数 学 年 刊
3 (5) 1982

多连通域上二阶非线性椭圆型方程组广义黎曼-希尔伯特问题

李 明 忠
(复旦大学)

敬献给苏步青教授八十寿辰暨从事教育工作五十年

考察复数形式的二阶非线性椭圆型方程组

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}=F\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}}\right),\ z\in G \tag{1}$$

适合边界条件

$$\operatorname{Re}[z^{-n_1}e^{-\pi i\alpha_1(z)}w]=\gamma_1(z),\ \operatorname{Re}\left[z^{-n_2}e^{-\pi i\alpha_2(z)}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right]=\gamma_2(z),\ z\in\Gamma \tag{2}$$

的广义黎曼-希尔伯特问题.

这里 G 是平面上 $m+1$ 连通区域, 不妨取为标准圆域, 即它的边界 Γ 是由 $m+1$ 个圆周 Γ_k: $|z-z_k|=\gamma_k$ 所组成, Γ_0 为 $|z|=1$, 且设原点 $z=0$ 含在 G 内. 根据 Riemann 定理, 平面上任意的以约当曲线为边界的 $m+1$ 连通区域, 都可共形映照到这样的标准区域. $\alpha_i(z)\,(i=1,\ 2)$ 是确定在 Γ 上逐段为常数的连续函数, 在 Γ_0 上 $\alpha_i(z)=0$, 在 Γ_j 上 $\alpha_i(z)=\alpha_{ij}=$常数, $i=1,\ 2;\ j=1,\ \cdots,\ m$.

本文考虑 $m\geqslant 1$ 的情形, 因为对于 $m=0$, 即对于单连通域文[2—5]都已作了比较充分的讨论, 也得到了比较完整的结果. 而对于多连通区域, 形如(1)的一般形式的二阶方程组的黎曼-希尔伯特问题, 还未有这方面的研究结果. 本文通过构造一类多连通域上的积分算子, 建立边值问题广义解表示式, 然后运用奇异积分方程理论和先验估计方法, 证明了广义解的存在定理.

值得指出, 边值问题(1), (2)要有正则解, 由[1]知必须指标 $n_i>m-1$. 而当 $n_i\leqslant m-1$ 时, 一般说来问题(1), (2)没有正则解, 即在连续函数类中一般不可解, 只有在扩大的函数类(含有奇点)中, 才可能有解. 所以为了证明广义解的存在性, 本文限于考虑 $n_i>m-1$ 的情形. 又因 $m\geqslant 1$, 所以 $n_i\geqslant 1$.

二阶复式方程(1)的右端不妨写成

$$F=Q_1\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+Q_2\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}$$
$$+h\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z}\right), \tag{3}$$

这时假设它满足以下条件

本文1980年2月12日收到.

i) $Q_i(z, w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$ 和 $h(z, w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)})$ 对任意给定的复数 $w^{(0)}$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ 关于 $z\in G+\Gamma$ 有界可测，给定 $z\in G+\Gamma$ 关于 $w^{(0)}$, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ 连续，且均匀满足不等式

$$|Q_i(z, w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, u_1^{(1)}, u_1^{(2)})u_1^{(i)}-Q_i(z, w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, u_2^{(1)}, u_2^{(2)})u_2^{(i)}|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}q^0(|u_1^{(1)}-u_2^{(1)}|+|u_1^{(2)}-u_2^{(2)}|),\ 0<q^0<1;$$

ii) 对任意的连续函数 $w^{(0)}(z)$, $w^{(1)}(z)$, $w^{(2)}(z)$，恒有

$$|h(z, w^{(0)}(z), w^{(1)}(z), w^{(2)}(z)|\leqslant h_0(z),\ L_p(h_0(z))=D_0;$$

iii) $\gamma_i(z)\,(i=1, 2)$ 是给定在边界 Γ 上按 Hölder 意义下连续的函数，即设 $\gamma_i(z)\in C_\nu^1(\Gamma)$, $\frac{1}{2}<\nu<1$.

以上假定统称为条件(C).

现在，首先建立方程(1)适合边界条件(2)的广义解都表示式.

