数 学 年 刊
3 (5) 1982

关于算子的 J-正常扩张

伍 镜 波
（南开大学）

1．在文献[1, 2]中，Halmos 和 Bram 证明了 Hilbert 空间 H 中有界线性算子 T 在 Hilbert 空间 $K\supseteq H$ 中有正常扩张的充要条件是对一切 $x_0, x_1, \cdots, x_r\in H$，均有 $\sum\limits_{i,j=0}^{r}(T^j x_i, T^i x_j)\geqslant 0$．Bram 还得到 T 有上述扩张的另一个充要条件是 $e^{-\bar{\zeta}T^*}e^{\zeta T}$ 为复平面上正定算子值函数．本文讨论 Hilbert 空间中算子在 Понтрягин 空间中有 J-正常扩张的问题．定理 1 证明了 Hilbert 空间 H 中有界线性算子 T 在 Π_n 型 Понтрягин 空间 $\Pi\supseteq H$ 中有极小 J-正常扩张的充要条件是对任何非负整数 r 和任何 $\{x_{ik}\in H; i, k=0, 1, \cdots, r\}$，Hermite 形式 $\sum\limits_{i,j,k,l=0}^{r}(T^j x_{ik}, T^i x_{jl})\alpha_{ik}\bar{\alpha}_{jl}$ 的正规形式含有不超过 n 个负二次式，而且确有 r 和 $\{x_{ik}\}$，使上述 Hermite 形式的正规形式含有 n 个负二次式．定理 2 证明了 T 有上述扩张的另一个充要条件是 $e^{-\bar{\zeta}T^*}e^{\zeta T}$ 为复平面上 n 阶拟正定算子值函数（定义见 § 3），但所用方法与 Bram 有所不同．定理 1 和 2 对 $n=0$ 的情况就是 Halmos 和 Bram 的定理．定理 3 说明上述极小 J-正常扩张在把 J-酉等价的算子等同看待的意义下是唯一的．

关于 Понтрягин 空间及其上算子理论，可参看文献[3]．所不同的是这里的 Π_n 型 Понтрягин 空间是指完备的具有 n 个负二次式的不定内积空间．Π_0 型 Понтрягин 空间就是通常的 Hilbert 空间．如无特别说明，Hilbert 空间 H 中内积用 $(\cdot,\cdot)$ 表示，Понтрягин 空间 Π 中不定内积用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示；H 和 Π 中算子分别相对于 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的共轭算子都用加“*”表示．

2．设 T 为 Hilbert 空间 H 中有界线性算子，若存在 Π_n 型 Понтрягин 空间 $\Pi\supseteq H$，在 H 中按原内积和按 Π 中不定内积一致，存在 Π 中有界 J-正常算子 $\tilde{T}\supseteq T$（即 $\tilde{T}^*\tilde{T}=\tilde{T}\tilde{T}^*$．对 $x\in H$，$\tilde{T}_x=T_x$），则称 T 为 H 中 J-次正常算子，Π 中 $\tilde{T}$ 称为 H 中 T 的 J-正常扩张；若 $\{\tilde{T}^{*k}x: x\in H, k=0, 1, 2, \cdots\}$ 所张闭子空间恰为 Π，则称 Π 中 $\tilde{T}$ 为 H 中 T 的极小 J-正常扩张，而称 T 为 H 中 n 阶 J-次正常算子．下面的分析表明阶数 n 由算子 T 唯一确定．

设 T 在 Π_n 型 Понтрягин 空间 $\Pi\supseteq H$ 中有极小 J-正常扩张 $\tilde{T}$，则对一切非负整数 r 和一切 $x_{ik}\in H\,(i, k=0, 1, \cdots, r)$，Hermite 形式

$$\sum_{i,j,k,l=0}^{r}(T^j x_{ik}, T^i x_{jl})\alpha_{ik}\bar{\alpha}_{jl}=\sum_{i,j,k,l=0}^{r}\langle\tilde{T}^j x_{ik}, \tilde{T}^i x_{jl}\rangle\alpha_{ik}\bar{\alpha}_{jl}=\sum_{i,j,k,l=0}^{r}\langle\tilde{T}^{*i}\tilde{T}^j x_{ik}, x_{jl}\rangle\alpha_{ik}\bar{\alpha}_{jl}$$

$$=\sum_{i,j,k,l=0}^{r}\langle\tilde{T}^j\tilde{T}^{*i}x_{ik}, x_{jl}\rangle\alpha_{ik}\bar{\alpha}_{jl}=\sum_{i,j,k,l=0}^{r}\langle\tilde{T}^{*i}x_{ik}, \tilde{T}^{*j}x_{jl}\rangle\alpha_{ik}\bar{\alpha}_{jl}=\left\langle\sum_{i,k=0}^{r}\alpha_{ik}\tilde{T}^{*i}x_{ik}, \sum_{i,k=0}^{r}\alpha_{ik}\tilde{T}^{*i}x_{ik}\right\rangle$$

本文 1980 年 5 月 15 日收到．

的正规形式含有不超过 n 个负二次式. 由于 $\tilde{T}$ 是 T 的极小扩张, 于是可选出 r 和 $x_{ik}\in H(i,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ r)$, 使 $\{\tilde{T}^{*i}x_{ik}:\ i,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ r\}$ 所张线性集合有 n 维负子空间. 对这组 $x_{ik}\in H(i,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ r)$, 上述 Hermite 形式含有 n 个负二次式.

