数 学 年 刊
3 (5) 1982

关于Kottman的一个问题*

阴 洪 生
(浙江大学)

在本文中，X 表示无限维的实线性赋范空间，它的单位球 $U(X)$ 和单位球面 $S(X)$ 分别是 $U(X)\equiv\{x\in X: \|x\|\leqslant 1\}$ 和 $S(X)\equiv\{x\in X: \|x\|=1\}$. α 表示集合的势，$\aleph_0$ 表示自然数集的势.

定义 1([3]) X 的子集 A 称为是 λ-分离的，如果对一切 $x, y\in A$, $x\neq y$ 有 $\|x-y\|\geqslant\lambda$.

我们考虑对于单位球面的具指定势 α 的 λ-分离子集，λ 所能取的最大数值.

定义 2 $R_\alpha(X)\equiv\sup\{\lambda: S(X)$ 含有势为 α 的 λ-分离子集$\}$.

$R_\alpha(X)$ 与在单位球中的嵌入问题有密切的联系. 嵌入问题的数值特征是

定义 3([2]) $P_\alpha(X)\equiv\sup\{r: U(X)$ 含有 α 个互不相交的半径是 r 的开球$\}$.

介于 $R_\alpha(X)$ 与 $P_\alpha(X)$ 之间，[3] 还引进了参数 $Q_\alpha(X)$(这里采用与[3]不同的记号，所给的定义也比[3]略广泛一些).

定义 4([3]) $Q_\alpha(X)\equiv\sup\{\lambda: U(X)$ 含有势为 α 的 λ-分离子集$\}$.

在[5]中我们证明了当 $\alpha>1$ 时有

$$\frac{2P_\alpha(X)}{1-P_\alpha(X)}=Q_\alpha(X)=R_\alpha(X). \tag{1}$$

这表明研究 λ-分离集合与研究嵌入问题是"等价的". 由于(1), [2, 3]关于 $P_\alpha(X)$ 的结论都可叙述成关于 $R_\alpha(X)$ 的结论. 特别，[2; 引理 1.2] 证明了 $1<\alpha\leqslant X$ 的稠密性特征(即 X 的稠子集所能具有的最小势)时 $\frac{1}{3}\leqslant P_\alpha(X)\leqslant\frac{1}{2}$, 也就是

$$1\leqslant R_\alpha(X)\leqslant 2.$$

由于 $P_{\aleph_0}(l_p)=2^{\frac{1}{p}}(2+2^{\frac{1}{p}})^{-1}, 1\leqslant p<\infty$, 充满了区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$, 因此[2]提出问题: 是否存在无限维的线性赋范空间 X 使 $P_{\aleph_0}(X)=\frac{1}{3}$, 即 $R_{\aleph_0}(X)=1$? [3]从空间的同构关系研究了这个问题，给出了使 $R_{\aleph_0}(X)>1$ 的某些充分条件. 例如，如果 X 含有一个子空间同构于 c_0 或 $l_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$, 则 $R_{\aleph_0}(X)>1$. 本文从空间的共轭关系研究这个问题.

定理 1 如果 $R_{\aleph_0}(X^*)<2$, 则 $R_{\aleph_0}(X)>1$.

证 因为 $R_{\aleph_0}(X^*)<2$, 故有 $\varepsilon>0$ 使得 $\frac{2}{1+\varepsilon}>R_{\aleph_0}(X)$. 由[1; p. 93 定理 5], 可找

本文 1980 年 7 月 2 日收到.

* 本文是作者于 1979.9—1980.5 在南京大学的 Thompson, A. C. 讨论班学习期间完成的. 对Thompson, A. C. 教授的指导谨表感谢.