按照文[2]的讨论，二阶复式方程(1)的广义解都可以写成

$$w(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)\bar{z}+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar{\zeta}-\bar{z})}{\zeta-z}d\xi\,d\eta,\ \zeta=\xi+i\eta, \tag{4}$$

其中 $\Phi_1(z)$ 和 $\Phi_2(z)$ 是域 G 内的两个任意全纯函数. 我们取

$$\Phi_2(z)=\varphi_2(z)-\sum_{j=1}^m e^{2\pi i\alpha_{2j}}z^{n_2}\left[\frac{z-z_j}{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}\right]^{n_2}\frac{(z-z_j)}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}d\xi\,d\eta}{r_j^2-(z-z_j)(\bar{\zeta}-\bar{z}_j)}$$
$$-\frac{z^{2n_2+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}d\xi\,d\eta}{1-\bar{\zeta}z} \tag{5}$$

和

$$\Phi_1(z)=\varphi_1(z)+\sum_{j=1}^m e^{2\pi i\alpha_{1j}}z^{n_1}\left[\frac{z-z_j}{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}\right]^{n_1}\frac{(z-z_j)}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)d\xi\,d\eta}{r_j^2-(z-z_j)(\bar{\zeta}-\bar{z}_j)}$$
$$+\sum_{j=1}^m e^{2\pi i\alpha_{2j}}z^{n_2-1}\left[\frac{z-z_j}{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}\right]^{n_2}\frac{(z-z_j)}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}d\xi\,d\eta}{r_j^2-(z-z_j)(\bar{\zeta}+\bar{z}_j)}$$
$$+\frac{z^{2n_1+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)d\xi\,d\eta}{1-\bar{\zeta}z}+\frac{z^{2n_2}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}d\xi\,d\eta}{1-\bar{\zeta}z}, \tag{6}$$

注意到在 Γ_j 上，有 $(\bar{z}-\bar{z}_j)(z-z_j)=r_j^2$，函数

$$\zeta(z)=\frac{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}{z-z_j}$$

在 $|z-z_j|>r_j$ 内全纯，且把 Γ_j: $|z-z_j|=r_j$ 外部的区域共形映照到 Γ_j 的内部：$|z-z_j|<r_j$. 又因为原点 $z=0$ 不在 $|z-z_j|<r_j$ 内，所以函数

$$\frac{z-z_j}{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}$$

在圆周 Γ_j 的外部：$|z-z_j|>r_j$ 全纯. 易知 $[r_j^2-(z-z_j)(\bar{\zeta}-\bar{z}_j)]^{-1}$ 也在 $|z-z_j|>r_j$ 内全纯. 由此可见，由(5)、(6)确定的 $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$ 也是域 G 内的全纯函数. 综合(4)、(5)、(6)，我们得到了表示式

$$w(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)\bar{z}+\sum_{j=1}^{m}e^{2\pi i\alpha_{1j}}z^{n_1}\left[\frac{z-z_j}{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}\right]^{n_1}\frac{(z-z_j)}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)d\xi\,d\eta}{r_j^2-(z-z_j)(\bar{\zeta}-\bar{z}_j)}$$
$$+\sum_{j=1}^{m}e^{2\pi i\alpha_{2j}}z^{n_2-1}(1-z\bar{z})\left[\frac{z-z_j}{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}\right]^{n_2}\frac{(z-z_j)}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}d\xi\,d\eta}{r_j^2-(z-z_j)(\bar{\zeta}-\bar{z}_j)}$$
$$+\frac{z^{2n_1+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-\bar{z})d\xi\,d\eta}{1-\bar{\zeta}z}+\frac{z^{2n_2}(1-z\bar{z})}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}d\xi\,d\eta}{1-\bar{\zeta}z}$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar{\zeta}-\bar{z})d\xi\,d\eta}{\zeta-z}. \tag{7}$$

