数 学 年 刊
3 (5) 1982

# 交换映射的某些公共不动点定理

丁 协 平
(四川师范学院)

Kasahara[1,2] 证明了 Banach 压缩映象原理对一类非距离空间仍然成立，并指出在这一原理的许多推广中，距离概念是非本质的．其后他和许多作者在比距离空间更广泛的一类 $L$–空间内得到了 Banach 压缩映象原理的各种推广．

另一方面 Jungck[3] 利用交换映射给出了距离空间的自映射存在不动点的一充要条件．其后在[4—9]内许多作者分别在 $L$–空间和距离空间内对交换映射又相继得到若干重要结果．

本文目的是由进一步放宽压缩型条件来得到几个新的公共不动点定理．它们分别改进、统一和推广了上述已知结果．

关于 $L$–空间的术语和结果可参见[2]．我们简述有关概念如下．

令 $\omega$ 表示一切非负整数的集，称由集 $X$ 和集 $X^{\omega}\times X$ 的子集→所构成的对 $(X, \to)$ 为 $L$–空间，如果满足下面二条件：

(i) 如果 $x_n=x$, $\forall n\in\omega$, 则 $(\{x_n\}_{n\in\omega}, x)\in\to$;

(ii) 如果 $(S, x)\in\to$, 则对 $S$ 的每一子序列 $t$ 有 $(t, x)\in\to$, 其中 $S=\{x_n\}_{n\in\omega}$.

如果 $(\{x_n\}_{n\in\omega}, x)\in\to$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\omega}$ 收敛于 $x$．记为 $x_n\to x$, 或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$.

称空间 $(X, \to)$ 是分离的，如果 $X$ 内每一收敛序列至多收敛于一点．

称映射 $f: (X, \to)\to(X', \to')$ 是连续的，如果 $S\to x$ 蕴含对 $S$ 的某一子序列 $t$ 有 $f(t)\to' f(x)$, 其中 $f(s)=\{f(x_n)\}_{n\in\omega}$.

称 $d: X\times X\to[0, \infty)$ 为集 $X$ 上的半距，如果 $d$ 满足：

(i) $d(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$, $\forall x, y\in X$;

(ii) $d(x, y)=d(y, x)$, $\forall x, y\in X$.

我们强调半距 $d$ 不必满足三角形不等式．

称 $L$–空间 $(X, \to)$ 对某半距 $d$ 是 $d$–完备的，如果 $X$ 内每一满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n)<\infty$ 的序列 $\{x_n\}_{n\in\omega}$ 至少收敛于一点．

以下用 $N$ 表示自然数集，$R_+$ 表示非负实数集．

**定理 1** 设 $f$, $g$ 是分离 $L$–空间 $(X, \to)$ 的连续自映射，$(X, \to)$ 对某半距 $d$ 是 $d$–完备的，则 $f$, $g$ 有公共不动点的充要条件是存在连续映射对 $T_1: X\to g(X)$, $T_2: X\to f(X)$ 使得 $T_1f=fT_1$, $T_2g=gT_2$, 且对一切 $x, y\in X$ 成立

$$d(T_1x, T_2y)\leqslant\Phi(d(fx, gy), d(fx, T_1x), d(gy, T_2y)), \tag{1}$$

本文 1980 年 7 月 8 日收到．

其中 $\Phi$: $R_+^3 \to R_+$ 关于每一自变量非减，且 $\varphi(t)=\Phi(t,\ t,\ t)$ 满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<\infty$, $\forall t>0$, $\varphi^n$ 表 $\varphi$ 的第 $n$ 次迭代．且 $(f,\ T_1)$ 和 $(g,\ T_2)$ 分别都有唯一公共不动点，而且这两点重合．

证　必要性　设 $Z$ 是 $f$, $g$ 的一公共不动点．定义 $T_ix=Z$, $\forall x\in X$, $i=1,\ 2$, 则显然有 $T_1$: $X\to g(X)$, $T_2$: $X\to f(X)$ 都连续且 $T_1f=fT_1$, $T_2g=gT_2$．又因 $d(T_1x,\ T_2y)=d(Z,\ Z)=0$, $\forall x,\ y\in X$．故(1)式成立．

充分性　任取 $x_0\in X$ 因 $T_1(X)\subset g(X)$, $T_2(X)\subset f(X)$, 故可构造序列 $\{x_n\}_{n\in\omega}$ 使得 $T_2x_{2n}=fx_{2n+1}$, $T_1x_{2n+1}=gx_{2n+2}$, $\forall n\in\omega$．令 $y_{2n}=T_2x_{2n}$, $y_{2n+1}=T_1x_{2n+1}$, $\forall n\in\omega$, 有序列 $\{y_n\}_{n\in\omega}$．