到双正交序列$\{b_n\}$和$\{\beta_n\}$, $b_n\in x$, $\beta_n\in\times^*$, 使对一切i, $j=1, 2, \cdots$成立$\|b_i\|=1=\|\beta_i\|$及$\beta_i(b_j)=\delta_{ij}$. 假定$\{b_{n_i}\}$是$\{b_n\}$的无穷子集, 满足对一切i, $j=1, 2, \cdots$有$\|b_{n_i}-b_{n_j}\|<1+\varepsilon$. 由于

$$1=\frac{1}{2}(\beta_{n_i}-\beta_{n_j})(b_{n_i}-b_{n_j})\leqslant\frac{1}{2}\|\beta_{n_i}-\beta_{n_j}\|\|b_{n_i}-b_{n_j}\|,$$

因此对一切i, $j=1, 2, \cdots$, $i\neq j$, 有$\|\beta_{n_i}-\beta_{n_j}\|\geqslant\frac{2}{1+\varepsilon}>R_{\aleph_0}(X^*)$, 这与$R_{\aleph_0}(X^*)$的定义矛盾. 所以, 对$\{b_n\}$的任一无穷子集$\{b_{n_i}\}$必有某$i$, j, $i\neq j$, 使$\|b_{n_i}-b_{n_j}\|\geqslant1+\varepsilon$. 我们记这一事实为性质$(S)$.

现在令$B_1\equiv\{b_n\}_{n=1}^\infty$, 并考虑$B_1$的所有$(1+\varepsilon)$-分离子集的族$\mathscr{D}$. 由于性质$(S)$, $\mathscr{D}$是非空的. 用集合的包含关系在$\mathscr{D}$中定义一个偏序. 容易验证Zorn引理的条件是满足的, 因此存在$\mathscr{D}$的一个极大元A_1, 也即存在B_1的一个极大的$(1+\varepsilon)$-分离子集. 如果A_1是无限集合, 既然它是$(1+\varepsilon)$-分离的, 我们得到$R_{\aleph_0}(X)\geqslant1+\varepsilon$, 证明也就完成. 因此假设$A_1$是有限集合. 由$A_1$的极大性, 对每个$b_i\in B_1\backslash A_1$, 必有某$b_j\in A_1$使$\|b_i-b_j\|<1+\varepsilon$. 注意到$A_1$是有限的而$B_1\backslash A_1$是无限的, 因此必有无穷集合$B_2\subset B_1\backslash A_1$和一点$b_{n_1}\in A_1$使得对一切$b_i\in B_2$成立$\|b_{n_1}-b_i\|<1+\varepsilon$. 假定我们已经构造了集合$B_k$, A_k, B_{k+1}和点b_{n_k}满足: $A_k\subset B_k$, $b_{n_k}\in A_k$, $B_{k+1}\subset B_k\backslash A_k$, B_k和B_{k+1}是无限的, A_k是有限的和$(1+\varepsilon)$-分离的, 以及对一切$b_i\in B_{k+1}$成立$\|b_{n_k}-b_i\|<1+\varepsilon$, 然后我们构造集合$A_{k+1}$, B_{k+2}和点$b_{n_{k+1}}$如下: 因为B_{k+1}是无限的, 由性质(S), B_{k+1}含有一个$(1+\varepsilon)$-分离子集, 从而含有一个极大的$(1+\varepsilon)$-分离子集A_{k+1}. 如果A_{k+1}是无限的, 则$R_{\aleph_0}(X)\geqslant1+\varepsilon$, 证明也就完成. 如果$A_{k+1}$是有限的, 由它的极大性, 对每一$b_i\in B_{k+1}\backslash A_{k+1}$必有某$b_j\in A_{k+1}$使$\|b_i-b_j\|<1+\varepsilon$. 因为$A_{k+1}$是有限的而$B_{k+1}\backslash A_{k+1}$是无限的, 故有无限子集$B_{k+2}\subset B_{k+1}\backslash A_{k+1}$和点$b_{n_{k+1}}\in A_{k+1}$使$\|b_{n_{k+1}}-b_i\|<1+\varepsilon$对一切$b_i\in B_{k+2}$成立. 以这种方式进行下去. 如果所有的$\{A_k\}$全是有限的, 则我们得到具有上面构造的性质的集列$\{B_k\}$, $\{A_k\}$和点列$\{b_{n_k}\}$. 现在$\{b_{n_k}\}$是B_1的一个无限子集, 而且对一切i, $j=1, 2, \cdots$成立$\|b_{n_i}-b_{n_j}\|<1+\varepsilon$, 这与性质$(S)$矛盾. 所以必有某$A_k$是无限, 从而定理得证.

