscr{A}$ 中元的作用就是 S 作为 Ω 的元素对 $x \in \mathscr{A}$（也作为 Ω 的元素）的右乘. 而 $(xS, y') = (xS)y' = x(Sy')$，因此 S^* 实际上就是 S 作为 Ω 中的元素对 $\mathscr{A}^*$ 中元素的左乘，故 S^* 是始终存在的. 如果现有 $y'S^* \subseteq \mathscr{A}' y' \in \mathscr{A}'$ 对一切 y' 成立，则将 S^* 在 $\mathscr{A}'$ 上的限制记为 S'，显然 S' 是 S 在 $\mathscr{A}'$ 中的伴随，由定理 2 推论知 S 连续. 反之，若 S 连续，S' 就存在且 $\mathscr{A}'S' \subseteq \mathscr{A}'$，将 S 看成是 Ω 中的元素. 则 S 对 $\mathscr{A}'$ 的左乘就是 S^* 的作用，显然仍有 $y'S^* \subseteq \mathscr{A}'$.　　证毕.

定理 3 给出了[6]中提出的 $\mathscr{A}$ 的自同态连续的拓扑描述. 由此我们还可推出当 $\nu=0$ 时[6]中的结构定理就与经典的结构定理完全一致起来了. 因此上述结论可看作是对已为人们熟知的结论的推广.

(二)

在这一节中，我们将证明含 ν-基座本原环的同构同胚定理.

引理3 设 Ω 是 Δ 上左向量空间 $\mathfrak{M}$ 的线性变换完全环, l_1, l_2 是 Ω 中二个秩相同的幂等元,则 $l_1\Omega$ 与 $l_2\Omega$ 分别作为 $\mathscr{K}_1=l_1\Omega l_1$ 及 $\mathscr{K}_2=l_2\Omega l_2$ 左模是半模同构的.

证 设 l_1 相应的秩空间为 $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}l_1$, 令 $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{M}(1-l_1)$, 则 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\oplus\mathfrak{N}_1$. 同样令 $\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}l_2$, $\mathfrak{N}_2=\mathfrak{M}(1-l_2)$, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_2\oplus\mathfrak{N}_2$, 此外,我们还设 $\mathfrak{M}_1$ 的基为 $\{e_i\}_I$, $\mathfrak{N}_1$ 的基为 $\{f_j\}_J$; $\mathfrak{M}_2$ 的基为 $\{u_i\}_I$, $\mathfrak{N}_2$ 的基为 $\{v_j\}_J$, 这儿由于 l_1 与 l_2 秩相同, 因此可采用相同的足标. 取 $a\in\Omega$ 使 $e_ia=u_i$, $f_ja=0$ 及 $b\in\Omega$, 使 $u_ib=e_i$, $v_jb=0$, 不难验证 $ab=l_1$, $ba=l_2$, $l_1a\Omega=l_1\Omega$.

现作 $l_1\Omega\to l_2\Omega$ 的映照 S: $(l_1a\omega)S=l_2\omega$, $(\omega\in\Omega)$, 显然这映照保持加法. 又若 $l_1a\omega=0$, 则 $e_il_1a\omega=0$, 即 $u_i\omega=0$ 或 $u_il_2\omega=0$ 对 $i\in I$ 都成立, 而 $v_jl_2\omega=0$, 所以 $l_2\omega=0$ 这证明了 S 是加法群同态. 类似地若 $l_2\omega=0$ 则有 $l_1a\omega=0$, 此表明核为零. 映上是显然的. 最后要证 S 是半模同构, 首先作 $\mathscr{K}_1=l_1\Omega l_1$ 到 $\mathscr{K}_2=l_2\Omega l_2$ 的映照: $(l_1cl_1)\sigma=l_2bcal_2$, $c\in\Omega$. 容易验证 σ 是一个环同构, 现有 $((l_1cl_1)(l_1a\omega))S=(l_1cl_1a\omega)S=(l_1abcl_1a\omega)S=l_2bl_1a\omega$, 不难验证 $l_1al_2=l_1a$. 因此上面的等式等于: $l_2bcl_1al_2\omega=l_2bcl_1al_2\cdot l_2\omega=l_2bcal_2\cdot l_2\omega=(l_1cl_1)^\sigma((l_1a\omega)S)$, 此即证明了结论.