由(1)式有

$$\begin{aligned} d(y_{2n},\ y_{2n-1}) &= d(T_1x_{2n-1},\ T_2x_{2n}) \\ &\leqslant \Phi(d(fx_{2n-1},\ gx_{2n}),\ d(fx_{2n-1},\ T_1x_{2n-1}),\ d(gx_{2n},\ T_2x_{2n})) \\ &\leqslant \Phi(d(y_{2n-2},\ y_{2n-1}),\ d(y_{2n-2},\ y_{2n-1}),\ d(y_{2n-1},\ y_{2n})). \end{aligned} \tag{2}$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<\infty$, $\forall t>0$, 蕴含 $\varphi(t)<t$, $\forall t>0$, 故由(2)式有

$$d(y_{2n},\ y_{2n-1})\leqslant\varphi(d(y_{2n-1},\ y_{2n-2})). \tag{3}$$

同理可得

$$d(y_{2n+1},\ y_{2n})\leqslant\varphi(d(y_{2n},\ y_{2n-1})). \tag{4}$$

综合(3)，(4)两式得

$$d(y_{n+1},\ y_n)\leqslant\varphi(d(y_n,\ y_{n-1}))\leqslant\cdots\leqslant\varphi^n(d(y_1,\ y_0)).$$

从而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}d(y_{n+1},\ y_n)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(d(y_1,\ y_0))<\infty.$$

由空间的 $d$-完备性和分离性知 $\{y_n\}_{n\in\omega}$ 收敛于唯一点 $Z\in X$．又因 $T_1$ 和 $f$ 连续，故存在 $\{n\}_{n\in\omega}$ 的某子序列 $\{n_i\}_{i\in\omega}$ 使得

$$T_1Z=\lim_{i\to\infty}T_1fx_{2n_i+1}=\lim_{i\to\infty}fT_1x_{2n_i+1}=fZ.$$

同理可证得 $T_2Z=gZ$．于是从(1)式推得

$$\begin{aligned} d(T_1Z,\ T_2Z) &\leqslant \Phi(d(fZ,\ gZ),\ d(fZ,\ T_1Z),\ d(gZ,\ T_2Z)) \\ &\leqslant \varphi(d(T_1Z,\ T_2Z)), \end{aligned}$$

上式蕴含 $T_1Z=T_2Z=fZ=gZ=Z_1$．又由(1)式推得

$$\begin{aligned} d(T_1Z_1,\ Z_1) = d(T_1Z_1,\ T_2Z) &\leqslant \Phi(d(fZ_1,\ gZ),\ d(fZ_1,\ T_1Z_1), \\ & d(gZ,\ T_2Z))\leqslant\varphi(d(T_1Z_1,\ Z_1)), \end{aligned}$$

这又蕴含 $T_1Z_1=Z_1$．同理可证 $T_2Z_1=Z_1$．又因 $fZ_1=fT_1Z=T_1fZ=T_1Z_1=Z_1=T_2Z_1=T_2gZ=gT_2Z=gZ_1$, 因此 $Z_1$ 是 $f$, $g$, $T_1$ 和 $T_2$ 的公共不动点．

现在设 $Z_2$ 也是 $T_1$ 和 $f$ 的公共不动点且 $Z_2\neq Z_1$, 由(1)式导出

$$\begin{aligned} d(Z_2,\ Z_1) = d(T_1Z_2,\ T_2Z_1) &\leqslant \Phi(d(fZ_2,\ gZ_1),\ d(fZ_2,\ T_1Z_2)d(gZ_1,\ T_2Z_1)) \\ &\leqslant \varphi(d(Z_2,\ Z_1))<d(Z_2,\ Z_1) \end{aligned}$$

矛盾，故 $Z_2=Z_1$．即 $Z_1$ 是 $T_1$, $f$ 的唯一公共不动点．同理可证 $Z_1$ 也是 $T_2$, $g$ 的唯一公共不动点．

我们容易证得定理 1 的下面的轻微推广.