如果我们应用Ramsey的一个较少为人所知的定理[4; §1, 定理A], 则上面定理1的证明的叙述可以简化如下:

令$\{b_n\}$和$\varepsilon>0$同定理1的证明所给. 我们将自然数的一切两元素子集按下列规则分成两类: 如果$\|b_i-b_j\|<1+\varepsilon$, 令$\{i, j\}\in$类$I$; 如果$\|b_i-b_j\|\geqslant1+\varepsilon$, 令$\{i, j\}\in$类$II$. Ramsey定理断言存在自然数的无穷子集$M$使得$M$的一切两元素子集属于同一类. 由定理1的证明中所指出的性质(S), 这一类只能是类II. 因此$\{b_i: i\in M\}$是$\{b_n\}$的一个无限的$(1+\varepsilon)$-分离子集, 所以$R_{\aleph_0}(X)\geqslant1+\varepsilon$.

推论1 如果X是一致凸的(或一致光滑的), 则$R_{\aleph_0}(X)>1$和$R_{\aleph_0}(X^*)>1$.

证 如果X是一致凸的(或一致光滑的), 则X^*是一致光滑的(或一致凸的). 由[2; 定理3.6和[3.7], $R_3(X^*)<2$, 从而更有$R_{\aleph_0}(X^*)<2$. 所以$R_{\aleph_0}(X)>1$. 这一结论用于X^*就得$R_{\aleph_0}(X^*)>1$.

由于定理1, 只要研究$R_{\aleph_0}(X^*)=2$时$R_{\aleph_0}(X)$的情形就够了. 下面定理3给出$R_{\aleph_0}(X^*)=2$的一个充要条件. 为此, 先证明

引理 2 设 $f_1, f_2 \in S(X^*)$, 且 $\|f_1-f_2\|>2-\varepsilon(\varepsilon>0)$, 令 $K_i \equiv \{x\in U(X): f_i(x)>1-\varepsilon\}$, $i=1, 2$, 则 $K_1\cap(-K_2)\neq\phi$.

证 假设 $K_1\cap(-K_2)=\phi$, 则对于每一个 $x\in U(X)$ 存在三种可能的情形:

(i) $x\overline{\in} K_1\cup(-K_2)$. 于是 $f_1(x)\leqslant 1-\varepsilon$, $-f_2(x)\leqslant 1-\varepsilon$, 所以

$$f_1(x)-f_2(x)\leqslant 2-2\varepsilon<2-\varepsilon.$$

(ii) $X\in K_1$. 这时 $x\overline{\in}(-K_2)$. 于是 $f_1(x)\leqslant 1$, $-f_2(x)\leqslant 1-\varepsilon$, 所以

$$f_1(x)-f_2(x)\leqslant 2-\varepsilon.$$

(iii) $x\in(-K_2)$. 这时 $x\overline{\in} K_1$. 于是 $f_1(x)\leqslant 1-\varepsilon$, $-f_2(x)\leqslant 1$, 所以

$$f_1(x)-f_2(x)\leqslant 2-\varepsilon.$$

由 (i), (ii) 和 (iii) 知, 对每一 $x\in U(X)$ 有 $f_1(x)-f_2(x)\leqslant 2-\varepsilon$. 这一不等式对 $-x\in U(X)$ 也成立, 即 $-f_1(x)+f_2(x)\leqslant 2-\varepsilon$. 所以 $x\in U(X)$ 时 $|f_1(x)-f_2(x)|\leqslant 2-\varepsilon$. 因此 $\|f_1-f_2\|\leqslant 2-\varepsilon$. 但由假设, $\|f_1-f_2\|>2-\varepsilon$. 这一矛盾证明了引理.