引理4 设有 $\mathscr{K}_i$-左模 $\mathscr{A}_i(i=1, 2, 3)$ 已知 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 半模同构, $\mathscr{A}_2$ 与 $\mathscr{A}_3$ 半模同构,则 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_3$ 也半模同构.

证 设 (S_1, σ_1) 是 $\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_2$ 的半模同构, (S_2, σ_2) 是 $\mathscr{A}_2\to\mathscr{A}_3$ 的半模同构, 显然 $(S_1S_2, \sigma_1\sigma_2)$ 是 $\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_3$ 的半模同构.

定理4 (同构同胚定理)设 $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1')$ 及 $(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2')$ 分别是除环 Δ_1, Δ_2 上的对偶空间, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ 分别为 $\mathfrak{M}_1$ 与 $\mathfrak{M}_2$ 上的线性变换稠密环且分别与 $\mathfrak{M}_1'$, $\mathfrak{M}_2'$ 相伴, 又 $\mathfrak{A}_i(i=1, 2)$ 都有 ν-基座 $\mathfrak{S}_i$, 相伴的 $\aleph_\nu$ 型对偶模分别为 $(\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_i')$. 假定此时有一个 $\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2$ 的同构 s, 则必有一个 $\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_2$ 的半模同构 (S, σ) 而且对 $\forall r_1\in\mathfrak{A}_1$, 有 $r_1^s=S^{-1}r_1S$, 此外, S 在对偶拓扑下是一个同胚映照. S 的伴随 S' 是模 $\mathscr{A}_2'\to\mathscr{A}_1'$ 的半模同构且也是一个同胚映照.

证 分三步来证.

(i) 由[6]知存在一个秩小于 $\aleph_\nu$ 的幂等元 $l_1\in\mathfrak{A}_1$ 使 $\mathscr{A}_1=l_1\mathfrak{A}_1$, 显然 l_1^s 也是 $\mathfrak{A}_2$ 幂等元且由于 s 是同构, l_1^s 的秩必与 l_1 相同. 现在我们先假定 $l_2=l_1^s$ 且 $\mathscr{A}_2=l_2\mathfrak{A}_2$, 作 $\mathscr{A}_1=l_1\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathscr{A}_2=l_2\mathfrak{A}_2$ 的映照 S: $(l_1a_1)S=l_2a_1^s$. 容易验证这是个加法群同构. 再作 $\mathscr{K}_1=l_1\mathfrak{A}_1l_1$ 到 $\mathscr{K}_2=l_2\mathfrak{A}_2l_2$ 的映照 σ: $(l_1a_1l_1)\sigma=l_1a_1^sl_2$ $(a_1\in\mathfrak{A}_1)$. 同样不难验证 σ 是环同构且 (S, σ) 是 $\mathscr{A}_1\to\mathscr{A}_2$ 的半模同构. 再设 $r_1\in\mathfrak{A}_1$, 对 $\forall l_2a_1^s\in\mathscr{A}_2$, $(l_2a_1^s)S^{-1}r_1S=((l_1a_1)r_1)S=l_2(a_1r_1)^s=l_2a_1^sr_1^s=(l_2a_1^s)r_1^s$, 因此对一切 $r_1\in\mathfrak{A}_1$, $r_1^s=S^{-1}r_1S$ 成立.