**定理 2** 设 $f$, $g$ 是分离 $L$-空间 $(X, \to)$ 的连续自映射、$(X, \to)$ 对某半距 $d$ 是 $d$-完备的,则 $f$, $g$ 有公共不动点的充要条件是存在连续映射对 $T_1: X\to g^{t_2}(X)$, $T_2: X\to f^{t_1}(X)$, 使得 $T_1f=fT_1$, $T_2g=gT_2$, 且对一切 $x$, $y\in X$ 成立

$$d(T_1^p x,\ T_2^q y)\leqslant \Phi(d(f^{t_1}x,\ g^{t_2}y),\ d(f^{t_1}x,\ T_1^p x),\ d(g^{t_2}y,\ T_2^q y)),$$

其中 $t_1$, $t_2$, $p$, $q\in N$, $\Phi$ 满足定理 1 内假设. 这时 $(f, T_1)$ 和 $(g, T_2)$ 都分别有唯一公共不动点,且这两点重合.

证明略.

**系 1** 设 $T_1$, $T_2$, $f$, $g$ 是分离 $L$-空间 $(X, \to)$ 的连续自映射使得 $T_1(X)\subset g(X)$, $T_2(X)\subset f(X)$, $T_1f=fT_1$, $T_2g=gT_2$. 假设 $(X, \to)$ 对某半距 $d$ 是 $d$-完备的、如果存在 $h\in(0, 1)$ 使得对一切 $x$, $y\in X$ 成立

$$d(T_1x,\ T_2y)\leqslant h\max\{d(fx,\ gy),\ d(fx,\ T_1x),\ d(gy,\ T_2y)\},$$

则 $(T_1, f)$ 和 $(T_2, g)$ 都分别有唯一公共不动点,且这两点重合.

证　令 $\Phi(r_1, r_2, r_3)=h\max\{r_1, r_2, r_3\}$, 容易验证此 $\Phi$ 满足定理 1 内假设. 由定理 1 知本系成立.

**注 1** 容易检验 Singh[6] 的定理 1 和系分别是我们的系 1 和定理 2 的特殊情形. 由[6]的注 1, 2, 3 知 Kasahara[4] 的主要结果, Tewai; Singh[5] 的定理和系 1 以及 Iséki[10] 的定理 5 更是我们的定理 1, 2 的特例、满足定理 1 和系 1 假设的实例可参见[6].

**注 2** 如果在定理 1, 2 和系 1 中令 $T_1=T_2=T$ 我们也得到新结果,容易验证 Fisher[7]的定理 2, Kasahara[4] 的定理 1, 2 都是这些结果的特例.

**系 2** 设 $f$, $g$ 是分离 $L$-空间 $(X, \to)$ 的连续自映射, $\{T_n\}_{n\in N}$ 是 $(X, \to)$ 的任意连续自映射序列使得 $T_n(X)\subset f(X)\cap g(X)$, $T_nf=fT_n$, $T_ng=gT_n$, $\forall n\in N$. 假设 $(X, \to)$ 对某半距 $d$ 是 $d$-完备的. 如果存在满足定理 1 内假设的函数 $\Phi: R_+^3\to R_+$ 使得对一切 $x$, $y\in X$, $i$, $j\in N$, $i\neq j$ 成立

$$d(T_ix,\ T_jy)\leqslant \Phi(d(fx,\ gy),\ d(fx,\ T_ix),\ d(gy,\ T_jy)), \tag{5}$$

则 $(\{T_n\}_{n\in N}, f)$ 和 $(\{T_n\}_{n\in N}, g)$ 分别有唯一公共不动点,且这两点重合.

证　任取 $x_0\in X$, 因 $T_n(X)\subset f(X)\cap g(X)$, $\forall n\in N$, 故可构造序列 $\{x_n\}_{n\in\omega}\subset X$ 使得 $y_{2n}=T_{2n+1}x_{2n}=fx_{2n+1}$, $y_{2n+1}=T_{2n+2}x_{2n+1}=gx_{2n+2}$, $\forall n\in\omega$, 从而得到序列 $\{y_n\}_{n\in\omega}$, 注意到利用(5)式,证明的余下部分与定理 1 的证明类似.

**定理 3** 设 $f$, $g$ 是 $L$-空间 $(X, \to)$ 的连续自映射, $T_1$, $T_2$ 是 $(X, \to)$ 的任意自映射, 使得 $T_1(X)\subset g^{t_2}(X)$, $T_2(X)\subset f^{t_1}(X)$, $T_1f=fT_1$, $T_2g=gT_2$, 其中 $t_1$, $t_2\in N$. 假设 $(X, \to)$ 对某连续半距 $d$(即 $d$ 关于两个自变量连续)是 $d$ 完备的. 如果存在满足定理 1 内假设的上半连续函数 $\Phi: R_+^3\to R_+$ 和 $p$, $q\in N$ 使得对一切 $x$, $y\in X$

$$d(Ux,\ Vy)\leqslant \Phi(d(Sx,\ Ry),\ d(Sx,\ Ux),\ d(Ry,\ Vy)), \tag{6}$$

其中 $U=T_1^p$, $V=T_2^q$, $S=f^{t_1}$, $R=g^{t_2}$, 则 $(T_1, f)$ 和 $(T_2, g)$ 分别有唯一公共不动点且这两点重合.

