数 学 年 刊
3 (5) 1982

一类利用函数偶的最佳逼近

史 应 光
(中国科学院计算中心)

§1. 引 言

设 $X\subset[a, b]$ 及 $K\subset C(X)$ 为 n 维线性子空间, 固定一个 $f\in C(X)$, 记 $K^+=\{p\in K: p\geqslant f\}$, $K^-=\{p\in K: p\leqslant f\}$ 及 $F=\{(p_1, p_2): p_1\in K^+, p_2\in K^-\}$. 在 $C(X)$ 中引进一种范数 $\|\cdot\|$, 我们可以提出如下的极小问题: 寻找 $(p_1, p_2)\in F$, 使它满足条件

$$\|p_1-p_2\|=e\equiv\inf\{\|q_1-q_2\|: (q_1, q_2)\in F\}, \tag{1}$$

称这样的函数偶 (p_1, p_2) (若存在的话)为 f 在 K 中的最佳逼近偶.

注意到 F 是有限维乘积空间 $K\times K$ 中的闭子集, 利用常用的紧性论证法[1, p. 20], 可以立即得到下述存在定理.

定理 1 $f\in C(X)$ 在 K 中的最佳逼近偶总是存在的.

下面就 L_1 范数及 L_∞ 范数讨论最佳逼近偶的特征及唯一性, 这分别是 §2 及 §3 的内容.

§2. L_1 逼 近

在本节中, 我们限于 $X\equiv[a, b]$ 的情形进行讨论, 但是该结果也适用于 X 为有限点集的情形, 自然此时积分范数将退化为有限和范数.

定理 2 $(p_1, p_2)\in F$ 是 f 在 K 中的最佳 L_1 逼近偶当且仅当 p_1 和 p_2 分别是 f 在 K^+ 中和在 K^- 中的最佳 L_1 逼近.

证 必要性 假定相反, 比方说 p_1 不是 f 在 K^+ 中的最佳 L_1 逼近, 即存在 $q_1\in K^+$ 使 $\|q_1-f\|<\|p_1-f\|$. 如此 $(q_1, p_2)\in F$ 且

$$\|q_1-p_2\|=\|q_1-f\|+\|f-p_2\|<\|p_1-f\|+\|f-p_2\|=\|p_1-p_2\|.$$

这与 (p_1, p_2) 是 f 之最佳逼近偶的假设不符. 故 p_1 和 p_2 应该分别是 f 在 K^+ 中和在 K^- 中的最佳 L_1 逼近.

充分性 对任意 $(q_1, q_2)\in F$ 都有

$$\|q_1-q_2\|=\|q_1-f\|+\|f-q_2\|\geqslant\|p_1-f\|+\|f-p_2\|=\|p_1-p_2\|.$$

证毕.

因为单侧逼近也是凸集逼近, 因而有下述推论(参见[2]). 至于唯一性可参看[5].

推论 $(p_1, p_2)\in F$ 是 f 之最佳 L_1 逼近偶当且仅当同时满足上述两个关系式

本文 1980 年 7 月 9 日收到.

$$\int_X (q-p_1)\operatorname{sgn}(f-p_1)dx \leqslant \int_{Z(f-p_1)} |q-p_1|dx,\ \forall q\in K^+,$$

$$\int_X (q-p_2)\operatorname{sgn}(f-p_2)dx \leqslant \int_{Z(f-p_2)} |q-p_2|dx,\ \forall q\in K^-,$$

这里 $Z(h)=\{x\in X: h(x)=0\}$.

§3. L_∞ 逼 近

在本节中，除最后一个定理外，我们允许 X 是$[a, b]$中的任意闭集. 为讨论的需要，我们引进若干定义和记号.