定理 1 设 T 是 Hilbert 空间 H 中有界线性算子, $T\neq 0$. 为使 T 是 n 阶 J-次正常算子, 必须且只须对一切非负整数 r 和一切 $x_{ik}\in H(i,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ r)$, Hermite 形式 $\sum\limits_{i,j,k,l=0}^{r}(T^jx_{ik},\ T^ix_{jl})\ \alpha_{ik}\bar{\alpha}_{jl}$ 的正规形式含有不超过 n 个负二次式, 而且确有一个 r 和一组 $x_{ik}\in H(i,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ r)$, 使上述 Hermite 形式的正规形式含有 n 个负二次式.

证 只须证明充分性. 不妨设 $0<\|T\|<1$. 分五步进行.

i) 记 R 为 $f=\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的全体, 其中

$$f_k=\sum_{j=0}^{\infty}T^{*j}T^kx_j\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\tag{1}$$

$x_j\in H(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$, 使

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|x_j\|^2<\infty.\tag{2}$$

加法和数乘照常规定. 对 $f=\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$, $f'=\{f'_k\}_{k=0}^{\infty}\in R$, 其中 f 由式(1)和(2)规定, f' 相应的向量列为 $x'_j\in H(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$, 定义

$$\langle f,\ f'\rangle=\sum_{i,j=0}^{\infty}(T^jx_i,\ \ T^ix'_j)=\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}T^{*i}T^jx_i,\ x'_j\Big).\tag{3}$$

易知它由 f 和 f' 唯一确定. 对 $f,\ f',\ f''\in R$, 复数 $\alpha,\ \beta$, 我们有

$$\langle\alpha f+\beta f',\ f''\rangle=\alpha\langle f,\ f''\rangle+\beta\langle f',\ f''\rangle,\ \langle f,\ f'\rangle=\overline{\langle f',f\rangle}.\tag{4}$$

如果 $f\in R$, 对一切 $f'\in R$, 均有 $\langle f,\ f'\rangle=0$, 显然 $f=0$.

和文献[5]定理 1 或引理 3 的证明类似, 可知 R 的极大负子空间的维数为 n. 记 Π_- 是 R 中 n 维负子空间, Π_+^0 为 Π_- 在 R 中按不定内积(3)的正交补空间, 则 Π_+^0 是正子空间. 于是 $R=\Pi_+^0\oplus\Pi_-$. 对 $f,\ f'\in R$, 作分解 $f=f_++f_-$, $f'=f'_++f'_-$, 其中 $f_+,\ f'_+\in\Pi_+^0$, $f_-,\ f'_-\in\Pi_-$, 定义

$$[f,\ f']=\langle f_+,\ f'_+\rangle-\langle f_-,\ f'_-\rangle,\tag{5}$$

则 R 按$[\cdot,\ \cdot]$成内积空间. 令

$$|f|=\sqrt{[f,\ f]},\tag{6}$$

将 Π_+^0 按 $|\cdot|$ 完备化, 得 Π_+. 于是

$$\Pi=\Pi_+\oplus\Pi_-\tag{7}$$

是 Π_n 型 Понтрягин 空间.

ii) 对 $x\in H$, 令 $f_x=\{T^kx\}_{k=0}^{\infty}$. 则对 $x_1,\ x_2\in H$, 复数 $\beta_1,\ \beta_2$, 恒有

$$f_{\beta_1x_1+\beta_2x_2}=\beta_1f_{x_1}+\beta_2f_{x_2},$$
$$\langle f_{x_1},\ f_{x_2}\rangle=(x_1,\ x_2).\tag{8}$$

对 $f=\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$, 定义

$$\tilde{T}f=\{f_{k+1}\}_{k=0}^{\infty},\tag{9}$$

显然 $\tilde{T}f\in R$. 对 $x\in H$, $f_{Tx}=\{T^{k+1}x\}_{k=0}^{\infty}=\tilde{T}f_x$. 把 x 和 f_x 等同看待, H 便成为 $R\subseteq\Pi$ 的闭正子空间, $\tilde{T}$ 是 H 中 T 在 R 上的扩张.

iii) 现在证明 $\tilde{T}$ 可以扩张为 Π 中有界算子. 置 $\bar{H}=\bigoplus_0^\infty H$, 定义 $\bar{H}$ 中算子

$$\bar{T}=\{T^{*i}T^j\}_{i,j=0}^\infty. \tag{10}$$

对 $\bar{x}=\{x_k\}_{k=0}^\infty\in\bar{H}$, 其中 $x_k\in H$, $k=0, 1, 2, \cdots$, 因为

$$\|\bar{T}\bar{x}\|^2=\sum_{j=0}^\infty\left\|\sum_{i=0}^\infty T^{*i}T^jx_i\right\|^2\leqslant\sum_{j=0}^\infty\left(\sum_{i=0}^\infty\|T\|^{i+j}\|x_i\|\right)^2\leqslant\left(\sum_{j=0}^\infty\|T\|^{2j}\right)^2\sum_{i=0}^\infty\|x_i\|^2$$
$$=\frac{\|\bar{x}\|^2}{(1-\|T\|^2)^2},$$