证　任取 $x_0\in X$, 由假设我们能构造序列 $\{x_n\}_{n\in\omega}$, $\{y_n\}_{n\in\omega}$, 使得 $y_{2n}=Vx_{2n}=Sx_{2n+1}$, $y_{2n+1}=Ux_{2n+1}=Rx_{2n+2}$. 仿定理 1 的证明容易证得 $y_n\to Z\in X$. 因而有

$$Vx_{2n}\to Z,\ Sx_{2n+1}\to Z,\ Ux_{2n+1}\to Z,\ Rx_{2n}\to Z.$$

由 $S$, $R$ 的连续性知存在 $\{n\}_{n\in\omega}$ 的子序列 $\{n_i\}_{i\in\omega}$ 使得

$$S(Ux_{2n_i+1})\to SZ;\quad S(Sx_{2n_i+1})\to SZ;$$
$$R(Vx_{2n_i})\to RZ;\quad R(Rx_{2n_i})\to RZ.$$

又由 $d$ 的连续性知存在 $\{n_i\}_{i\in\omega}$ 的子序列，又记为 $\{n_i\}_{i\in\omega}$ 使得

$$d(U(Sx_{2n_i+1}),\ V(Rx_{2n_i}))=d(S(Ux_{2n_i+1}),\ R(Vx_{2n_i}))\to d(SZ,\ RZ),$$
$$d(S(Sx_{2n_i+1}),\ R(Rx_{2n_i}))\to d(SZ,\ RZ),$$
$$d(S(Sx_{2n_i+1}),\ U(Sx_{2n_i+1}))\to 0,\ d(R(Rx_{2n_i}),\ V(Rx_{2n_i}))\to 0.$$

于是由(6)式有

$$d(U(Sx_{2n_i+1}),\ V(Rx_{2n_i}))\leqslant\Phi(d(S(Sx_{2n_i+1}),\ R(Rx_{2n_i})),$$
$$d(S(Sx_{2n_i+1}),\ U(Sx_{2n_i+1})),\ d(R(Rx_{2n_i}),\ V(Rx_{2n_i}))),\tag{7}$$

在(7)式中令 $i\to\infty$, 由 $\Phi$ 的上半连续性得到

$$d(SZ,\ RZ)\leqslant\varphi(d(SZ,\ RZ)),$$

上式蕴含 $SZ=RZ$. 又由(6)式有

$$d(U(Sx_{2n_i+1}),\ VZ)\leqslant\Phi(d(S(Sx_{2n_i+1}),\ RZ),$$
$$d(S(Sx_{2n_i+1}),\ U(Sx_{2n_i+1})),d(SZ,\ VZ)),\tag{8}$$

在(8)式中令 $i\to\infty$, 又推得 $RZ=VZ$, 同理可证 $SZ=UZ$. 于是有 $RZ=SZ=UZ=VZ$. 再由(6)式有

$$d(Ux_{2n+1},\ VZ)\leqslant\Phi(d(Sx_{2n+1},\ RZ),\ d(Sx_{2n+1},\ Ux_{2n+1}),\ d(RZ,\ VZ)).$$

由 $d$ 连续, $\Phi$ 上半连续从上式容易推得

$$d(Z,\ VZ)\leqslant\varphi(d(Z,\ VZ)),$$

这蕴含 $Z=VZ=RZ=UZ=SZ=T_1^pZ=T_2^qZ=f^{t_1}Z=g^{t_2}Z$. 由(6)式容易证得 $Z$ 分别是 $(T_1^p,\ f^{t_1})$ 和 $(T_2^q,\ g^{t_2})$ 的唯一公共不动点. 又因

$$fZ=T_1^pfZ=f^{t_1}fZ;\quad T_1Z=T_1^pT_1Z=f^{t_1}T_1Z,$$

故 $fZ$, $T_1Z$ 都是 $T_1^p$ 和 $f^{t_1}$ 的公共不动点. 由 $Z$ 的唯一性得到 $Z=fZ=T_1Z$, 即 $Z$ 是 $(T_1,\ f)$ 的唯一公共不动点. 同理可证 $Z$ 也是 $(T_2,\ g)$ 的唯一公共不动点.

注 3　[6]的定理 2 是定理 3 的极特殊的情形. 在定理 3 中没要求 $T_1$, $T_2$ 的连续性.