对于$(p_1, p_2)\in F$，令

$$D(p_1-p_2)=\{x\in X: |p_1(x)-p_2(x)|=\|p_1-p_2\|\},$$

$$\sigma_1(x)=\begin{cases}-1, & x\in D(p_1-p_2),\\ 1, & x\in Z(p_1-f),\end{cases}$$

$$\sigma_2(x)=\begin{cases}1, & x\in D(p_1-p_2),\\ -1, & x\in Z(p_2-f).\end{cases}$$

定义 1 若在集合 $D(p_1-p_2)\cup Z(p_1-f)$ $(D(p_1-p_2)\cup Z(p_2-f))$ 中存在一组 $n+1$ 个有序点

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$$

使

$$\sigma_1(x_{i+1})=-\sigma_1(x_i)\ (\sigma_2(x_{i+1})=-\sigma_2(x_i)),\quad i=1, 2, \cdots, n,$$

则称它为 p_1 对 p_2(p_2 对 p_1)的交错组.

定义 2 $\Gamma(p_1, p_2)\subset K\times K$ 是所有满足下述条件的函数偶的集合：对于每一个$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1, p_2)$，都存在一个正数 λ^*，使

$$(p_1, p_2)+\lambda(r_1, r_2)=(p_1+\lambda r_1, p_2+\lambda r_2)\in F,\ \forall\lambda\in(0, \lambda^*). \tag{2}$$

关于集合 $\Gamma(p_1, p_2)$ 我们有下述特征.

定理 3 设$(p_1, p_2)\in F$ 及$(r_1, r_2)\in K\times K$，则$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1, p_2)$当且仅当对于每一点 $\xi\in Z(p_1-f)$，$(\xi\in Z(p_2-f))$都存在一个邻域 δ_ξ 及正数 λ_ξ，使

$$p_1(x)+\lambda r_1(x)\geqslant f(x),\ (p_2(x)+\lambda r_2(x)\leqslant f(x)),\ \forall\lambda\in(0, \lambda_\xi),\ \forall x\in\delta_\xi. \tag{3}$$

证 必要性是平凡的. 现证充分性. 对于 $\xi\bar{\in} Z(p_1-f)$，$(\xi\bar{\in} Z(p_2-f))$，依定义 $p_1(\xi)>f(\xi)$ $(p_2(\xi)<f(\xi))$. 据连续性，可以找到 ξ 之邻域 δ_ξ 及正数 λ_ξ，使(3)式成立. 如此，$\bigcup_{\xi\in X}\delta_\xi\supset X$，故可从中选出有限多个邻域覆盖 X，取对应之有限多个正数中最小者为 $\lambda_1(\lambda_2)$，则 $\lambda_1>0$ $(\lambda_2>0)$且成立

$$p_1+\lambda r_1\in K^+,\ \forall\lambda\in(0, \lambda_1),\ (p_2+\lambda r_2\in K^-,\ \forall\lambda\in(0, \lambda_2)),$$

那么容易看出，只须取 $\lambda^*=\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$，就能使(2)式成立，此即$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1, p_2)$.

证毕.

现给出最佳逼近偶的一个特征定理.

定理 4 $(p_1, p_2)\in F$ 是 f 在 K 中的最佳一致逼近偶的充要条件为不存在函数偶$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1, p_2)$使

$$r_1(x)<r_2(a),\ \forall x\in D(p_1-p_2). \tag{4}$$

证　必要性　假定存在$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1, p_2)$满足(4)式. 这时首先注意到应当有 $e\equiv\|p_1-p_2\|>0$, 因为相反的话从 $e=0$ 将得出 $p_1=p_2=f$ 及 $Z(p_1-f)=Z(p_2-f)=D(p_1-p_2)=X$. 于是$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1,p_2)$及(4)式分别推出 $p_1+\lambda r_1\geqslant f\geqslant p_2+\lambda r_2$, $\forall\lambda\in(0, \lambda^*)$及 $r_1<r_2$. 而这是不可能的, 从而证明了 $e>0$.