为方便起见，我们记

$$\tilde{T}^{(0)}f=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar{\zeta}-\bar{z})}{\zeta-z}d\xi\,d\eta,\quad \tilde{T}f=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\xi\,d\eta,$$
$$\tilde{T}_0^{(1)}f=\frac{z^{2n_1+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)}{1-\bar{\zeta}z}d\xi\,d\eta,$$
$$\tilde{T}_j^{(1)}f=e^{2\pi i\alpha_{1j}}\left[\frac{z-z_j}{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}\right]^{n_1}\frac{(z-z_j)}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)}{r_j^2-(z-z_j)(\bar{\zeta}-\bar{z}_j)}d\xi\,d\eta,$$
$$\tilde{T}_0^{(2)}f=\frac{z^{2n_2+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}d\xi\,d\eta,$$
$$\tilde{T}_j^{(2)}f=e^{2\pi i\alpha_{2j}}z^{n_2}\left[\frac{z-z_j}{r_j^2+\bar{z}_j(z-z_j)}\right]^{n_2}\frac{(z-z_j)}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}}{r_j^2-(z-z_j)(\bar{\zeta}-\bar{z}_j)}d\xi\,d\eta,$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

然后，我们将表示式(7)代入边界条件(2)中的第一式，有

当 $z\in\Gamma_0$ 时

$$\operatorname{Re}[z^{-n_1}w]=\operatorname{Re}\left[z^{-n_1}\left(\varphi_1(z)+\frac{\varphi_2(z)}{z}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}[\tilde{T}_j^{(1)}f]$$
$$+\operatorname{Re}[z^{-n_1}\tilde{T}^{(0)}f+\tilde{T}_0^{(1)}f]=\gamma_1(z),\ z\in\Gamma_0,$$

而上式的最后一项两个积分和的实部等于零，故有

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n_1}\left(\varphi_1(z)+\frac{\varphi_2(z)}{z}\right]=\gamma_1(z)-\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}[\tilde{T}_j^{(1)}f]. \tag{8}$$

当 $z\in\Gamma_k$ 时

$$\operatorname{Re}[z^{-n_1}e^{-\pi i\alpha_{1k}}w]=\operatorname{Re}\left[z^{-n_1}e^{-\pi i\alpha_{1k}}\left(\varphi_1(z)+\frac{r_k^2+\bar{z}_k(z-z_k)}{z-z_k}\varphi_2(z)\right)\right]$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\operatorname{Re}[e^{-\pi i\alpha_{1k}}\tilde{T}_j^{(1)}f]+\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}\left[e^{-\pi i\alpha_{2k}}z^{-(n_1+1)}\left(1-\frac{z(r_k^2+\bar{z}_k(z-z_k))}{z-z_k}\right)\tilde{T}_j^{(2)}f\right]$$
$$+\operatorname{Re}\left[z^{-n_1}e^{-\pi i\alpha_{1k}}\left(\tilde{T}_0^{(1)}f+\frac{1}{z}\left(1-\frac{z(r_k^2+\bar{z}_k(z-z_k))}{z-z_k}\right)\tilde{T}_0^{(2)}f\right)\right]$$
$$+\operatorname{Re}[\bar{z}^{-n_1}\tilde{T}_k^{(1)}f+e^{-\pi i\alpha_{1k}}z^{-n_1}\tilde{T}^{(0)}f]=\gamma_1(z),$$

而上式最后一项又等于

$$\operatorname{Re}\left[e^{\pi i\alpha_{1k}}\bar{z}^{-n_1}\frac{(z-z_k)}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)d\xi\,d\eta}{r_k^2-(z-z_k)(\bar{\zeta}-\bar{z}_k)}-\overline{e^{\pi i\alpha_{1k}}\frac{\bar{z}^{-n_1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)d\xi\,d\eta}{r_k^2-(z-z_k)(\bar{\zeta}-\bar{z}_k)}}\right]=0.$$