我们还需要一个定义.

定义 5([2; 定义 4.1]) 对 $\varepsilon>0$, $U(X)$ 的凸子集 A 称为是 ε-flat, 如果

$$A\cap(1-\varepsilon)U(X)=\phi.$$

ε-flat 的族 $\mathscr{D}$ 称为是有补的, 如果对 $\mathscr{D}$ 中每对 ε-flat A 和 B, $A\cup B$ 含有一对相对的点 (即两点 x 和 $-x$). 定义 $F_\alpha(X)\equiv\inf\{\varepsilon: U(X)$ 含有 α 个 ε-flat 构成的有补的族 $\mathscr{D}\}$.

定理 3 $R_\alpha(X^*)=2$ 当且仅当 $F_\alpha(X)=0$.

证 如果 $R_\alpha(X^*)=2$, 则对任一 $\varepsilon>0$ 有 α 个线性连续泛函 $\{f_\gamma: \gamma\in\Gamma\}\subset S(X^*)$ 使得 $\gamma, \gamma'\in\Gamma$, $\gamma\neq\gamma'$ 时 $\|f_\gamma-f_{\gamma'}\|>2-\varepsilon$. 令 $K_\gamma\equiv\{x\in U(X): f_\gamma(x)>1-\varepsilon\}$. K_γ 是 $U(X)$ 的凸子集, 且显然 $K_\gamma\cap(1-\varepsilon)U(X)=\phi$, 所以 K_γ 是 ε-flat. 对任意 $\gamma, \gamma'\in\Gamma$, $\gamma\neq\gamma'$, 由引理 2, 有 $x\in K_\gamma\cap(-K_{\gamma'})$, 故 $x\in K_\gamma$, $-x\in K_{\gamma'}$, 即族 $\{K_r: r\in\Gamma\}$ 是有补的. 由定义 5, $F_\alpha(X)\leqslant\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得 $F_\alpha(X)=0$.

反之, 如果 $F_\alpha(X)=0$, 则对任一 $\varepsilon>0$ 有 α 个凸子集 $\{K_\gamma: \gamma\in\Gamma\}\subset U(X)$ 构成一个有补的 ε-flat 族. 由于 $K_\gamma\cap(1-\varepsilon)U(X)=\phi$, 故由凸集的分离定理([1; p. 24 定理 4]) 有 $f_\gamma\in S(X^*)$ 使 $\sup f_\gamma((1-\varepsilon)U(X))\leqslant\inf f_\gamma(K_\gamma)$, 所以 $f_\gamma(K_\gamma)\geqslant 1-\varepsilon$. 对任意 γ, $\gamma'\in\Gamma$, $\gamma\neq\gamma'$, 由于族 $\{K_\gamma\}$ 是有补的, 故有 $x_{\gamma\gamma'}$ 使 $x_{\gamma\gamma'}\in K_\gamma$, $-x_{\gamma\gamma'}\in K_{\gamma'}$. 因此

$$\|f_\gamma-f_{\gamma'}\|\geqslant(f_\gamma-f_{\gamma'})(x_{\gamma\gamma'})=f_\gamma(x_{\gamma\gamma'})+f_{\gamma'}(-x_{\gamma\gamma'})\geqslant(1-\varepsilon)+(1-\varepsilon)=2-2\varepsilon.$$

这表明 $\{f_\gamma: \gamma\in\Gamma\}$ 是 $(2-2\varepsilon)$-分离的, 从而 $R_\alpha(X^*)\geqslant 2-2\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性得

$$R_\alpha(X^*)=2.$$

定理 3 推广了[2; 定理 4.2(b)], 从而使[2]的定理 4.2 的(b)和(c)构成充要条件, 并且简化了证明. [2]通过那里的例 4.3 断言[2; 定理 4.2(a), (b)]中 $\alpha<\infty$ 的限制是本质的. 上面的定理 3 表明(b)中 $\alpha<\infty$ 的限制是不必要的.