下面我们来证明存在正数 $\bar\lambda$, 使当 $0<\lambda<\bar\lambda$ 时

$$\|p_1-p_2+\lambda(r_1-r_2)\|<e. \tag{5}$$

事实上, 对于 $\xi\in D(p_1-p_2)$, 从 $r_1(\xi)-r_2(\xi)<0$ 及 $p_1(\xi)-p_2(\xi)=e>0$ 得出, 存在 ξ 之邻域 δ_ξ 及正数 λ_ξ, 使

$$-e<p_1(x)-p_2(x)+\lambda[r_1(x)-r_2(x)]<e,\ \forall\lambda\in(0, \lambda\xi),\ \forall x\in\delta_\xi.$$

而对于 $\xi\bar\in D(p_1-p_2)$, 根据连续性, 也存在 ξ 之邻域 δ_ξ 及正数 λ_ξ 满足上式. 从而同定理 3 之推理, 可以找到一个正数 $\bar\lambda$, 使当 $0<\lambda<\bar\lambda$ 时(5)式成立.

现在任取一个正数 $\lambda<\min\{\lambda^*, \bar\lambda\}$, 其中 λ^* 是定义 2 中的那个正数. 对此 λ, 只须令 $q_1=p_1+\lambda r_1$ 及 $q_2=p_2+\lambda r_2$, 从(2)式及(5)式分别得到$(q_1, q_2)\in F$ 及 $\|q_1-q_2\|<e$. 这表明(q_1, q_2)是比(p_1, p_2)更好的逼近. 这个矛盾就证明了条件的必要性.

充分性　假定(p_1, p_2)不是 f 之最佳逼近偶, 那末可以找到$(q_1, q_2)\in F$ 使得$\|q_1-q_2\|<\|p_1-p_2\|$. 记 $r_1=q_1-p_1$, $r_2=q_2-p_2$. 当 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 时易见

$$p_1+\lambda r_1=p_1+\lambda(q_1-p_1)=(1-\lambda)p_1+\lambda q_1\geqslant f,$$
$$p_2+\lambda r_2=p_2+\lambda(q_2-p_2)=(1-\lambda)p_2+\lambda q_2\leqslant f.$$

这表明$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1, p_2)$. 此外, 当 $x\in D(p_1-p_2)$时恒有

$$q_1(x)-q_2(x)\leqslant\|q_1-q_2\|<\|p_1-p_2\|=p_1(x)-p_2(x),$$

由此 $r_1(x)<r_2(x)$. 即(4)式也满足. 至此, 我们看到(r_1, r_2)满足所述全部条件. 这是不可能的. 故(p_1, p_2)应该是 f 的最佳一致逼近偶.

证毕.

下面给出一个类似于定理 2 那样的结果. 为此须先证明一个

引理 1　设 $1\in K$. 若 $p\in K$ 是 f 在 K 中的最佳一致逼近及 $E=\|p-f\|$, 则

(a) $p+E$ 是 f 在 K^+ 中的最佳一致逼近,

(b) $p-E$ 是 f 在 K^- 中的最佳一致逼近.

此外, 若以 $E_1(E_2)$表示 f 在 $K^+(K^-)$中的最佳一致逼近偏差, 则

$$e=E_1=E_2=2E.$$

证　(a) 首先注意到 $q\equiv p+E\in K^+$. 其次, 由于 p 对 f 的偏差点中至少有一个是负的(即至少有一点 ξ 满足 $f(\xi)-p(\xi)=-E$), 故$\|q-f\|=2E$. 另一方面, 若 $q_1\in K^+$ 且 $\|q_1-f\|=2d<2E$, 则 $\|(q_1-d)-f\|=d<E$ 表明 q_1-d 是比 p 更好的逼近. 这个矛盾就证明了 $q\equiv p+E$ 是 f 在 K^+ 中的最佳逼近, 且同时也证明了关系式 $E_1=\|q-f\|=2E$.

(b) 类似于(a)的推理可以肯定 $p-E$ 是 f 在 K^- 中的最佳逼近且 $E_2=2E$.

最后, 根据 e 之定义, 应当有 $e\leqslant\|(p+E)-(p-E)\|=2E$ 及 $e\geqslant E_1=2E$. 从而得到 $e=2E$.