所以，又得

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n_1}e^{-\pi i\alpha_{1k}}\left(\varphi_1(z)+\frac{r_k^2+\bar{z}_k(z-z_k)}{z-z_k}\varphi_2(z)\right)\right]$$
$$=\gamma_1(z)-\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\operatorname{Re}\left[e^{-\pi i\alpha_{1k}}\widetilde{T}_j^{(1)}f\right]$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}\left[e^{-\pi i\alpha_{2k}}z^{-(n_1+1)}\left(1-\frac{z(r_k^2+\bar{z}_k(z-z_k))}{z-z_k}\right)\widetilde{T}_j^{(2)}f\right]$$
$$-\operatorname{Re}\left[z^{-n_1}e^{-\pi i\alpha_{1k}}\left(\widetilde{T}_0^{(1)}f+\frac{1}{z}\left(1-\frac{z(r_k^2+\bar{z}_k(z-z_k))}{z-z_k}\right)\widetilde{T}_0^{(2)}f\right)\right]. \tag{9}$$

将表示式(7)对 $\bar{z}$ 求导，得

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\varphi_2(z)-\sum_{j=1}^{m}\widetilde{T}_j^{(2)}f-\widetilde{T}_0^{(2)}f-\widetilde{T}f, \tag{10}$$

于是，由边界条件(2)的第二式，又有

当 $z\in\Gamma_0$ 时

$$\operatorname{Re}[z^{-n_2}\varphi_2(z)]=\gamma_2(z)+\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}[z^{-n_2}\widetilde{T}_j^{(2)}f], \tag{11}$$

当 $z\in\Gamma_k$ 时

$$\operatorname{Re}[z^{-n_2}e^{-\pi i\alpha_{2k}}\varphi_2(z)]=\gamma_2(z)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\operatorname{Re}[e^{-\pi i\alpha_{2k}}z^{-n_2}\widetilde{T}_j^{(2)}f]+\operatorname{Re}[z^{-n_2}e^{-\pi i\alpha_{2k}}\widetilde{T}_0^{(2)}f]. \tag{12}$$

边值问题(11)，(12)也就是关于多连通域上的余纯函数 $\varphi_2(z)$ 的 Riemann-Hilbert 问题.

由[1]知，当 $n_2>m-1$ 时，边值问题(13)对任意给定的 f 是可解的，而且线性无关解的个数有 $2n_2+1-m$.

若给定以下点型条件，使 $\varphi_2(z)$ 满足

$$\varphi_2(z_j^{(1)})=a_j^{(2)}+ib_j^{(2)}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k_1),$$
$$\varphi_2(z_j^{(2)})=z_j^{(2)n_2}e^{\pi i\alpha_{2j}}(\gamma_2(z_j^{(2)}+ic_j^{(2)})+\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m}\widetilde{T}_k^{(2)}f\right)_{z=z_j^{(2)}}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k_2), \tag{13}$$

这里固定点组 $\{z_j^{(1)}\}$，$\{z_j^{(2)}\}$ 是按法式分布的，即要求 $z_j^{(1)}$ 在 G 内，$z_j^{(2)}$ 分别分布在 m 或 $m+1$ 条边界曲线 Γ_j 上，且

$$2k_1+k_2=2n_2+1-m. \tag{14}$$

而 $a_j^{(2)}$，$b_j^{(2)}$ 和 $c_j^{(2)}$ 是任意实常数，并不妨取 $z_1^{(1)}=0$，$a_1^{(2)}=b_1^{(2)}=0$，这时有 $\varphi_2(0)=0$，同时由[1]可知，全纯函数的边值问题(11)，(12)是通过 $f(z)$ 唯一确定的.

把所求得的 $\varphi_2(z)$ 代入(8)、(9)式，又得到关于全纯函数 $\varphi_1(z)$ 的 Riemann-Hilbert 问题．同样，由于 $n_1>m-1$，边值问题可解，且依赖于 $2n_1+1-m$ 个任意实常数．类似地，可按法式分布任意选定由 $2n_1+1-m$ 个点组成的固定点组，并在这固定点组上给定相应的点型条件，则这边值问题的解也通过 $f(z)$ 唯一确定.

这也就是说，我们证明了存在着全纯函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$，使得边值问题(1)、(2)的

解，可以表示成(7)的形式.