推论 $R_{\aleph_0}(X^*)=2$ 当且仅当 $F_{\aleph_0}(X)=0$.

定理 4 $R_3(X^*)=2$ 当且仅当 $R_3(X)=2$.

证 如果 $R_3(X^*)=2$, 则对每一 $\varepsilon>0$, $S(X^*)$ 含有三点 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 使对 $i, j=1, 2, 3$, $i\neq j$, 成立 $\|f_i-f_j\|>2-\varepsilon$. 令 K_i 如引理 2 所定义. 由引理 2, $K_i\cap(-K_j)\neq\emptyset$, 故有三点 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 使 $x_1\in K_1$, $-x_1\in K_2$, $x_2\in K_2$, $-x_2\in K_3$, $x_3\in K_3$, $-x_3\in K_1$.

由 K_i 的定义可得

$$\|x_2-x_1\|\geqslant f_2(x_2)-f_2(x_1)\geqslant(1-\varepsilon)+(1-\varepsilon)=2-2\varepsilon,$$
$$\|x_3-x_2\|\geqslant f_3(x_3)-f_3(x_2)\geqslant 2-2\varepsilon,$$
$$\|x_1-x_3\|\geqslant f_1(x_1)-f_1(x_3)\geqslant 2-2\varepsilon.$$

所以 $R_3(X)=Q_3(X)\geqslant 2-2\varepsilon$(参看(1)式). 由 $\varepsilon>0$ 的任意性得 $R_3(X)=2$.

反之,如果 $R_3(X)=2$,则因 X 可等距地嵌入到 X^{**} 成为一个线性子空间,故 $R_3(X^{**})\geqslant R_3(X)=2$,从而 $R_3(X^{**})=2$. 由上面一段的证明知 $R_3(X^{**})=2$ 蕴涵 $R_3^*(X)=2$.

应用定理4, 我们可大大简化[2; 定理 3.7]的证明: 如 X 是一致光滑的,则 X^* 是一致凸的. 故由[2; 定理 3.6]知 $R_3(X^*)<2$,从而由定理4得到 $R_3(X)<2$.

关于 $R_{\aleph_0}(X)$ 和 $R_{\aleph_0}(X^*)$ 所可能取的数值组的情形,有下面的结果.

定理5 对任二实数 $b_1, b_2\in(1, 2]$, $b_1b_2\geqslant 2$, 必有某线性赋范空间 X 使 $R_{\aleph_0}(X)=b_1$, $R_{\aleph_0}(X^*)=b_2$.

证 如 $b_1=b_2=2$,取 X 为 c_0 即可.如 $b_1\in(1, 2]$, $b_2\in(1, 2)$,取 p_0, q_1 使 $2^{\frac{1}{p_0}}=b_1$, $2^{\frac{1}{q_1}}=b_2$. 作序列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$, $n=1, 2, \cdots$, 使 $\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}=1$ $(n=1, 2, \cdots)$,并且 $\{p_n\}$ 单调下降收敛到 p_0,从而 $\{q_n\}$ 单调上升到 q_0(可能为 ∞),这里 $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1$. 应用[3; 引理 8],令 $X\equiv(l_{p_1}\oplus l_{p_2}\oplus\cdots)_{l_{p_1}}$,由[1; p. 36, II. 2. (11) (C)]知 $X^*=(l_{q_1}\oplus l_{q_2}\oplus\cdots)_{l_{p_1}}$. 因此[3; 引理 8]给出 $R_{\aleph_0}(X)=\sup\{2^{\frac{1}{p_i}}: i=1, 2, \cdots\}=2^{\frac{1}{p_0}}=b_1$, 而 $R_{\aleph_0}(X^*)=2^{\frac{1}{q_1}}=b_2$. 这样构造的 X 是自反的,故也可设 $b_1\in(1, 2)$ 而 $b_2\in(1, 2]$.