定理 5　设 $K\subset C[a,b]$是 n 维 Haar 子空间且 $1\in K$. 则$(p_1, p_2)\in F$ 是 f 在 K 中

的最佳一致逼近偶当且仅当 p_1 和 p_2 分别是 f 在 K^+ 中和在 K^- 中的最佳一致逼近. 而且, f 之最佳一致逼近偶是唯一的.

证　必要性　在引理 1 的记号下, 有

$$\|p_1-p_2\|=e=E_1=E_2=2E.$$

于是

$$\|p_1-f\|\leqslant\|p_1-p_2\|=E_1,\ \|p_2-f\|\leqslant\|p_1-p_2\|=E_2.$$

这表明 p_1 和 p_2 分别是 f 在 K^+ 中和在 K^- 中的最佳逼近.

根据[3, 定理 4.1], f 之单侧最佳一致逼近总是唯一的, 因而 f 之最佳一致逼近偶也是唯一的.

充分性　直接由定理 1 和已证明的必要性及 f 之单侧最佳一致逼近的唯一性得出.

条件 $1\in K$ 一般地是不能去掉的, 下面的例子表明这一点.

例　$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f=(0, 24, 0, 24, 24)$, $K=S\{x, x^2, x^3\}$ (S 为线性包). 我们知道 K 是 $C[1, 5]$ 中的 Haar 子空间. 容易验证 $p_1=34x-15x^2+2x^3$ 和 $p_2=0$ 分别是 f 在 K^+ 中和在 K^- 中的最佳一致逼近. 但 (p_1, p_2) 不是 f 之最佳一致逼近偶. 因为对于 $q_1=\frac{70}{3}x-7x^2+\frac{2}{3}x^3$, $q_2=0$ 有 $(q_1, q_2)\in F$ 及

$$\|q_1-q_2\|=25<45=\|p_1-p_2\|.$$

引理 2　若 $(p_1, p_2)\in F$ 是 f 在 K 中的最佳一致逼近偶, 则

(a) $Z(p_1-f)\cap D(p_1-p_2)\neq\emptyset$ 或存在 p_1 对 p_2 之交错组,

(b) $Z(p_2-f)\cap D(p_1-p_2)\neq\emptyset$ 或存在 p_2 对 p_1 之交错组.

证　在引理的条件下, p_1 可视作 p_2 在 K^+ 中的最佳逼近, p_2 也可视作 p_1 在 K^- 中的最佳逼近. 剩下只须引用[3]中定理 3.2. 事实上, 以结论(a)为例, 容易看出, [3]中诸集合 X_{+1}, X_{-1}, X_{+2} 和 X_{-2} 在此情形中相应的为 $\emptyset$, $D(p_1-p_2)$, $Z(p_1-f)$ 和 $\emptyset$. 所以[3, 定理 3.2]中的条件 $(X_{+1}\cup X_{+2})\cap(X_{-1}\cup X_{-2})=\emptyset$ 在此就等价于 $Z(p_1-f)\cap D(p_1-p_2)=\emptyset$. 于是从 p_1 是 p_2 在 K^+ 中的最佳逼近这一事实即能推得结论(a).

定理 6　设 $X=[a, b]$ 及 K 是 $C[a, b]$ 中的 2 阶 n 维广义 Haar 子空间[4]. 又设 $(p_1, p_2)\in F$ 是 $f\in C^1[a, b]$ 在 K 中的最佳一致逼近偶. 若 $(Z(p_1-f)\cup Z(p_2-f))\cap D(p_1-p_2)=\emptyset$, 则 (p_1, p_2) 是唯一的.