虽然，在一般情况下全纯函数 $\varphi_i(z)$ 是依赖于 $f(z)\in L_p(\overline{G})$，但能够证明 $\varphi_i(z)$ 是关于 f 在空间 $L_p(\overline{G})$，$p>2$ 中是全连续的，而这个性质对于尔后证明边值问题广义解存在定理又是非常必要的，现建立这引理如下：

引理　若任意给定 $f(z)\in L_p(\overline{G})$，$p>2$，则全纯函数的 Riemann-Hilbert 问题(13)是可解的，且适合点型条件(15)的解 $\varphi_2(z)$ 通过 $f(z)$ 唯一确定. 同时 $\varphi_2(z)$ 是空间 $L_p(\overline{G})$，$p>2$ 中的全连续算子它映照空间 $L_p(\overline{G})$ 到 $C_2^1(\overline{G})$，$\alpha=\min\left(\nu,\ \dfrac{p-2}{p}\right)$. 并成立

$$C_\alpha^1(\varphi,\ \overline{G})\leqslant M_0C_\nu^1(\gamma_2,\ \Gamma)+M_1L_p(f,\ \overline{G})=\text{常数}\quad(i=0,\ 1). \tag{15}$$

证　由前面所述已知，多连通域 G 上的 Riemann-Hilbert 问题(13)的解 $\varphi_2(z)$ 是存在的，且通过 $f(z)\in L_p(\overline{G})$ 唯一确定. 为证明引理的后一论断，我们注意到 T_jf 在 Γ_j 外全纯，从而在 Γ_k，$k\neq j$ 上有任一阶连续导数，可知边界条件(13)式的右端

$$\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}[z^{-n_1}\widetilde{T}_j^{(2)}f]\in C_\sigma^m(\Gamma_0),$$

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n_2}e^{-\pi i\alpha_{2k}}\left(\widetilde{T}_0^{(2)}f+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\widetilde{T}_j^{(2)}f\right)\right]\in C_\sigma^m(\Gamma_k)\quad \sigma=\frac{p-2}{p},$$

其中 m 是任意正整数.

又由于假设 $\gamma_2(z)\in C_\nu^1(\Gamma)$. 故边界条件右端属于 $C_\alpha^1(\Gamma)$，$\alpha=\min(\nu,\ \sigma)$，于是参照[1]中定理 4.1 和 4.15 的证明方法，可证得

$$\varphi_2(z)\in C_\alpha^1(G+\Gamma)$$
$$C_\alpha^1(\varphi_2,\ \overline{G})\leqslant M_0C_\nu^1(\gamma_2,\ \Gamma)+M_1L_p(f,\ \overline{G}),$$

其中常数 M_0 和 M_1 仅同区域 G 和 p 有关，与任意函数 $f(z)\in L_p(\overline{G})$，$p>2$ 无关. 引理得证.

此外，还可参照[1]中的定理 1.11，推得 $\varphi_2''(z)$ 也是关于 $f(z)\in L_p(\overline{G})$ 的线性有界算子，它映照 $L_p(\overline{G})$ 到 $L_p(\overline{G})$. 且

$$L_p(\varphi_2'',\ \overline{G})\leqslant M_0C_\nu'(\gamma_2,\ \Gamma)+M_1L_p(f,\ \overline{G}).$$

类似地，对于 $\varphi_1(z)$ 也可证得有同样的结论.

现在我们转向证明边值问题(1)、(2)的广义解存在定理，为此必须把广义解表示式(7)代入二阶复式方程(1)，得到等价的非线性奇异积分方程以求解 $f(z)$.

注意到由(7)表示的 $w(z)$ 有关于 z，$\bar{z}$ 的一阶连续偏微商，它们可以简写成

$$\begin{cases} w(z)=P^{(0)}f=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)\bar{z}+T^{(0)}f; \\ \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}=P^{(1)}f=\varphi_1(z)+T^{(1)}f; \\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=P^{(2)}f=\varphi_1'(z)+\varphi_2'(z)+T^{(2)}f, \end{cases} \tag{16}$$