最后我们给出一个类似[2; 引理 8]的结果.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 是无限维线性赋范空间, 令 $X\equiv(X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_k)_{l_p}$, $1\leqslant p<\infty$, 是 X_i 的 l_p-乘积, 即 X 的元素是 $x=(x(1), x(2), \cdots, x(k))$, $x(j)\in X_j$, $j=1, 2, \cdots, k$, 范数定义为 $\|x\|\equiv\left(\sum_{j=1}^{k}\|x(j)\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}}$(参看[1; p. 35, 定义 2].

定理6 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(X)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{\lim\limits_{n\to\infty}R_n(X_j)\}$.

在定理6的证明中,我们要用 Ramsey[4; p.267 定理 B]的一种简化形式, 叙述成下面的引理7.

引理7(Ramsey) 对任何给定的自然数 n,必有自然数 N 使得将集合 $\{1, 2, \cdots, m\}$ $(m\geqslant N)$ 的一切两元素子集按任何法则分成两类时,总有 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的某子集 M 适合如下的条件:

(i) M 的一切两元素子集都属于同一个类;

(ii) M 的元素的个数不少于 n.

定理6的证明 因为对任何 X, $\{R_n(X)\}_{n=2}^{\infty}$ 是单调下降的和非负的,故定理中的极限都存在. 根据 l_p-乘积的定义,每一 X_j 都可等距地嵌入到 X 中成为线性子空间,所以 $R_n(X)\geqslant R_n(X_j)$ 对 $j=1, 2, \cdots, k$ 和 $n=2, 3, \cdots$ 成立. 因此

$$\lim_{n\to\infty}R_n(X)\geqslant\max_{1\leqslant j\leqslant k}\{\lim_{n\to\infty}R_n(X_j)\}.$$

现记 $C\equiv\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{\lim\limits_{n\to\infty}R_n(X_j)\}$. 对给定的任意 $\varepsilon>0$, 固定 n_0 充分大, 使对 $j=1, 2, \cdots, k$

成立 $R_{n_0}(X_j)\leqslant C+\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta>0$ 使 $\left(C+\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\delta)<C+\varepsilon$. 再取 $\eta>0$ 使 $k^{\frac{1}{p}}\eta<\delta$, 并假定 $\frac{1}{\eta}$ 是正整数. 然后我们选取的充分大的自然数 N 使得 $N\eta^k$ 是自然数, 并且当我们对集合 $\{1, 2, \cdots, N\eta^k\}$ 应用引理 7, 再对取出的子集 M 继续应用引理 7, 这样相继地应用 k 次引理 7 后, 所得的子集具有不少于 n_0 个元素. 由于 n_0 和 k 已经固定, 这样的 N 易知是存在的. 现在假设 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 是 $S(X)$ 的任意 λ-分离子集. 根据 X 的范数的定义, $\{\|x_i(1)\|_{X_1}\}_{i=1}^N$ 是闭区间 $[0, 1]$ 的子集. 将区间 $[0, 1]$ 分成具有相等长度 η 的 $\frac{1}{\eta}$ 个小区间, 于是必有某 $a_1\in[0, 1]$ 使得 $[a_1, a_1+\eta]$ 中至少有 $\{\|x_i(1)\|_{X_1}\}_{i=1}^N$ 中的 $N\eta$ 个点. 必要间改变一下足标, 我们可以假设这 $N\eta$ 个点是 $\{\|x_i(1)\|_{X_1}: i=1, 2, , \cdots, N\eta\}$. 因此

$$a_1\leqslant\|x_i(1)\|_{X_1}\leqslant a_1+\eta,\ i=1, 2, \cdots, N\eta.$$

现在 $\{\|x_i(2)\|_{X_2}\}_{i=1}^{N\eta}$ 又是 $[0, 1]$ 的子集, 上面的讨论又可进行. 这样一共进行 k 次后, 我们得到 $N\eta^k$ 个点 $\{x_i\}_{i=1}^{N\eta^k}$ (必要时要改变一下足标的次序), 适合

$$a_j\leqslant\|x_i(j)\|_{X_j}\leqslant a_j+\eta,\ j=1, 2, \cdots, k;\ i=1, 2, \cdots, N\eta^k. \tag{3}$$