故 $\bar{T}$ 是 $\bar{H}$ 中有界算子. 但对 $\bar{x}=\{x_k\}_{k=0}^\infty$, $\bar{y}=\{y_k\}_{k=0}^\infty\in\bar{H}$, 可得

$$(\bar{T}\bar{x}, \bar{y})=\sum_{i,j=0}^\infty(T^{*i}T^jx_i, y_j)=(\bar{x}, \bar{T}\bar{y}),$$

即 $\bar{T}$ 在 $\bar{H}$ 中自共轭. 令 $\bar{S}=\{\delta_{ij}T\}_{i,j=0}^\infty$, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号. 对 $\bar{x}=\{x_k\}_{k=0}^\infty\in\bar{H}$, 我们有

$$\|\bar{T}\bar{S}\bar{x}\|^2=\sum_{j=0}^\infty\left\|\sum_{i=0}^\infty T^{*i}T^{j+1}x_i\right\|^2=\sum_{j=1}^\infty\left\|\sum_{i=0}^\infty T^{*i}T^jx_i\right\|^2\leqslant\sum_{j=0}^\infty\left\|\sum_{i=0}^\infty T^{*i}T^jx_i\right\|^2=\|\bar{T}\bar{x}\|^2.$$

但 $\|\bar{S}\|\leqslant\|T\|$, 所以 $\|\bar{S}^*\|\leqslant\|T\|<1$. 于是

$$\|\bar{S}^*|\bar{T}|\bar{S}\bar{x}\|^2\leqslant\||\bar{T}|\bar{S}\bar{x}\|^2=(|\bar{T}|\bar{S}\bar{x}, |\bar{T}|\bar{S}\bar{x})=(\bar{T}\bar{S}\bar{x}, \bar{T}\bar{S}\bar{x})\leqslant\|\bar{T}\bar{x}\|^2=\||\bar{T}|\bar{x}\|^2.$$

由 Heinz 不等式[4], 对 $\bar{x}\in\bar{H}$, 我们得到

$$(\bar{S}^*|\bar{T}|\bar{S}\bar{x}, \bar{x})\leqslant(|\bar{T}|\bar{x}, \bar{x}). \tag{11}$$

令

$$\bar{H}_-=\{\bar{x}\in\bar{H}: \bar{T}^+\bar{x}=0\},\quad \bar{H}_+=\bar{H}\ominus\bar{H}_-;$$
$$\Pi'_-=\{f=\{f_k\}_{k=0}^\infty\in R:\ \text{存在满足式(1)的}\ \bar{x}=\{x_k\}_{k=0}^\infty\in\bar{H}_-\},$$
$$\Pi'_+=\{f=\{f_k\}_{k=0}^\infty\in R:\ \text{存在满足式(1)的}\ \bar{x}=\{x_k\}_{k=0}^\infty\in\bar{H}_+\}.$$

对 $f^+\in\Pi'_+$ 和 $f^-\in\Pi'_-$, 它们分别相应于 $\bar{x}^+\in\bar{H}_+$ 和 $\bar{x}^-\in\bar{H}_-$, 恒有

$$\langle f^+, f^+\rangle=(\bar{T}\bar{x}^+, \bar{x}^+)=(\bar{T}^+\bar{x}^+, \bar{x}^+)\geqslant0,$$
$$\langle f^-, f^-\rangle=(\bar{T}\bar{x}^-, \bar{x}^-)=-(\bar{T}^-\bar{x}^-, \bar{x}^-)\leqslant0,$$
$$\langle f^+, f^-\rangle=(\bar{T}\bar{x}^+, \bar{x}^-)=(\bar{T}^+\bar{x}^+, \bar{x}^-)=(\bar{x}^+, \bar{T}^+\bar{x}^-)=0.$$

对一切 $g\in\bar{H}$, 易知可作分解 $g=g^++g^-$, 其中 $g^+\in\Pi'_+$, $g^-\in\Pi'_-$. 若 $\langle f^+, f^+\rangle=0$, 则

$$|\langle f^+, g\rangle|^2=|\langle f^+, g^+\rangle|^2\leqslant\langle f^+, f^+\rangle\langle g^+, g^+\rangle=0,$$

于是 $f^+=0$, 即 Π'_+ 是正子空间. 同理可知 Π'_- 是负子空间. 但 $R=\Pi'_+\oplus\Pi'_-$. 对 $f, g\in R$, 作分解 $f=f^++f^-$, $g=g^++g^-$, 其中 $f^+, g^+\in\Pi'_+$, $f^-, g^-\in\Pi'_-$, 定义新内积

$$[f, g]'=\langle f^+, g^+\rangle-\langle f^-, g^-\rangle,$$

则 $[\cdot, \cdot]'$ 与 $[\cdot, \cdot]$ 拓扑等价. 若 $f\in R$ 相应于式(1)的 $\bar{x}\in\bar{H}$, 易知 $[f, f]'=(|\bar{T}|\bar{x}, \bar{x})$. 由式(11)可得

$$[\tilde{T}f, \tilde{T}f]'=(|\bar{T}|\bar{S}\bar{x}, \bar{S}\bar{x})\leqslant(|\bar{T}|\bar{x}, \bar{x})=[f, f]'.$$

因此 $\tilde{T}$ 可以扩张为 Π 中有界算子. 仍用 $\tilde{T}$ 表示扩张后的算子.