由(7)和(10)易知 $T^{(0)}f$ 和 $T^{(1)}f$ 都是弱奇性积分，它表示空间 $L_p(\overline{G})$，$p>2$ 中关于 f 的全连续算子，而 $T^{(2)}f=\dfrac{\partial T^{(0)}f}{\partial z}$ 也是弱奇性积分，它等于

$$T^{(2)}f=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar\zeta-\bar z)d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^2}+\frac{z^{2n_1+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta\bar\zeta-1)d\xi\,d\eta}{(1-\bar\zeta z)^2}$$
$$+\frac{z^{2n_2}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\bar\zeta-\bar z)d\xi\,d\eta}{(1-\bar\zeta z)^2}+\frac{(2n_1+1)z^{2n_1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)d\xi\,d\eta}{1-\bar\zeta z}$$
$$+\frac{2n_2z^{2n_2-1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(1-z\bar z)d\xi\,d\eta}{1-\bar\zeta z}+T_m^{(2)}f,$$

这里 $T_m^{(2)}f$ 表示(7)式含有和号 $\sum\limits_{j=1}^{m}$ 项的连续函数对 z 的一阶偏微商. 同时 $w(z)$ 关于 z, $\bar z$ 的按 Соболев 意义下的二阶广义微商为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=P^{(3)}f+S^{(1)}f=\varphi_1''(z)+\varphi_2''(z)\bar z+T^{(3)}f+S^{(1)}f, \quad T^{(3)}f+S^{(1)}f=\dfrac{\partial T^{(2)}f}{\partial z},\\[2mm] \dfrac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial\bar z}=P^{(4)}f+S^{(2)}f=\varphi_2'(z)+T^{(4)}f+S^{(2)}f, \quad T^{(4)}f+S^{(2)}f=\dfrac{\partial T^{(1)}f}{\partial z}\end{cases}\tag{17}$$

这里 $T^{(3)}f$, $T^{(4)}f$ 同样是弱奇性积分, $S^{(1)}f$ 和 $S^{(2)}f$ 表示以下奇性积分

$$\begin{cases}S^{(1)}f=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar\zeta-\bar z)d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^3}+\frac{2z^{2n_1+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta\bar\zeta-1)d\xi\,d\eta}{(1-\bar\zeta z)^3}\\[2mm] \qquad+\dfrac{2z^{2n_2}}{\pi}\displaystyle\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\bar\zeta-\bar z)\bar\zeta\,d\xi\,d\eta}{(1-\bar\zeta z)^3}\\[2mm] S^{(2)}f=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\frac{f(\zeta)d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^2}-\frac{z^{2n_2+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\bar\zeta\,d\xi\,d\eta}{(1-\bar\zeta z)^2},\end{cases}\tag{18}$$

而显然有
$$\frac{\partial^2 w}{\partial\bar z^2}=f(z).$$

这样,我们得到了与边值问题(1)、(2)等价的非线性奇异积分方程

$$f=\sum_{i=1}^{2}Q_i(z,\ P^{(0)}f,\ P^{(1)}f,\ P^{(2)}f,\ P^{(3)}f+S^{(1)}f,\ P^{(4)}f+S^{(2)}f)S^{(i)}f$$
$$+h^*(z,\ P^{(0)}f,\ P^{(1)}f,\ P^{(2)}f),\tag{19}$$
$$h^*=Q_1P^{(3)}f+Q_2P^{(4)}f+h,$$

不难验证 h^* 也类同于 h 满足条件(C)中的假设 ii). 而奇性积分 $S^{(i)}f$ 是空间 $L_p(\bar G)$ 中的线性有界算子,且不妨以 $\Lambda_p^{(i)}$ 表示 $S^{(i)}f$ 在 $L_p(\bar G)$, $p>2$ 中的范数,则有

$$\|S^{(i)}f\|_p\leqslant\Lambda_p^{(i)}\|f\|_p,$$

且当 q^0 取得适当小时,恒有

$$0<q^0(\Lambda_p^{(1)}+\Lambda_p^{(2)})<1\tag{20}$$

以下证明奇异积分方程(29)的可解性.