注意序列 $\{(a_1+\eta)^{-1}x_i(1)\}_{i=1}^{N\eta^k}$ 是 $U(X_1)$ 的子集. 将集合 $\{1, 2, \cdots, N\eta^k\}$ 的一切两元素子集按下面规则分成两类: 如果

$$(a_1+\eta)^{-1}\|x_i(1)-x_j(1)\|_{X_1}\leqslant R_{n_0}(X_1),$$

令 $\{i, j\}\in$ 类 I; 如果

$$(a_1+\eta)^{-1}\|x_i(1)-x_j(1)\|_{X_1}>R_{n_0}(X_1),$$

令 $\{i, j\}\in$ 类 II. 应用引理 7 知, 存在 $\{1, 2, \cdots, N\eta^k\}$ 的子集 M, 使得 M 的一切两元素子集都属于同一类, 并且 M 具有充分多的(指足够再应用 $k-1$ 次引理 7 所需的)元素, 设为 N_1 个元素. N_1 当然应大于 n_0, 故由 $Q_{n_0}(X_1)$ 的定义(由(1)式 $Q_{n_0}(X)=R_{n_0}(X)$), M 的两元素子集所在的类只能是类 I. 改变一下足标的记号后, 可以设 $M=\{1, 2, \cdots, N_1\}$. 然后依次对 $U(X_j)$ 的子集

$$\{(a_j+\eta)^{-1}x_i(j): i=1, 2, \cdots, N_{j-1}\},\ j=2, 3, \cdots, k,$$

重复上面应用引理 7 的讨论. 这样共进行 k 次后, 我们得到 N_{k-1} 个点(由选取 N 时的假设, $N_{k-1}\geqslant n_0\geqslant 2$), 设为 $\{x_i\}_{i=1}^{N_{k-1}}$, 它们适合

$$(a_j+\eta)^{-1}\|x_i(j)-x_l(j)\|_{X_j}\leqslant R_{n_0}(X_j),\ j=1, 2, \cdots, k;\ i, l=1, 2, \cdots, N_{k-1}.$$

特别

$$\|x_1(j)-x_2(j)\|_{X_j}\leqslant R_{n_0}(X_j)(a_j+\eta)\leqslant\left(c+\frac{\varepsilon}{2}\right)(a_j+\eta),\ j=1, 2, \cdots, k. \tag{4}$$

所以

$$\lambda\leqslant\|x_1-x_2\|=\left(\sum_{j=1}^k\|x_1(j)-x_2(j)\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{由 } (4))$$

$$\leqslant\left(c+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\sum_{j=1}^k(a_j+\eta)^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{由 Minkowski 不等式})$$

$$\leqslant\left(c+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\left(\sum_{j=1}^k a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^k\eta^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \qquad (\text{由 } (3))$$

$$\leqslant\left(c+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\|x_1(j)\|_{X_j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+k^{\frac{1}{p}}\eta\right] \qquad (\text{由}\ \|x_1\|=1)$$

$$=\left(c+\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+k^{\frac{1}{p}}\eta) \qquad (\text{由}\ \eta\ \text{的取法})$$

$$<\left(c+\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\delta)<c+\varepsilon.$$

因为 $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ 是 $S(X)$ 的任意 λ-分离子集，故由 $R_N(X)$ 的定义得 $R_N(X)\leqslant c+\varepsilon$. 再由 $\{R_n(X)\}$ 的单调性得 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(X)\leqslant R_N(X)\leqslant c+\varepsilon$. 再由 $\varepsilon>0$ 的任意性得 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(X)\leqslant c\equiv\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{\lim\limits_{n\to\infty}R_n(X_j)\}$. 定理得证.