(ii) 现设 $\mathscr{A}_2=l_2\mathfrak{A}_2$, 但不假定 $l_2=l_1^s$. 由于 l_1^s 与 l_2 秩相等, 由引理3及引理4及(i)知 $l_1\mathfrak{A}_1$ 与 $l_2\mathfrak{A}_2$ 仍半模同构. (这儿需说明的是由于 $l_1^s\mathfrak{A}_2=l_1^s\Omega_2$, $l_2\Omega_2=l_2\mathfrak{A}_2$, 因此仍可用引理3). 为方便起见我们仍沿用引理3证明中的 a, b, 需注意的是 a, $b\in\Omega_2$, $ab=l_1^s$, $ba=l_2$, $l_1^sa=a$, $al_2=a$, $l_2b=b$, $bl_1^s=b$, 由于 $a=l_1^sa\in l_1^s\Omega_2=l_1^s\mathfrak{A}_2$, 而 $l_1^s\in\mathfrak{A}_2$, 所以 $a\in\mathfrak{A}_2$, 同理 $b\in\mathfrak{A}_2$, 现设 $l_1\mathfrak{A}_1$ 到 $l_1^s\mathfrak{A}_2$ 的半模同构为 S_1, $l_1^s\mathfrak{A}_2$ 到 $l_2\mathfrak{A}_2$ 的同构为 S_2, 则 $l_1\mathfrak{A}_1$ 到 $l_2\mathfrak{A}_2$ 的同构 $S=S_1S_2$, 由于 $(l_1r_1)S_1=l_1^sr_1^s=l_1^sabr_1^s$ $(r_1\in\mathfrak{A}_1)$, 我们得 $(l_1^sr_1^s)S_2=l_2br_1^s$, 故 $(l_1r_1)S=(l_1r_1)S_1S_2=l_2br_1^s$, 对 $\forall l_2x_2\in\mathscr{A}_2$, 我们有 $(l_2x_2)S^{-1}r_1S=(((l_2x_2)S^{-1})r_1)S=((l_1a^{s^{-1}}x_2^{s^{-1}})r_1)S=(l_1a^{s^{-1}}x_2^{s^{-1}}r_1)S=l_2b(a^{s^{-1}}x_2^{s^{-1}}r_1)^s=l_2x_2r_1^s$, 因此 $r_1^s=S^{-1}r_1S$.

(iii) 最后证明 S 是同胚. 先证 S^{-1} 连续或证明 S^{-1} 的伴随存在. 对 $\forall y_1'\in\mathscr{A}_1'$, 令

$y'_2S^{-1'}=y'^s_1a$, 由于 $al_2=a$, $y'^s_1\in\mathfrak{A}_2$, $a\in\mathfrak{A}_2$, 所以有 $y'^s_1a\in\mathscr{A}'_2$, 这表明 $S^{-1'}$,是 $\mathscr{A}'_1\to\mathscr{A}'_2$ 的映照，现来证它恰为 S^{-1} 的伴随．对 $\forall l_2x_2\in\mathscr{A}_2$, $(l_2x_2)S^{-1}=l_1a^{s^{-1}}x_2^{s^{-1}}$，因此我们有：$((l_2x_2)S^{-1},\ y'_1)^{\sigma}_1=(l_1a^{s^{-1}}x_2^{s^{-1}},\ y'_1)^{\sigma}_1=(l_1a^{s^{-1}}x_2^{s^{-1}}y'_1)\sigma=l_2ba\,x_2y'^s_1\,al_2=l_2\,x_2\,y'^s_1\,a$, 另一方面，$(l_2x_2,\ y'_1s^{-1'})_2=(l_2x_2,\ y'^s_1a)_2=l_2x_2y'^s_1\,a$, 因此 $((l_2x_2)S^{-1},y'_1)^{\sigma}_1=(l_2x_2,\ y'_1S^{-1'})_2$, 这表明 $S^{-1'}$ 恰为 S^{-1} 的伴随，故 S^{-1} 连续.

对 S 的连续性也可类似证明，我们只指出 S' 可定义为 $y'_2S'=y_2'^{s^{-1}}b^{s^{-1}}(y'_2\in\mathscr{A}'_2)$．这就证明了 S 是同胚映照．至于 $(S',\ \sigma^{-1})$是 $\mathscr{A}'_2\to\mathscr{A}'_1$ 的半模同构同胚可用类似办法证明.

证毕.

推论 1 条件同定理，另外设 $\mathscr{L}(\mathscr{A}_i;\ \mathscr{A}'_i)$是 $\mathscr{A}_i(i=1,\ 2)$的连续自同态完全环，则 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 的同构可以扩张为 $\mathscr{L}(\mathscr{A}_1,\ \mathscr{A}'_1)$到 $\mathscr{L}(\mathscr{A}_2,\ \mathscr{A}'_2)$的同构.

证 设 $u_1\in\mathscr{L}(\mathscr{A}_1,\ \mathscr{A}'_1)$令 $u_1^{\bar{s}}=S^{-1}u_1S$, 不难验证这是 s 的扩张.