利用证明系 2 和定理 3 的方法，容易证明

**定理 4**　设 $f$, $g$ 是 $L$-空间 $(X,\ \to)$ 的连续自映射, $(X,\ \to)$ 对某连续半距 $d$ 是 $d$-完备的. $\{T_n\}_{n\in N}$ 是 $(X,\ \to)$ 的任意自映射序列使得 $T_n(X)\subset f(X)\cap g(X)$, $T_nf=fT_n$, $T_ng=gT_n$, $\forall n\in N$. 如果存在满足定理 3 内假设的函数 $\Phi$: $R_+^3\to R_+$ 使得对一切 $x,\ y\in X$, $i,\ j\in N$, $i\neq j$,

$$d(T_ix,\ T_jy)\leqslant\Phi(d(fx,\ gy),\ d(fx,\ T_ix),\ d(gy,\ T_jy)),$$

则 $(\{T_n\}_{n\in N},\ f)$ 和 $(\{T_n\}_{n\in N},\ g)$ 分别有唯一公共不动点，且这两点重合.

最后我们限制到距离空间 $(X,\ d)$ 内讨论问题.

**定理 5**　设 $f$, $g$ 是完备距离空间 $(X, d)$ 的自映射，对某固定的 $m, k\in N$, $f^m$, $g^k$ 是连续的, $\{T_n\}_{n\in N}$ 是 $X$ 的任意自映射序列使得 $T_n(f^{m-1}(X)\cap g^{k-1}(X))\subset f(f^{m-1}(X)\cap g^{k-1}(X))\cap g(f^{m-1}(X)\cap g^{k-1}(X))$, $T_nf=fT_n$, $T_ng=gT_n$, $\forall n\in N$. 如果存在关于每一自变量非减且上半连续的函数 $\Phi$: $R_+^4\to R_+$ 使得 $\varphi(t)=\Phi(t,\ t,\ t,\ t)$ 满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<\infty$, $\forall t>0$ 和使

得对一切 $x, y\in X$, $i, j\in N$, $i\neq j$, 有

$$d(T_ix, T_jy)\leqslant\Phi(d(fx, gy), d(fx, T_ix), d(gy, T_jy), \frac{1}{2}[d(fx, T_jy)+d(gy, T_ix)]), \tag{9}$$

则 $(\{T_n\}_{n\in N}, f)$ 和 $(\{T_n\}_{n\in N}, g)$ 分别有唯一公共不动点, 且这两点重合. 因此 $\{T_n\}_{n\in N}$, $f$ 和 $g$ 有唯一公共不动点.

证　任取 $x_0\in X$, 由假设可构造序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 使得 $T_{2n+1}x_{2n}=fx_{2n+1}$, $T_{2n+2}x_{2n+1}=gx_{2n+2}$, $\forall n\in\omega$.

由(9)式和 $\Phi$ 的假设推得

$$\begin{aligned}d(T_{2n+1}x_{2n}, T_{2n}x_{2n-1}) &= d(T_{2n}x_{2n-1}, T_{2n+1}x_{2n})\\ &\leqslant\Phi(d(fx_{2n-1}, gx_{2n}), d(fx_{2n-1}, T_{2n}x_{2n-1}), d(gx_{2n}, T_{2n+1}x_{2n}),\\ &\quad\frac{1}{2}[d(fx_{2n-1}, T_{2n+1}x_{2n})+0])\\ &\leqslant\Phi(d(T_{2n-1}x_{2n-2}, T_{2n}x_{2n-1}), d(T_{2n-1}x_{2n-2}, T_{2n}x_{2n-1}), d(T_{2n}x_{2n-1}, T_{2n+1}x_{2n}),\\ &\quad\frac{1}{2}[d(T_{2n-1}x_{2n-2}, T_{2n}x_{2n-1})+d(T_{2n}x_{2n-1}, T_{2n+1}x_{2n})])\\ &\leqslant\varphi(d(T_{2n}x_{2n-1}, T_{2n-1}x_{2n-2})).\end{aligned} \tag{10}$$

同理可证

$$d(T_{2n+2}x_{2n+1}, T_{2n+1}x_{2n})\leqslant\varphi(d(T_{2n+1}x_{2n}, T_{2n}x_{2n-1})). \tag{11}$$

由(10), (11)两式推得

$$\sum_{n=0}^{\infty}d(T_{n+2}x_{n+1}, T_{n+1}x_n)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(d(T_2x_1, T_1x_0))<\infty.$$