iv) 现在证明 $\tilde{T}$ 是 J-正常的. 对 $f, g\in R$, f 由式(1)规定,

$$g=\{g_k\}_{k=0}^\infty,\quad g_k=\sum_{j=0}^\infty T^{*j}T^ky_j\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

则

$$\langle\tilde{T}^*\tilde{T}f, g\rangle=\langle\tilde{T}f, \tilde{T}g\rangle=\sum_{i,j=0}^\infty(T^{i+1}x_i, T^{j+1}y_j). \tag{12}$$

令 $x'_0=0,\ x'_j=x_{j-1}(j>0)$. 则

$$\langle\widetilde{T}^*f,\ g\rangle=\langle f,\ \widetilde{T}g\rangle=\sum_{i,j=0}^{\infty}(T^jx_i,\ T^{i+1}y_j)=\sum_{i,j=0}^{\infty}(T^jx'_i,\ T^iy_j).\tag{13}$$

这说明 $\widetilde{T}^*f\in R$. 令 $y'_0=0,\ y'_j=y_{j-1}(j>0)$, 可得

$$\langle\widetilde{T}\widetilde{T}^*f,\ g\rangle=\langle\widetilde{T}^*f,\ \widetilde{T}^*g\rangle=\sum_{i,j=0}^{\infty}(T^jx'_i,\ T^iy'_j)=\sum_{i,j=0}^{\infty}(T^{j+1}x_i,\ T^{i+1}y_j).\tag{14}$$

但 R 稠于 Π, 由式(12)和(14), $\widetilde{T}^*\widetilde{T}=\widetilde{T}\widetilde{T}^*$, 即 $\widetilde{T}$ 是 Π 中 J-正常算子.

v) 现在证明 $\widetilde{T}$ 是 T 的极小扩张. 设 $f=\{f_k\}_{k=0}^{\infty}\in R$, 由式(1)对应于 $\bar{x}=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\in\overline{H}$. 令 $f^m=\{f_k^m\}_{k=0}^{\infty},\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, 其中 $f_k^m=\sum\limits_{j=0}^{m}T^{*j}T^kx_j,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$. 当 $k\leqslant m$ 时令 $x_k^m=0$, 当 $k>m$ 时令 $x_k^m=x_k$. 令 $\bar{x}^m=\{x_k^m\}_{k=0}^{\infty}$. 则 $\bar{x}^m\in\overline{H},\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \lim\limits_{m\to\infty}\|\bar{x}^m\|=0$. 于是

$$\lim_{m\to\infty}[f-f^m,\ f-f^m]'=\lim_{m\to\infty}(|\overline{T}|\bar{x}^m,\ \bar{x}^m)=0.$$

不难看出 $f^m=\sum\limits_{j=0}^{m}\widetilde{T}^{*j}f_{x_j},\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$. 因此 $\{\widetilde{T}^{*j}f_x:\ x\in H,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 所张线性集稠于 Π. 证毕.

3. 设 H 是 Hilbert 空间, $B(H)$ 是 H 中有界线性算子的全体, $F(\zeta)$ 是定义在复平面 C 上取值 $B(H)$ 的强连续算子值函数. 如果对任何 $\zeta\in C,\ F(\zeta)=F(-\zeta)^*$, 且对任何非负整数 m, 任何 $\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_m\in C$ 和任何 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m\in H$, Hermite 形式 $\sum\limits_{i,j=1}^{m}(F(\zeta_i-\zeta_j)\xi_i,\ \xi_j)\alpha_i\bar{\alpha}_j$ 的正规形式含有不超过 n 个负二次式, 而且确有 m 和 $\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_m;\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_m$, 使上述 Hermite 形式的正规形式含有 n 个负二次式, 则称 $F(\zeta)$ 为复平面上 n 阶拟正定强连续算子值函数.

引理 设 H 是 Hilbert 空间, $F(\zeta)$ 是定义在复平面 C 上取值 $B(H)$ 的 n 阶拟正定强连续算子值函数, $F(\zeta)\not\equiv0$, 则存在 Π_n 型 Понтрягин 空间 Π 及其上强连续 J-酉算子群 $\{U_\zeta:\zeta\in C\}$ 和 H 到 Π 中的有界算子 B, 使 $\{U_\zeta B\xi:\ \zeta\in C,\ \xi\in H\}$ 所张线性集稠于 Π 且对一切 $\zeta\in C$ 和一切 $\xi,\ \eta\in H$, 恒有

$$(F(\zeta)\xi,\ \eta)=\langle U_\zeta B\xi,\ B\eta\rangle.\tag{15}$$

证 记 L 为定义在 C 上仅在有限个点取值 H 中非 0 向量的向量值函数 $x(\zeta)$ 的全体, 加法和数乘照常规定. 对 $x,\ y\in L,\ x=x(\zeta),\ y=y(\zeta)$, 令

$$\langle x,\ y\rangle=\sum_{\lambda,\zeta\in C}(F(\lambda-\zeta)x(\lambda),\ y(\zeta)),\tag{16}$$