推论 2 条件同定理，另设 $\mathfrak{S}^i_\nu(i=1,\ 2)$是 $\mathfrak{A}_i$ 的 ν-基座，则 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 的同构在 $\mathfrak{S}'_\nu$ 上的限制是 $\mathfrak{S}^1_\nu$ 到 $\mathfrak{S}^2_\nu$ 的同构.

证显然.

在上面的讨论中，我们始终假定 ν 不是极限序数，为了把推论 1 与 2 推广到 ν 是极限序数的情况，我们先证：

引理 5 设 μ 与 ν 不是极限序数．l_μ, l_ν 是 Ω 的二个幂等元且 $l_\mu\leqslant l_\nu$（即 $l_\mu l_\nu=l_\nu l_\mu=l_\mu$, 参看[3]第三章)．又 l_μ 的秩小于 l_ν 的秩，$\mathscr{A}_\mu=l_\mu\Omega$, $\mathscr{A}_\nu=l_\nu\Omega$, $\mathfrak{A}$ 是含 ν-基座的稠密环，l_μ、l_ν 属于 $\mathfrak{A}$, 又设 $\mathscr{A}'_\mu=\mathfrak{A}l_\mu$, $\mathscr{A}'_\nu=\mathfrak{A}l_\nu$, 则 $\mathscr{L}(\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{A}'_\mu)\supseteq\mathscr{L}(\mathscr{A}_\nu,\ \mathscr{A}'_\nu)$, 这儿 $\mathscr{L}$ 的意义同前.

证 设 $u\in\mathscr{L}(\mathscr{A}_\nu,\ \mathscr{A}'_\nu)$, $\mathscr{A}_\mu u=(l_\mu\Omega)u\subseteq l_\mu\Omega=\mathscr{A}_\mu$, 又若 $\mathscr{A}_\mu u=0$, 则有 $u=0$, 因此 $\mathscr{L}(\mathscr{A}_\nu,\ \mathscr{A}'_\nu)$中任一元 u 皆可看成为 $\mathscr{A}_\mu$ 的自同态．又因 u 连续，因此 u 对 $\mathscr{A}'_\nu$ 的左乘(相当于 u 的伴随映照)仍落在 $\mathscr{A}'_\nu$ 中，而 $u\mathscr{A}'_\mu\subseteq\mathscr{A}'_\mu$ 是显然的，此即表明 $u\in\mathscr{L}(\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{A}'_\mu)$.

一般来说，当然 $\mathscr{L}(\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{A}'_\mu)\supset\mathscr{L}(\mathscr{A}_\nu,\mathscr{A}'_\nu)$.

若 ν 是一极限序数，由[6]，对任一非极限序数 $\mu<\nu$, 有 $\mathscr{L}(\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{A}'_\mu)\supseteq\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{S}_\mu$, 这时 $\mathfrak{A}$ 的 ν-基座 $\mathfrak{S}_\nu$ 可定义为 $\mathfrak{S}_\nu=\bigcup_{\mu<\nu}\mathfrak{S}_\mu$, 如令 $\mathscr{L}_\nu=\bigcap_{\mu<\nu}\mathscr{L}(\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{A}'_\mu)$, 则有 $\mathscr{L}_\nu\supseteq\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{S}_\nu$．下面我们简记 $\mathscr{L}(\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{A}'_\mu)$为 $\mathscr{L}_\mu$, 从 $\mathscr{L}_\nu=\bigcap_{\mu<\nu}\mathscr{L}_\mu$ 及 $\mathfrak{S}_\nu=\bigcup_{\mu<\nu}\mathfrak{S}_\mu$ 可看出，只要 $\mathscr{L}^1_\mu\cong\mathscr{L}^2_\mu$ 对一切 $\mu<\nu$ 成立，且每个较大的环的同构是较小的环同构的扩张，则 $\mathscr{L}^1_\nu\cong\mathscr{L}^2_\nu$, 同样 $\mathfrak{S}^1_\nu\cong\mathfrak{S}^2_\nu$, 而这可从定理 4 的二个推论得到．因此无论 ν 是否为极限序数，推论 1, 2, 总成立.