由[2; 定义 3.1], 空间 X 称为是 P-凸的, 如果有某自然数 n 使 $P_n(X)<\frac{1}{2}$, 由(1)式知, 这条件等价于有某 n 使 $R_n(X)<2$.

推论 如果 $X_j(j=1, 2, \cdots, k)$ 都是 P-凸的, 则它们的 l_p-乘积 $X\equiv(X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_k)_{l_p}(1\leqslant p<\infty)$ 也是 P-凸的.

证 由 P-凸的定义, 对每一 j 有 n_j 使得 $R_{n_j}(X_j)<2$, 所以 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{\lim\limits_{n\to\infty}R_n(X_j)\}<2$. 由定理 6, $\lim\limits_{n\to 8}R_n(X)<2$. 于是有某 n 使 $R_n(X)<2$, 即 X 是 P-凸的.

这一推论对无穷个空间的 l_p-乘积不成立. 例如, 令 $\{p_n\}$ 是严格下降到 1 的数列, 任取 $p(1\leqslant p<\infty)$, 令 $X\equiv(l_{p_1}\oplus l_{p_2}\oplus\cdots)_{l_p}$. 由于每个 l_{p_j} 是一致凸的, 从而是 P-凸的([2; 定理 3.6]). 但是每个 l_{p_j} 可等距嵌入到 X 中成为线性子空间, 故有

$$R_N(X)\geqslant R_N(l_{p_j})\geqslant R_{\aleph_0}(l_{p_j})=2^{\frac{1}{p_j}},\ j=1, 2, \cdots;\ N=2, 3, \cdots.$$

所以 $R_N(X)=2(N=2, 3, \cdots)$, 即 X 不是 P-凸的.

参 考 文 献

[1] Day, M. M., Normed Linear Spaces, Springer-Verlaf, 1973.

[2] Kottman, C. A., Packing and reflexivity in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150**(1970), 565—576.

[3] Kottman, C. A., Snbsets of the unit ball that are separated by more than one, *Studia Math.*, T. L III., (1975), 15—27.

[4] Ramsey, F. P., On a problem of formal logic, *Proo. Londod Math. Soc.*, (2) **30**(1929), 264—286.

[5] 阴洪生、赵俊峰、王崇祜，关于线性赋范空间的单位球面的 λ-分离子集(已投南京大学学报).

ON THE KOTTMAN PROBLEM

YIN HONGSHENG
(*Zhejing University*)

ABSTRACT

Let X be a real linear normed space of infinite dimension, and $S(X)$ be the unit sphere in X, i. e., $S(X)=\{x\in X: \|x\|=1\}$.

For any cardinal number α, write

$R_\alpha(X)=\sup\{\lambda$: there exists a subset A in $S(X)$ whose cardinal number is α, such that for any two distinct elements x and y in A, $\|x-y\|\geqslant\lambda$ holds$\}$.

In this paper, we mainly discuss the relation between $R_\alpha(X)$ and $R_\alpha(X^*)$, where X^* is the conjugate space of X.

We establish the following theorems:

Theorem 1. If $R_{\aleph_0}(X^*)<2$, then $R_{\aleph_0}(X)>1$.

Theorem 4. $R_3(X^*)=2\Leftrightarrow R_3(X)=2$.

Theorem 5. For any b_1, $b_2\in(1, 2]$, $b_1b_2\geqslant 2$, there exists an X such that

$$R_{\aleph_0}(X)=b_1,\ R_{\aleph_0}(X^*)=b_2.$$

In addition, Using $F_\alpha(X)$ of Definition 4.1 in [2] (see Definiton 5 in this paper), we prove the following theorem, which generalizes Theorem 4.2(b) in [2].

Theorem 3. $R_\alpha(X^*)=2\Leftrightarrow F_2(X)=0$.