它是 L 上双线性泛函. 由于 $F(\zeta)=F(-\zeta)^*$, 所以它是 Hermite 的. 和文献[5]中定理 1 类似, 可以证明 L 所含极大负子空间的维数为 n. 记 $L_0=\{x\in L:$ 对任何 $y\in L$, 都有 $\langle x,\ y\rangle=0\}$. 令 $R=L/L_0$, 它是 Π_n 型空间. 记 $x\in L$ 到 R 的自然映照为 $\hat{x}$. 对 $\hat{x},\hat{y}\in R$, 任取 $x\in\hat{x},\ y\in\hat{y}$, 定义 $\langle\hat{x},\ \hat{y}\rangle=\langle x,\ y\rangle$, 易知其值由 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 唯一确定. 作分解 $R=P_0\oplus N$, 其中 P_0 是正子空间, N 是 n 维负子空间. 对 $\hat{x},\ \hat{y}\in R$, 作分解 $\hat{x}=\hat{x}_++\hat{x}_-,\ \hat{y}=\hat{y}_++\hat{y}_-$, 其中 $\hat{x}_+,\ \hat{y}_+\in P_0,\ \hat{x}_-,\ \hat{y}_-\in N$. 定义

$$[\hat{x},\ \hat{y}]=\langle\hat{x}_+,\ \hat{y}_+\rangle-\langle\hat{x}_-,\ \hat{y}_-\rangle,$$

则 R 按 $[\cdot,\cdot]$ 成内积空间. 将 R 按范数 $|\hat{x}|=\sqrt{[\hat{x},\ \hat{x}]}$ 完备化, 得 Π_n 型 Понтрягин 空

间 $\Pi=P\oplus N$, 其中 P 是正子空间. 对 $x\in L$, $\zeta\in C$, 定义

$$(U_\zeta x)(\lambda)=x(\lambda-\zeta),\ \hat{U}_\zeta\hat{x}=\widehat{U_\zeta x},$$

则 $\{\hat{U}_\zeta: \zeta\in C\}$ 可扩张成 Π 中 J-酉算子群, 仍用此记号表示扩张后的算子群. 可以证明它是强连续的. 对 $\xi\in H$, 当 $\zeta=0$ 时令 $e^\xi(\zeta)=\xi$, 当 $\zeta\neq 0$ 时令 $e^\xi(\zeta)=0$. 定义 $B\xi=e^\xi$. 于是 B 是 H 到 Π 中的有界算子, 且对 ξ, $\eta\in H$, $\zeta\in C$, 可得

$$\langle \hat{U}_\zeta B\xi,\ B\eta\rangle=(F(\zeta)\xi,\ \eta),$$

即式(15)成立. 显然 $\{U_\zeta B\xi: \zeta\in C,\ \xi\in H\}$ 所张线性集稠于 Π.

定理 2 设 T 是 Hilbert 空间 H 中有界线性算子, 令 $T(\zeta)=e^{-\bar{\zeta}T^*}e^{\zeta T}(\zeta\in C)$. 为使 T 是 n 阶 J-次正常算子, 必须且只须 $T(\zeta)$ 是复平面上 n 阶拟正定强连续算子值函数.

证　必要性. 设 T 在 Π_n 型 Понтрягин 空间 $\Pi\supseteq H$ 上有极小 J-正常扩张 $\tilde{T}$. 对任何 $\xi_1, \cdots, \xi_r\in H$, $\zeta_1, \cdots, \zeta_r\in C$, Hermite 形式

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=0}^{r}(T(\zeta_i-\zeta_j)\xi_i,\ \xi_j)\alpha_i\bar{\alpha}_j&=\sum_{i,j=0}^{r}(e^{(\zeta_i-\zeta_j)T}\xi_i,\ e^{(\zeta_j-\zeta_i)T}\xi_j)\alpha_i\bar{\alpha}_j\\&=\sum_{i,j=0}^{r}\langle e^{(\zeta_i-\zeta_j)\tilde{T}}\xi_i,\ e^{(\zeta_j-\zeta_i)\tilde{T}}\xi_j\rangle\alpha_i\bar{\alpha}_j=\sum_{i,j=0}^{r}\langle e^{-\bar{\zeta}_i\tilde{T}^*+\zeta_i\tilde{T}}\xi_i,\ e^{\zeta_j\tilde{T}-\bar{\zeta}_j\tilde{T}^*}\xi_j\rangle\alpha_i\bar{\alpha}_j\\&=\Big\langle\sum_{i=0}^{r}\alpha_i e^{-\bar{\zeta}_i\tilde{T}^*+\zeta_i T}\xi_i,\ \sum_{i=0}^{r}\alpha_i e^{-\bar{\zeta}_i\tilde{T}^*+\zeta_i T}\xi_i\Big\rangle\end{aligned}$$

的正规形式含有不超过 n 个负二次式. 这说明 $T(\zeta)$ 是 n' 阶拟正定强连续算子值函数, $n'\leqslant n$. 记 Π' 为 $\{e^{(\zeta\tilde{T}-\bar{\zeta}\tilde{T}^*)}\xi: \xi\in H,\ \zeta\in C\}$ 所张闭子空间, 则 Π' 中极大负子空间的维数为 n'. 但 Π' 包含 $\{e^{t\tilde{T}^*}\xi: \xi\in H,\ t\in(-\infty,\ \infty)\}$ 所张闭子空间, 对 $\xi\in H$, $k=0, 1, 2, \cdots$, 可得

$$\tilde{T}^{*k}\xi=\frac{d^k}{dt^k}e^{t\tilde{T}^*}\xi|_{t=0}.$$

但 Π 中的 $\tilde{T}$ 是 T 的极小 J-正常扩张, 故 $\Pi'\supseteq\Pi$, 即 $\Pi'=\Pi$, 从而 $n'=n$.