我们以如下的定理作为对上述讨论的总结：

定理 5 $(\Delta_i,\ \mathfrak{M}_i)$, $\mathfrak{A}_i(i=1,\ 2)$意义同定理 4, $\mathfrak{A}_1\cong\mathfrak{A}_2$．则相应于每个非极限序数 $\mu\leqslant\nu$, 都存在一个幂等元 $l^i_\mu\in\mathfrak{A}_i$, 满足当 $\mu\leqslant\xi$ 时 $l^i_\mu\leqslant l^i_\xi$(ξ 也为小于 ν 的序数)，同时还存在一族对偶模 $\{(\mathscr{A}^i_\mu,\ \mathscr{A}^{i\prime}_\mu)\}_\mu$, 其中 $\mathscr{A}^i_\mu=l^i_\mu\mathfrak{A}_i$, $\mathscr{A}^{i\prime}_\mu=\mathfrak{A}_il^i_\mu$, 记 $\mathscr{L}^i_\mu=\mathscr{L}(\mathscr{A}^i_\mu,\ \mathscr{A}^{i\prime}_\mu)$，而当 μ 为极限序数时记 $\mathscr{L}^i_\mu=\bigcap_{\xi<\mu}\mathscr{L}^i_\xi$, 则有如下的包含链：

$$\Omega_1\supseteq\mathscr{L}^1_0\supseteq\cdots\supseteq\mathscr{L}^1_\mu\supseteq\cdots\supseteq\mathscr{L}^1_\nu\supseteq\mathfrak{A}_1\supseteq\mathfrak{S}^1_\nu\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{S}^1_\mu\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{S}^1_0$$
$$\Omega_2\supseteq\mathscr{L}^2_0\supseteq\cdots\supseteq\mathscr{L}^2_\mu\supseteq\cdots\supseteq\mathscr{L}^2_\nu\supseteq\mathfrak{A}_2\supseteq\mathfrak{S}^2_\nu\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{S}^2_\mu\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{S}^2_0$$

且两链中对应的各项都是同构的，而且这些同构可以看成是 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 的同构的扩张或限

制.

(三)

在这一节中我们将讨论含于$\mathfrak{S}_\nu$中的单侧理想的结构. $\mathfrak{S}_\nu$的双侧理想已在[6]中有详尽的讨论. 众所周知当$\nu=0$时$\mathfrak{S}_0$的任一单侧理想皆可表示为二个向量空间的张量积的形式. 在$\nu\neq 0$时情况要复杂得多. 但对一类比较特殊的单侧理想仍有与当$\nu=0$时相类似的结果. 我们在这儿为了与前面的讨论相一致, 不采用张量积的形式而直接用环乘法来表示, 不难看出, 它是与模张量表示是等价的.

定义3 环R的一个左理想称为是直接的, 若它作为左R-模是R的一个直接被加项. 同样, R的一个右理想称为是直接的, 若它作为右R-模是R的一个直接被加项.

引理6 设$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$作为左$\mathscr{K}$-模的直接被加项, 则$\mathfrak{S}_\nu$的左理想$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}=\{t\in\mathfrak{S}_\nu \mid \mathscr{A}t\subseteq\mathscr{B}\}$可表示为$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}=\mathscr{A}'\mathscr{B}$.

证 $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$是左理想显然. 对$\forall\Sigma a_i'b_i\in\mathscr{A}'\mathscr{B}$, 这儿$a_i'\in\mathscr{A}'$, $b_i\in\mathscr{B}$, 因为$\mathscr{A}(\Sigma a_i'b_i)\subseteq\Sigma\mathscr{K}b_i\subseteq\mathscr{B}$, 所以$\mathscr{A}'\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$. 反过来, 对$\forall t\in\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$, 因为$t\in\mathfrak{S}_\nu=\mathfrak{A}l\mathfrak{A}=\mathscr{A}'\mathscr{A}$, 故可设$t=\Sigma a_i'a_i$其中$a_i'\in\mathscr{A}'$, $a_i\in\mathscr{A}$. 又因$\mathscr{A}=\mathscr{B}\oplus C$(对某个$C$)故可令$a_i=b_i+c_i$其中$b_i\in\mathscr{B}$, $c_i\in C$. 于是$t=\Sigma a_i'b_i+\Sigma a_i'c_i$. 对$\forall x\in\mathscr{A}$, 我们有: $xt=x(\Sigma a_i'b_i)+x(\Sigma a_i'c_i)=\Sigma xa_i'b_i+\Sigma xa_i'c_i\in\mathscr{B}$. 因为$\Sigma xa_i'b_i\in\mathscr{B}$, 因此$x(\Sigma a_i'c_i)=0$, 此即$\mathscr{A}(\Sigma a_i'c_i)=0$. 于是$\Sigma a_i'c_i=0$, 即$t=\Sigma a_i'b_i\in\mathscr{A}'\mathscr{B}$. 证毕.