因此 $\{T_{n+1}x_n\}_{n\in\omega}$ 是 Cauchy 序列. 令 $T_{n+1}x_n\to Z\in X$. 由 $f^m$ 和 $g^k$ 的连续性有

$$f^m(T_{2n}x_{2n-1})\to f^mZ;\quad f^m(fx_{2n-1})\to f^mZ;$$
$$g^k(T_{2n-1}x_{2n-2})\to g^kZ;\quad g^k(gx_{2n-2})\to g^kZ.$$

由(9)式推得

$$\begin{aligned}d(T_{2n}f^mx_{2n-1}, T_{2n-1}g^kx_{2n-2})&\leqslant\Phi(d(f^{m+1}x_{2n-1}, g^{k+1}x_{2n-2}),\\ &\quad d(f^{m+1}x_{2n-1}, T_{2n}f^mx_{2n-1}), d(g^{k+1}x_{2n-2}, T_{2n-1}g^kx_{2n-2}),\\ &\quad\frac{1}{2}[d(f^{m+1}x_{2n-1}, T_{2n-1}g^kx_{2n-2})+d(g^{k+1}x_{2n-2}, T_{2n}f^mx_{2n-1})]),\end{aligned}$$

由 $\Phi$ 的上半连续性在上式中令 $n\to\infty$ 得到

$$d(f^mZ, g^kZ)\leqslant\varphi(d(f^mZ, g^kZ)),$$

上式蕴含 $f^mZ=g^kZ$. 对任意 $i\in N$, 又由(9)式有

$$\begin{aligned}d(T_if^{m-1}Z, T_{2n-1}g^kx_{2n-2})&\leqslant\Phi(d(f^mZ, g^{k+1}x_{2n-2}), d(f^mZ, T_if^{m-1}Z),\\ &\quad d(g^{k+1}x_{2n-2}, T_{2n-1}g^kx_{2n-2}), \frac{1}{2}[d(f^mZ, T_{2n-1}g^kx_{2n-2})\\ &\quad+d(g^{k+1}x_{2n-2}, T_if^{m-1}Z)]).\end{aligned}$$

在上式中令 $n\to\infty$ 得到

$$\begin{aligned}d(T_if^{m-1}Z, g^kZ)&\leqslant\Phi(d(f^mZ, g^kZ), d(f^mZ, T_if^{m-1}Z), d(g^kZ, g^kZ),\\ &\quad\frac{1}{2}[d(f^mZ, g^kZ)+d(g^kZ, T_if^{m-1}Z)])\leqslant\varphi(d(T_if^{m-1}Z, g^kZ)),\end{aligned}$$

上式蕴含 $T_i f^{m-1}Z=g^kZ=f^mZ$, $\forall i\in N$. 同理可证 $T_j g^{k-1}Z=f^mZ=g^kZ$, $\forall j\in N$. 于是有

$$T_i f^{m-1}Z=g^kZ=f^mZ=T_j g^{k-1}Z,\ \forall i,\ j\in N.$$

从而有

$$gT_i f^{m-1}Z=g^{k+1}Z=gT_j g^{k-1}Z=T_j g^kZ=T_jT_i f^{m-1}Z,\ \forall i,\ j\in N.$$

再由(9)式得到

$$\begin{aligned}d(T_i f^{m-1}Z,\ T_jT_i f^{m-1}Z)&\leqslant\Phi(d(f^mZ,\ gT_i f^{m-1}Z),\ d(f^mZ,\ T_i f^{m-1}Z),\\&\quad d(gT_i f^{m-1}Z,\ T_jT_i f^{m-1}Z),\ \frac{1}{2}[d(f^mZ,\ T_jT_i f^{m-1}Z)\\&\quad+d(gT_i f^{m-1}Z,\ T_i f^{m-1}Z)])\leqslant\Phi(d(T_i f^{m-1}Z,\ T_jT_i f^{m-1}Z),\ 0,\ 0,\\&\quad d(T_i f^{m-1}Z,\ T_jT_i f^{m-1}Z))\leqslant\varphi(d(T_i f^{m-1}Z,\ T_jT_i f^{m-1}Z)).\end{aligned}$$

上式蕴含 $T_i f^{m-1}Z(=g^kZ=f^mZ)$ 是 $\{T_n\}_{n\in N}$ 的公共不动点. 又因 $f(T_i f^{m-1}Z)=f^{m+1}Z=fT_j f^{m+1}Z=T_j f^mZ=T_jT_i f^{m-1}Z=T_i f^{m-1}Z$, 故 $T_i f^{m-1}Z$, 也是 $f$ 的不动点. 同理可证它也是 $g$ 的不动点. 因此 $T_i f^{m-1}Z(=g^kZ=f^mZ)$ 是 $\{T_n\}_{n\in N}$, $f$ 和 $g$ 的公共不动点.