首先任意固定 f, 考察奇异积分方程

$$f^*=\sum_{i=1}^{2}Q_i(z,\ P^{(0)}f,\ P^{(1)}f,\ P^{(2)}f,\ P^{(3)}f+S^{(1)}f^*,\ P^{(4)}f+S^{(2)}f^*)S^{(i)}f^*$$
$$+h^*(z,\ P^{(0)}f,\ P^{(1)}f,\ P^{(2)}f),\tag{21}$$

它作为关于 f^* 的非线性积分方程, 不难证明, 它对于任意给定的 f 都有唯一解. 这是因为,任取 $L_p(\bar G)$, $p>2$ 中的二个函数 f_1^* 和 f_2^*, 由条件(C),我们有

$$\left\|\sum_{i=1}^{2}[Q_i(z,\ P^{(0)}f,\ P^{(1)}f,\ P^{(2)}f,\ P^{(3)}f+S^{(1)}f_1^*,\ P^{(4)}f+S^{(2)}f_1^*)S^{(i)}f_1^*\right.$$

$$\left.-Q_i(z,\ P^{(0)}f,\ P^{(1)}f,\ P^{(2)}f,\ P^{(3)}f+S^{(1)}f_2^*,\ P^{(4)}f+S^{(2)}f_2^*)S^{(i)}f_2^*\right\|_p$$

$$\leqslant q^0(\|S^{(1)}f_1^*-S^{(1)}f_2^*\|_p+\|S^{(2)}f_1^*-R^{(2)}f_2^*\|_p)$$

$$\leqslant q^0(\Lambda_p^{(1)}+\Lambda_p^{(2)})\|f_1^*-f_2^*\|_p,$$

且因 $q^0(\Lambda_p^{(1)}+\Lambda_r^{(2)})<1$，故由压缩映像原理可知，方程(30)对任意给定的 f(从而方程右端也给定)，都有唯一解．换言之，存在一个运算子 K^*，使得方程(29)等价于

$$f^*=K^*f,$$

这里 K^*f 一般也是非线性算子．

此外，由假设的条件(C)，容易推出，方程(21)的一切解 $f^*(z)$ 适合以下模不等式

$$\|f^*\|_p\leqslant\frac{D_0}{1-q^0(\Lambda_p^{(1)}+\Lambda_r^{(2)})}=\rho, \tag{22}$$

也就是说算子 K^*f 把有界闭凸集 Ω: $\|f\|_p\leqslant\rho$ 映照到本身或到内部．

现在进一步证明 K^*f 是 Ω 上的弱连续算子．

设 $f_m(z)$ 是 Ω 中弱收敛于 $f_0(z)\in\Omega$ 的函数序列，这时对应于每个 $f_m(z)$ 和 $f_0(z)$，恒有唯一的 $f_m^*(z)$ 和 $f_0^*(z)$，使得相应地序列 $f_m^*-f_0^*=K^*f_m-K^*f_0$ 适合以下积分方程

$$\begin{aligned}f_m^*-f_0^*=&\sum_{i=1}^{2}[Q_i(z,\ P^{(0)}f_m,\ P^{(1)}f_m,\ P^{(2)}f_m,\ P^{(3)}f_m+S^{(1)}f_m^*,\ P^{(4)}f_m+S^{(2)}f_m^*)S^{(i)}f_m^*\\&-Q_i(z,\ P^{(0)}f_m,\ P^{(1)}f_m,\ P^{(2)}f_mP^{(3)}f_m+S^{(1)}f_0^*,\ P^{(4)}f_m+S^{(2)}f_0^*)S^{(i)}f_0^*]\\&+\sum_{i=1}^{2}[Q_i(z,\ P^{(0)}f_m,\ P^{(1)}f_m,\ P^{(2)}f_m,\ P^{(3)}f_m+S^{(1)}f_0^*,\ P^{(4)}f_m+S^{(2)}f_0^*)\\&-Q_i(z,\ P^{(0)}f_0,\ P^{(1)}f_0,\ P^{(2)}f_0,\ P^{(3)}f_0+S^{(1)}f_0^*,\ P^{(4)}f_0+S^{(2)}f_0^*)]S^{(i)}f_0^*\\&+h^*(z,\ P^{(0)}f_m,\ P^{(1)}f_m,\ P^{(2)}f_m)-h^*(z,\ P^{(0)}f_0,\ P^{(1)}f_0,\ P^{(2)}f_0),\end{aligned}$$