类似可证:

引理7 设$\mathscr{B}'$是$\mathscr{A}'$作为右$\mathscr{K}$-模的直接被加项, 则$\mathfrak{S}_\nu$的右理想$\mathscr{R}_{\mathscr{B}'}=\{r\in\mathfrak{S}_\nu \mid r\mathscr{A}'\subseteq\mathscr{B}'\}$可表示为$\mathscr{R}_{\mathscr{B}'}=\mathscr{B}'\mathscr{A}$.

引理8 若$\mathscr{T}$是$\mathfrak{S}_\nu$的直接左理想, 则$\mathscr{B}=\mathscr{A}\mathscr{T}$是$\mathscr{A}$的直接被加项.

证 设$\mathfrak{S}_\nu=\mathscr{T}\oplus\mathscr{D}$(对某个$\mathscr{D}$), 这儿$\mathscr{D}$当然也是左理想, 由于$\mathscr{T}$是左理想, $\mathscr{A}=l\Omega=l\mathfrak{S}_\nu\in\mathfrak{S}_\nu$故$\mathscr{A}\mathscr{T}\subseteq\mathscr{T}$, 同样$\mathscr{A}\mathscr{D}\subseteq\mathscr{D}$, 但$\mathscr{T}\cap\mathscr{D}=0$, 因此有$\mathscr{A}\mathscr{T}\cap\mathscr{A}\mathscr{D}=0$. 又$\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathfrak{S}_\nu$, 对$\forall x\in\mathscr{A}$, 可以写$x=\Sigma a_is_i$, 其中$a_i\in\mathscr{A}$, $s_i\in\mathfrak{S}_\nu$, 再由$\mathfrak{S}_\nu=\mathscr{T}\oplus\mathscr{D}$得$s_i=t_i+d_i$, 这儿$t_i\in\mathscr{T}$, $d_i\in\mathscr{D}$, 于是$x=\Sigma a_it_i+\Sigma a_id_i$, 此即$\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{T}\oplus\mathscr{A}\mathscr{D}$.

同理可证:

引理9 若$\mathscr{R}$是$\mathfrak{S}_\nu$的直接右理想, 则$\mathscr{B}'=\mathscr{R}\mathscr{A}'$是$\mathscr{A}'$的直接被加项.

定理6 若$\mathscr{T}$是$\mathfrak{S}_\nu$的直接左理想, 则必存在$\mathscr{A}$的某个直接被加项$\mathscr{B}$使$\mathscr{T}=\mathscr{A}\mathscr{B}$.

证 令$\mathscr{B}=\mathscr{A}\mathscr{T}$. 由引理8知$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$的直接被加项. 再作$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}=\{t\in\mathfrak{S}_\nu \mid \mathscr{A}t\subseteq\mathscr{B}\}$, 则$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}=\mathscr{A}'\mathscr{B}$, 现只需证明$\mathscr{T}=\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$. 事实上, 由$\mathscr{A}\mathscr{T}=\mathscr{B}$知$\mathscr{T}\subseteq\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$; 反之$\mathscr{T}_{\mathscr{B}}=\mathscr{A}'\mathscr{B}=\mathscr{A}'\mathscr{A}\mathscr{T}\subseteq\mathscr{T}$, 即有$\mathscr{T}=\mathscr{A}'\mathscr{B}$.

定理7 若$\mathscr{R}$是$\mathfrak{S}_\nu$的直接右理想, 则存在$\mathscr{A}'$的直接被加项$\mathscr{B}'$使$\mathscr{R}=\mathscr{B}'\mathscr{A}$.

同理可证.

引理10 $\mathfrak{S}_\nu$是Von Neumann正则环.