充分性. 设 $T(\zeta)$ 是 n 阶拟正定强连续算子值函数. 由引理, 存在 Π_n 型 Понтрягин 空间 Π 及其上强连续 J-酉算子群 $\{U_\zeta: \zeta\in C\}$ 和 H 到 Π 中有界算子 B, 使式(15)成立. 对 k, $l=0, 1, 2, \cdots$ 以及 $\xi\in H$, 由广义的中值定理(参看文献[6]第 52 页), 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to0,t\to0}\Big\langle\Big(\frac{U_s-I}{s}\Big)^k\Big(\frac{U_{is}-I}{s}\Big)^l B\xi,\ \Big(\frac{U_t-I}{t}\Big)^k\Big(\frac{U_{it}-I}{t}\Big)^l B\xi\Big\rangle\\&=\lim_{s\to0,t\to0}\frac{1}{(st)^{k+l}}\Big\langle\sum_{j_1,j_2=0}^{k}\sum_{j_3,j_4=0}^{l}(-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4}C_k^{j_1}C_k^{j_2}C_l^{j_3}C_l^{j_4}U_{j_1s-j_2t+i(j_3s-j_4t)}B\xi,\ B\xi\Big\rangle\\&=\lim_{s\to0,t\to0}\frac{1}{(st)^{k+l}}\Big(\sum_{j_1,j_2=0}^{k}\sum_{j_3,j_4=0}^{l}(-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4}C_k^{j_1}C_k^{j_2}C_l^{j_3}C_l^{j_4}T(j_1s-j_2t+i(j_3s-j_4t))\xi,\ \xi\Big)\\&=\frac{\partial^{2k+2l}}{\partial s^{2k}\partial t^{2l}}(T(s+it)\xi,\ \xi)|_{s=t=0},\end{aligned}\tag{17}$$

式中 $i=\sqrt{-1}$, s 和 t 都是实数. 对 $\eta\in H$, 复数 ζ, 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to0}\Big\langle\Big(\frac{U_s-I}{s}\Big)^k\Big(\frac{U_{is}-I}{s}\Big)^l B\xi,\ U_{-\zeta}B\eta\Big\rangle\\&=\lim_{s\to0}\Big(\sum_{j_1=0}^{k}\sum_{j_2=0}^{l}(-1)^{k+l-j_1-j_2}C_k^{j_1}C_l^{j_2}T(\zeta+j_1s+j_2is)\xi,\ \eta\Big)/s^{k+l}\\&=\frac{\partial^{k+l}}{\partial s^k\partial t^l}(T(\zeta+s+it)\xi,\ \xi)|_{s=t=0}.\end{aligned}\tag{18}$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left[\left(\frac{U_s-I}{s}\right)^k\left(\frac{U_{is}-I}{s}\right)^l-\left(\frac{U_t-I}{t}\right)^k\left(\frac{U_{it}-I}{t}\right)^l\right]B\xi\right|^2\\
&=\left\langle\left[\left(\frac{U_s-I}{s}\right)^k\left(\frac{U_{is}-I}{s}\right)^l-\left(\frac{U_t-I}{t}\right)^k\left(\frac{U_{it}-I}{t}\right)^l\right]B\xi,\right.\\
&\qquad\left.\left[\left(\frac{U_s-I}{s}\right)^k\left(\frac{U_{is}-I}{s}\right)^l-\left(\frac{U_t-I}{t}\right)^k\left(\frac{U_{it}-I}{t}\right)^l\right]B\xi\right\rangle\\
&\qquad+2\sum_{p=1}^{n}\left|\left\langle\left[\left(\frac{U_s-I}{s}\right)^k\left(\frac{U_{is}-I}{s}\right)^l-\left(\frac{U_t-I}{t}\right)^k\left(\frac{U_{it}-I}{t}\right)^l\right]B\xi,\ y_p\right\rangle\right|^2,
\end{aligned}\tag{19}
$$

其中 $y_p(p=1, \cdots, n)$ 是极大负子空间 N 中向量，满足 $\langle y_p, y_q\rangle=-\delta_{pq}(p, q=1, \cdots n)$. 存在 $\eta_1, \cdots, \eta_m\in H$, $\zeta_1, \cdots, \zeta_m\in C$, $\alpha_{jp}\in C(j=1, \cdots, m, p=1, \cdots, n)$, 使

$$y_p=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jp}U_{\zeta_j}\eta_j\quad(p=1, \cdots, n).$$

由式(17)和(18)，当 $s\to0$, $t\to0$ 时，式(19)趋向于 0, 即对任何 $\xi\in H$, $k, l=0, 1, 2, \cdots$, $s\text{-}\lim\limits_{s\to0}\left(\frac{U_s-I}{s}\right)^k\left(\frac{U_{is}-I}{s}\right)^l B\xi$ 存在．由此可知对一切复数 ζ 和 $\xi\in H$, $k=0, 1, 2, \cdots$, $s\text{-}\lim\limits_{s\to0}\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)^k U_\zeta B\xi$ 存在.