证　假设 $(q_1, q_2)\in F$ 也是 f 在 K 中的最佳逼近偶. 令 $r_1=\frac{p_1+q_1}{2}$, $r_2=\frac{p_2+q_2}{2}$. 那么由范数的三角不等式易知 $(r_1, r_2)\in F$ 也是 f 之最佳逼近偶. 并且也不难验证下述关系式

$$Z(r_1-f)\subset Z(p_1-f)\cap Z(q_1-f),\ D(r_1-r_2)\subset D(p_1-p_2)\cap D(q_1-q_2).$$

这样, 若 $\xi\in Z(r_1-f)$, 则 $p_1(\xi)=q_1(\xi)=f(\xi)$, 而且, 当 $\xi\in Z(r_1-f)\cap(a, b)$ 时, 因 $p_1-f\geqslant0$, 故 ξ 是 p_1-f 之二重零点, 于是 $p_1'(\xi)=f'(\xi)$. 同理, $q_1'(\xi)=f'(\xi)$. 由此 ξ 是 p_1-q_1 之二重零点.

另一方面, $Z(p_1-f)\cap D(p_1-p_2)=\emptyset$ 蕴含 $Z(r_1-f)\cap D(r_1-r_2)=\emptyset$. 而由[3]中定理 3.2 知, 在此条件下, r_1 对 r_2 存在交错组. 我们取定一组含 $n+1$ 个点的交错组, 记其中零点的个数(不计零点的重数)为 m, 而将计算零点重数后的零点数记为 m'. 我们来证

明 $m'\geqslant n$. 为此分两种情形进行讨论.

当 n 为奇数时, $n+1$ 即为偶数, 因而 $m=\frac{n+1}{2}$. 由于零点与偏差点(即 $D(r_1-r_2)$ 中的点)的交错性质,这时至多只能有一个零点位于区间 $[a, b]$ 之端点,于是

$$m'\geqslant 2(m-1)+1=2\left(\frac{n+1}{2}-1\right)+1=n.$$

当 n 为偶数时, $n+1$ 即为奇数, 因而 $m\geqslant\frac{n}{2}$. 这时若两端点 a 和 b 皆非零点,则

$$m'=2m\geqslant n.$$

若端点 a 和 b 中至少有一个为零点, 则由零点与偏差点的交错性质知零点个数应大于偏差点个数, 所以实际上应当有 $m=\frac{n}{2}+1$, 于是

$$m'\geqslant 2(m-2)+2=2\left(\frac{n}{2}+1-2\right)+2=n.$$

所以我们可以断言,在任何情况下皆有 $m'\geqslant n$. 这表明 p_1-q_1 至少有 n 个零点(计算零点重数). 于是 $p_1=q_1$. 类似地可证 $p_2=q_2$. 这就证明了 (p_1, p_2) 的唯一性.

参 考 文 献

[1] Cheney, E. W., Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill, *New York*, 1966.

[2] 史应光,计算数学, **2**: 3(1980), 197—202.

[3] Taylor, G. D., *Jour. Math. Anal. Appl.*, **27**: 2(1969), 241—248.

[4] Taylor, G. D., *Numer. Math.*, **14**: 1(1969), 71—78.

[5] 史应光,带约束值域的 L 逼近,应用数学学报,未发表.

A KIND OF BEST APPROXIMATION USING FUNCTION PAIRS

SHI YINGGUANG
(*The Computing Center, Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper discusses the minimization problem: For a Given n-dimensional subspace K and a function f of $C(X)$, find a function pair $(p_1, p_2)\in K\times K$, $p_1\geqslant f\geqslant p_2$ such that

$$\|p_1-p_2\|=\inf_{\substack{(q_1,q_2)\in K\times K\\ q_1\geqslant f\geqslant q_2}}\|q_1-q_2\|.$$

We call such a pair (p_1, p_2) (if any) a best approximation pair to f from K.

This paper has proved a characterization theorem for best L_1 approximation pairs which says that (p_1, p_2) is a best L_1 approximation pair if and only if p_1 and p_2 are respectively an upper sided and a lower sided best L_1 approximation to f.

With the provisos that K is a Haar subspace and thet $1\in K$ it turns out that the above conclusion of the characterization theorem for best L_∞ approximation pairs is also true. However we have further established, without the provisos at all, a "complete" characterization theorem for best L_∞ approximation pairs.

Furthermore, sufficient conditions for uniqueness of best L_∞ approximation pairs are also given.