证 对$\forall a\in\mathfrak{S}_\nu$, 考虑相伴的向量空间$\mathfrak{M}$的子空间$\mathfrak{M}a$, 作$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}a\oplus\mathfrak{N}$, 令$\mathfrak{M}a$的基为$\{e_ia\}_I$中的极大无关元组$\{e_ia\}_H$, 这儿$\{e_i\}_I$为$\mathfrak{M}$的基, $H\subseteq J$. 显然$\mathrm{card}\,H<\aleph_\nu$, 故存

在 $x\in\mathfrak{S}_\nu$. 使 $e_iax=e_i$, $i\in H$, 不难验证此时便有 $axa=a$, 因此 $\mathfrak{S}_\nu$ 正则.

定理 8 $\mathfrak{S}_\nu$ 的有限生成的右（或左）理想 $\mathscr{R}$（或 $\mathscr{T}$）都可表示为 $\mathscr{R}=\mathscr{B}'\mathscr{A}$（$\mathscr{T}=\mathscr{A}'\mathscr{B}$）. 这儿 $\mathscr{B}'$ 为 $\mathscr{A}'$ 的直接被加项(或 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的直接被加项).

证　因为正则环的任一有限生成单侧理想皆可由一幂等元生成[见 12]，因此必是直接的.　证毕.

参 考 文 献

[1] Jacobson N., Structure theory of simple rings without finiteness assumptions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57**(1945), 228—245.

[2] Jacobson N., On the theory of primitive rings, *Ann. of Math.*, **48**(1947), 8-21.

[3] Jacobson N., Structure of rings, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, **37**(1964).

[4] Wolfson. K. G., Some remarks on ν-transitive rings and liner compactness, *Proc Amer Math. Soc.*, **5** (1954), 617—619.

[5] Walfson. K. G., An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations, *Amer. J. Math*, **75**(1953), 358—386.

[6] 许永华,关于本原环的结构,将发表

[7] 许永华,与线性变换的完全环同构的环理论(I),数学学报, **22**(1979), 204—218.

[8] 许永华,关于含有极小单侧理想的本原环的结构,中国科学, **2**(1981), 160—168

[9] Johnson. R. E., Equivalence rings, *Duke. Math. J.*, **15**(1948), 787—793.

[10] Amitsur. S. A., Rins of quotients and Morita context. *J. Algebra*, **17**(1971), 273—298.

[11] Zelmanovitz. M. J., Dense rings of linear transformations, *Ring theory II. Proc. of the second ohalona conference Publ.* (1977).

[12] Goodearl. K. R., Von Neumann regular rings, *Postman Publ.* (1979).

ON THE STRUCTURE OF PRIMITIVE RINGS WITH ν-SOCLES

YAO MUSHENG
(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper, we generalize the classical structure theorem and isomorphism theorem of primitive rings. Let $\mathfrak{A}$ be a primitive ring, then $\mathfrak{A}$ can be regarded as a dense subring of linear transformations in a vector space $\mathfrak{M}$. Let Ω be the ring of all linear transformations of $\mathfrak{M}$, we define $\mathfrak{S}_\nu = T_\nu \cap \mathfrak{A}$, where T_ν is the ideal of Ω which contains all linear transformations t, with rank $t < \aleph_\nu$. If $\mathfrak{S}_\nu$ is $\aleph_\nu$-transitive, we call $\mathfrak{S}_\nu$ the ν-socle of $\mathfrak{A}$.

If $\mathfrak{A}$ is a primitve ring with ν-socle $\mathfrak{S}_\nu$, then we can find a pair of $\mathscr{K}$-modules $(\mathscr{K}, \mathscr{A}')$, where $\mathscr{H}$ is a subring of $\mathfrak{S}_\nu$, and we can define a dual topology in $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$ such that $\mathfrak{A}$ is contained in the ring $\mathscr{L}(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$ of all continuous endormorphisms of $\mathscr{A}$. We obtained an inclusion relation $\mathscr{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') \supseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}, \mathscr{A}') \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{S}_\nu \supseteq \mathfrak{S}_0$, which refines the relation due to Jacobson: $\mathscr{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{S}_0$[3]. We also proved that $\mathscr{A}$ and $\mathscr{A}'$ are uniquely determined by $\mathfrak{A}$ within semi-module isomorphism. In the last section, we obtained a structure theorem of finitely generated one-sided ideals of $\mathfrak{S}_\nu$.