对 $\zeta\in C$, $\xi\in H$, 令

$$GU_\zeta B\xi=s\text{-}\lim_{s\to0}\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)U_\zeta B\xi.\tag{20}$$

由于 $\{U_\zeta B\xi: \zeta\in C, \xi\in H\}$ 所张线性子空间稠于 Π, 所以 G 的定义域稠于 Π. 对 $\sigma\in C$, $\xi, \eta\in H$, 因为

$$
\begin{aligned}
&\langle GB\xi-2BT\xi, U_{-\sigma}B\eta\rangle\\
&=\lim_{s\to0}\left\langle\left(\frac{U_{\sigma+s}-U_\sigma}{s}+\frac{U_{\sigma+is}-U_\sigma}{is}\right)B\xi-2U_\sigma BT\xi,\ B\eta\right\rangle\\
&=\lim_{s\to0}\left[\left(e^{-\bar\sigma T^*}\frac{T(s)-I}{s}e^{\sigma T}\xi, \eta\right)+\left(e^{-\sigma T^*}\frac{T(is)-I}{is}e^{\sigma T}\xi, \eta\right)\right]-2(T(\sigma)T\xi, \eta)\\
&=(e^{-\bar\sigma T^*}(T-T^*)e^{\sigma T}\xi, \eta)+(e^{-\sigma T^*}(T+T^*)e^{\sigma T}\xi, \eta)-2(T(\sigma)T\xi, \eta)=0,
\end{aligned}
$$

所以 $GB\xi=2BT\xi$, 由此

$$G^kB\xi=2^kBT^k\xi\quad(k=1, 2, \cdots).\tag{21}$$

由于对 $\xi, \eta\in H$, $\zeta, \sigma\in C$, 我们有

$$\langle GU_\zeta B\xi, U_\sigma B\eta\rangle=\lim_{s\to0}\left\langle U_\zeta B\xi, \left(\frac{U_{-s}-I}{s}+\frac{U_{-is}-I}{-is}\right)U_\sigma B\eta\right\rangle,$$

而 $s\text{-}\lim\limits_{s\to0}\left(\frac{U_{-s}-I}{s}+\frac{U_{-is}-I}{-is}\right)U_\sigma B\eta$ 存在，故可定义

$$G^*U_\sigma B\eta=s\text{-}\lim_{s\to0}\left(\frac{U_{-s}-I}{s}+\frac{U_{-is}-I}{-is}\right)U_\sigma B\eta.\tag{22}$$

由式(20)，$s\text{-}\lim\limits_{s\to0}\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)B\xi=GB\xi$. 假定 $s\text{-}\lim\limits_{s\to0}\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)^k B\xi=G^kB\xi$, 则由式(22)，我们有

$$\lim_{s\to 0}\left\langle\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)^{k+1}B\xi,\ U_{-\zeta}B\eta\right\rangle$$
$$=\lim_{s\to 0}\left\langle\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)^{k}B\xi,\ \left(\frac{U_{-s}-I}{s}+\frac{U_{-is}-I}{-is}\right)U_{-\zeta}B\eta\right\rangle$$
$$=\langle G^kB\xi,\ G^*U_{-\zeta}B\eta\rangle=\langle G^{k+1}B\xi,\ U_{-\zeta}B\eta\rangle.$$

所以 $s\text{-}\lim\limits_{s\to 0}\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)^{k+1}B\xi=G^{k+1}B\xi$. 即对 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, 得到

$$G^kB\xi=s\text{-}\lim_{s\to 0}\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)^{k}B\xi. \tag{23}$$

对 $\xi_{kl}\in H\,(k,\ l=0,\ 1,\ \cdots,\ r)$, 由式(21)、(23), Hermite 形式

$$\sum_{p,q,k,l=0}^{r}(T^q\xi_{pk},\ T^p\xi_{ql})\alpha_{pk}\bar{\alpha}_{ql}$$
$$=\sum_{q,p,k,l=0}^{r}2^{-p-q}\langle G^qB\xi_{pk},\ G^pB\xi_{ql}\rangle\alpha_{pk}\bar{\alpha}_{ql}$$
$$=\lim_{s\to 0}\sum_{p,q,k,l=0}^{r}2^{-p-q}\left\langle\left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)^{q}B\xi_{pk},\ \left(\frac{U_s-I}{s}+\frac{U_{is}-I}{is}\right)^{p}B\xi_{ql}\right\rangle\alpha_{pk}\bar{\alpha}_{ql}$$
$$=\lim_{s\to 0}\sum_{p,q,k,l=0}^{r}2^{-p-q}\left\langle\left(\frac{U_{-s}-I}{s}+\frac{U_{-is}-I}{-is}\right)^{p}B\xi_{pk},\right.$$
$$\left.\left(\frac{U_{-s}-I}{s}+\frac{U_{-is}-I}{-is}\right)^{q}B\xi_{ql}\right\rangle\alpha_{pk}\bar{\alpha}_{ql}$$
$$=\lim_{s\to 0}\left\langle\sum_{p,k=0}^{r}2^{-p}\alpha_{pk}\left(\frac{U_{-s}-I}{s}+\frac{U_{-is}-I}{-is}\right)^{p}B\xi_{pk},\right.$$
$$\left.\sum_{q,l=0}^{r}2^{-q}\alpha_{ql}\left(\frac{U_{-s}-I}{s}+\frac{U_{-is}-I}{-is}\right)^{q}B\xi_{ql}\right\rangle$$

的正规形式含有不超过 n 个负二次式. 由定理 1, T 在 $\Pi_{n'}$ 阶 Понтрягин 空间中有极小 J-正常扩张, $n'\leqslant n$. 若 $n'<n$, 则由本定理的必要性, 知 $T(\zeta)$ 是 n' 阶拟正定算子值函数, 矛盾. 所以 $n'=n$. 证毕.