设 $w$ 也是 $\{T_n\}_{n\in N}$ 和 $f$ 的公共不动点, 且 $w\neq T_i f^{m-1}Z$, 则由(9)式导出

$$\begin{aligned}d(w,\ T_i f^{m-1}Z)&=d(T_kw,\ T_jT_i f^{m-1}Z)\\&\leqslant\Phi(d(fw,\ gT_i f^{m-1}Z),\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}[d(fw,\ T_jT_i f^{m-1}Z)+d(gT_i f^{m-1}Z,\ T_kw)])\\&\leqslant\varphi(d(w,\ T_i f^{m-1}Z))<d(w,\ T_i f^{m-1}Z),\end{aligned}$$

矛盾, 因此 $w=T_i f^{m-1}Z$. 故 $T_i f^{m-1}Z$ 是 $\{T_n\}_{n\in N}$ 和 $f$ 的唯一公共不动点. 同理可证它也是 $\{T_n\}_{n\in N}$ 和 $g$ 的唯一公共不动点. 从而 $f^mZ(=g^kZ=T_i f^{m-1}Z,\ \forall i\in N)$ 是 $\{T_n\}_{n\in N}$, $f$ 和 $g$ 的唯一公共不动点.

**注 4** 在定理 5 中或令 $m=k=1$; 或令 $\Phi(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)=h\max\{r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4\}$, $h\in(0,\ 1)$; 或令 $f=g$; 或令 $f=g=I$ ($I$ 为恒同映射); 或令 $T_i=T$, $\forall i\in N$, 都得到新结果. Das, K. M. Naik, K. V.[8] 的定理 3.2 是定理 5 的极特殊的情形.

**引理** 设函数 $\varphi: R_+\to R_+$, 则对每一 $t>0$ 由 $t_0=0$, $t_1=t$, $t_{n+1}=t_n+\varphi(t_n-t_{n-1})$, $\forall n\in N$, 定义的序列 $\{t_n\}_{n\in\omega}$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<\infty$.

**证** 因为 $t_{n+1}-t_n=\varphi(t_n-t_{n-1})=\cdots=\varphi^n(t_1-t_0)=\varphi^n(t)$, 其中 $\varphi^0(t)=t$. 从而 $t_{n+1}=\sum\limits_{i=0}^{n}(t_{i+1}-t_i)=\sum\limits_{i=0}^{n}\varphi^i(t)$. 故显然有引理的结论成立.

**系 3** 设 $\{T_n\}_{n\in N}$ 是完备距离空间 $(X,\ d)$ 的自映射序列. 如果存在关于每一自变量非减的上半连续函数 $\Phi: R_+^4\to R_+$ 使得对每一 $t>0$, 由 $t_0=0$, $t_1=t$, $t_{n+1}=t_n+\varphi(t_n-t_{n-1})$ 定义的序列 $\{t_n\}_{n\in\omega}$ 收敛于 $t^*<\infty$ 和使得对一切 $x,\ y\in X$, $i,\ j\in N$, $i\neq j$ 成立

$$d(T_ix,\ T_jy)\leqslant\Phi(d(x,\ y),\ d(x,\ T_ix),\ p(y,\ T_jy),\ \frac{1}{2}[d(x,\ T_jy)+d(y,\ T_ix)]),$$

则 $\{T_n\}_{n\in N}$ 有唯一公共不动点 $Z$, 且对每一 $x_0\in X$ 有 $T_{n+1}x_n\to Z$.