4. 设 Π_1, Π_2 是 Понтрягин 空间, H 是 Hilbert 空间, Π_1, $\Pi_2\supseteq H$, H 中 J-次正常算子 T 分别在 Π_1 和 Π_2 上有极小 J-正常扩张 $\widetilde{T}_1$ 和 $\widetilde{T}_2$. 对 $f\in H$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, 定义

$$U\widetilde{T}_1^{*k}f=\widetilde{T}_2^{*k}f.$$

如果对 $f_k\in H$, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ r$, $\sum\limits_{k=0}^{r}\widetilde{T}_2^{*k}f_k=0$, 则对一切 $g\in H$, 一切 $l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, 因为

$$0=\left\langle\sum_{k=0}^{r}\widetilde{T}_2^{*k}f_k,\ \widetilde{T}_2^{*l}g\right\rangle=\sum_{k=0}^{r}\langle\widetilde{T}_2^l\widetilde{T}_2^{*k}f_k,\ g\rangle=\sum_{k=0}^{r}\langle\widetilde{T}_2^{*k}\widetilde{T}_2^lf_k,\ g\rangle=\sum_{k=0}^{r}\langle\widetilde{T}_2^lf_k,\ \widetilde{T}_2^kg\rangle$$
$$=\sum_{k=0}^{r}(T^lf_k,\ T^kg)=\left\langle\sum_{k=0}^{r}\widetilde{T}_1^{*k}f_k,\ \widetilde{T}_1^{*l}g\right\rangle,$$

所以 $\sum\limits_{k=0}^{r}\widetilde{T}_1^{*k}f_k=0$, 由此 U 的定义是一意的且可扩张为 Π_1 到 Π_2 上 J-酉算子. 仍用 U 表示扩张后的算子. 对 $f\in H$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, 由

$$U\widetilde{T}_1\widetilde{T}_1^{*k}f=U\widetilde{T}_1^{*k}\widetilde{T}_1f=U\widetilde{T}_1^{*k}Tf=\widetilde{T}_2^{*k}\widetilde{T}_2f=\widetilde{T}_2\widetilde{T}_2^{*k}f=\widetilde{T}_2U\widetilde{T}_1^{*k}f,$$

可知 $U\widetilde{T}_1=\widetilde{T}_2U$. 由此得

定理 3　设 Понтрягин 空间 Π_1 上有界算子 $\widetilde{T}_1$ 和 Понтрягин 空间 Π_2 上有界算子

$\widetilde{T}_2$都是Hilbert空间H上J-次正常算子T的极小J-正常扩张，则存在Π_1到Π_2上的J-酉算子U，使$U\widetilde{T}_1U^{-1}=\widetilde{T}_2$.

定理4 设T是Hilbert空间H中n阶J-次正常算子，则对一切非负整数r和一切$x_0, x_1, \cdots, x_r\in H$, Hermite形式$\sum\limits_{i,j=0}^{r}((T^*T-TT^*)x_i, x_j)\alpha_i\bar{\alpha}_j$的正规形式含有不超过$n$个负二次式.

证明从略．对$n=0$应用定理4，就可得出次正常算子一定是亚正常算子(hyponormal operator)这一已知结论.

参 考 文 献

[1] Halmos, P. R., Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasil. Math.*, **2** (1950), 125—134.

[2] Bram, J., Subnormal operators, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 75—94.

[3] Иохвидов, И. С. и Крейн, М. Г., Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, I, II, *Труды Моск. Матем. об-ва.*, **5** (1956), 367—432; **8** (1959), 413—496.

[4] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, New York, 1966.

[5] 伍镜波，拟正定算子值函数与拟完全单调算子值函数，*数学年刊*，**2** (1981), 339—357.

[6] Pólya, G. and Szegö, G., Problems and theorems in analysis, Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

ON THE J-NORMAL EXTENSIONS OF OPERATORS

WU JINGBO

(*Nankai University*)

ABSTRACT

A bounded linear operator T acting on a Hilbert space H is said to be J-subnormal with order n if on some Π_n-Pontrjagin space Π containing H, there exists a bounded J-normal operator $\widetilde{T}$ such that $\widetilde{T}f=Tf$ for every f in H and that Π is spanned by the elements of the form $\widetilde{T}^{*k}f$, where $f\in H$ and $k=0, 1, 2, \cdots$.

Let H be a Hilbert space and let T be in $B(H)$. The main purpose of this paper is to prove that the following statements are equivalent:

(1) T is J-subnormal with order n;

(2) For each non-negative integer r and for each set $\{x_{ik}: i, k=0, 1, \cdots, r\}$ of elements of H, the Hermitian form $\sum\limits_{i,j,k,l=0}^{r}(T^jx_{ik}, T^ix_{jl})\alpha_{ik}\bar{\alpha}_{jl}$ has at most n negative squares, and for at least one choice of r and $\{x_{ik}\}$, it has exactly n negative squares;

(3) The operator function $e^{-\bar{\zeta}T^*}e^{\zeta T}$ is quasi-positive definite with order n in the complex plane. This result is an extension of the theorems of Halmos and Bram.