**证** 在定理 5 中令 $f=g=I$. 由引理和定理 5 知本系成立.

**注 5** Chen, M. P., Shih, M. H.[11] 的定理 4 是系 4 的特例. 关于本文结果的某些新应用将另文给出.

## 参 考 文 献

[1] Kasahara, S., A remark on the contraction principle, *Proc. Japan. Acad.*, **44** (1968), 21—26.
[2] Kasahara, S., On Some generalization of the Banach Contraction theorem, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **12** (1976), 427—437.
[3] Jungck, G., Commuting mappings and fixed points, *Amer. Math. Monthly*, **83** (1976), 261—263.
[4] Kasahara, S., Iff fixed point criterions in $L$-spaces, *Math, Sem. Notes*, **4** (1976), 205—210.
[5] Tewari, B. M. L., Singh, S. L., On Common fixed points of commuting mappings, *Math. Sem Notes*, **5**, (1977), 361—366.
[6] Singh, S. L., Some Common fixed point theorems in $L$-Spaces, *Math. Sem. Notes*, **7** (1979), 91—97.
[7] Fisher, B., Mappings with a common fixed point, *Math. Sem. Notes*, **7** (1979), 81—84.
[8] Das, K. M., Naik, K. V., Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **77** (1979), 369—373.
[9] 丁协平,映射序列的公共不动点定理,四川师院学报, **1** (1982),1-8.
[10] Isèki, K., An approach to fixed point theorems, *Math. Sem. Notes*, **3** (1975), 193—202.
[11] Chen, M. P., Shin, M. H., Fixed point theorems for point-to point and point-to-set maps, *J. Math. Anal. Appl.*, **71** (1979), 516—524.

# SOME COMMON FIXED POINT THEOREMS OF COMMUTING MAPS

DING XIEPING
(*Sichuan Normal College*)

ABSTRACT

In this paper we obtain several new results on Common fixed point of commuting maps in $L$-space and metric space by introducing new contractive type conditions.

Our main results are the following:

**Theorem 2.** Let $f$, $g$ be continuous self-mappings of a separated $L$-space $(X, \rightarrow)$ which is $d$-complete for some semi-metric $d$ on $X$. Then $f$ and $g$ have a common fixed point in $X$ if and only if there exist continuous mappings $T_1$: $X \rightarrow g^{t_2}(X)$ and $T_2$: $X \rightarrow f^{t_1}(X)$ such that $T_1 f = f T_1$, $T_2 g = g T_2$ and for all $x, y \in X$

$d(T_1^p x, T_2^q y) \leqslant \Phi(d(f^{t_1}x, g^{t_2}y), d(f^{t_1}x, T_1^p x), d(g^{t_2}y, T_2^q y))$, where $t_1, t_2, p, q \in N$ and $\Phi$: $R_+^3 \rightarrow R_+$ which is nondecreasing in each coordinate variable and satisfy $\varphi(t) = \Phi(t, t, t)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$, $\forall t > 0$. Indeed, each of pairs $(T_1, f$ (and $(T_2, g)$ have a u-nique common fixed point and these two points coincide.

**Theorem 3.** Let $f$, $g$ be continuous self-mappings of a $L$-spaces $(X, \rightarrow)$, $T_1$, $T_2$ be any self-mappings of $X$ such that $T_1(X) \subset g^{t_2}(X)$, $T_2(X) \subset f^{t_1}(X)$, $T_1 f =$

$fT_1$, $T_2g=gT_2$, where $t_1$, $t_2\in N$. suppose$(X, \to)$is $d$-complete for some continuous demi-metric $d$. If there exist $p$, $q\in N$ and the function $\Phi$: $R_+^3\to R_+$ Satisfying the supposition in Theorem 2 such that for all $x$, $y\in X$

$$d(Ux, Vy)\leqslant\Phi(d(Sx, Ry), d(Sx, Ux), d(Ry, Vy)),$$

where $U=T_1^p$, $V=T_2^q$, $S=f^{t_1}$ and $R=g^{t_2}$. Then each of pairs$(T_1, f)$and$(T_2, g)$have a unique common fixed point and these two points coincide.

**Theorem 5.** Let $f$, $g$ be self-mappings of a complete metric space $(X, d)$. For some fixed $m$, $k\in N$, $f^m$ and $g^k$ are continuous. suppose $\{T_n\}_{n\in N}$ a sequence of self-mappings of $X$ such that $T_n(f^{m-1}(X)\cap g^{k-1}(X))\subset f(f^{m-1}(X)\cap g^{k-1}(X))\cap g(f^{m-1}(X)\cap g^{k-1}(X))$, $T_nf=fT_n$, $T_ng=gT_n$, $\forall n\in N$. If there exist an upper semi-continuous function $\Phi$: $R_+^4\to R_+$ which is nondecreasing in each coordinate variable such that $\varphi(t)=\Phi(t, t, t, t)$satisfies $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<\infty$, $\forall t>0$ and such that for all $x$, $y\in X$, $i$, $j\in N$, $i\neq j$,

$$d(T_ix, T_jy)\leqslant\Phi(d(fx, gy), d(fx, T_ix), d(gy, T_jy), \frac{1}{2}[d(fx, T_jy)+d(gy, T_ix)].$$

Then each of pairs$(\{T_n\}_{n\in N}, f)$and$(\{T_n\}_{n\in N}, g)$have a unique common fixed point and these two points coincide.

some important results of [3—8, 10, 11]are the special cases of our results.