从而，利用假设的条件(C)估计不等式，得

$$\begin{aligned}&\|f_m^*-f_0^*\|_p\\&\leqslant\frac{1}{1-q^0(\Lambda_p^{(1)}+\Lambda_p^{(2)})}\left\|\sum_{i=1}^{2}[Q_i(z,\ P^{(0)}f_m,\ P^{(1)}f_m,\ P^{(2)}f_m,\ P^{(3)}f_m+S^{(1)}f_0^*,\ P^{(4)}f_m+S^{(2)}f_0^*)\right.\\&\quad-Q_i(z,\ P^{(0)}f_0,\ P^{(1)}f_0,\ P^{(2)}f_0,\ P^{(3)}f_0+S^{(1)}f_0^*,\ P^{(4)}f_0+S^{(2)}f_0^*)S^{(i)}f_0^*\\&\quad\left.+h^*(z,\ P^{(0)}f_m,\ P^{(1)}f_m,\ P^{(2)}f_m)-h^*(z,\ P^{(0)}f_0,\ P^{(1)}f_0,\ P^{(2)}f_0)\right\|,\end{aligned} \tag{23}$$

由引理知，算子 $\varphi_i(z)$ 和 T_jf 都是 $L_p(\overline{G})$，$p>2$ 中的全连续算子，且把空间 $L_p(\overline{G})$ 映照到 $C_\alpha(\overline{G})$，从而也不难证明 $\varphi_i'(z)$，$\varphi_i''(z)$ 在 G 的内闭子域 G'(G 除去靠近边界的圆环)上是致密的，因此 $P^{(k)}f$ 在 G' 上也是致密的．又由 Q_i 和 h 的连续性假设，对任意的 $\eta>0$，存在 $G_\eta\subset G'\subset\overline{G}'\subset G$，$\mathrm{mes}(G-G_\eta)<\eta$ 在 G_η 上 $P^{(k)}f_m$ 一致收敛于 $P^{(k)}f_0$，同时成立

$$\limsup_{\substack{m\to\infty\\ z\in\overline{G}_\eta}}|Q_i(z,\ P^{(0)}f_m,\ P^{(1)}f_m,\ P^{(2)}f_m,\ P^{(3)}f_m+S^{(1)}f_0^*,\ P^{(4)}f_m+S^{(2)}f_0^*)$$
$$-Q_i(z,\ P^{(0)}f_0,\ P^{(1)}f_0,\ P^{(2)}f_0,\ P^{(3)}f_0+S^{(1)}f_0^*,\ P^{(4)}f_0+S^{(2)}f_0^*)|=0$$

和
$$\limsup_{\substack{m\to\infty\\ z\in\overline{G}_\eta}}|h(z,\ P^{(0)}f_m,\ P^{(1)}f_m,\ P^{(2)}f_m)-h(z,\ P^{(0)}f_0,\ P^{(1)}f_0,\ P^{(2)}f_0)|=0,$$

即对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $m_0(\varepsilon)$，当 $m\geqslant m_0$ 时，我们有

$$\|f_m^*-f_0^*\|_p \leqslant \frac{1}{1-q^0(\varLambda_p^{(1)}+\varLambda_p^{(2)})}\Big\{2\varepsilon(\|S^{(1)}f_0^*\|+\|S^{(2)}f_0^*\|)$$
$$+q_0\sum_{i=1}^{2}L_p(S^{(i)}f_0^*,\ \overline{G}-G_\eta)+\varepsilon\pi+2L_p(h_0(z),\ \overline{G}-G_\eta)\Big\},$$

再选择适当小的 $\eta>0$，又有

$$L_p(S^{(i)}f_0,\ \overline{G}-G_\eta)<\varepsilon,\ L_p(h_0(z),\ \overline{G}-G_\eta)<\varepsilon,$$

于是最后得到

$$\|f_m^*-f_0^*\| \leqslant \frac{1}{1-q^0(\varLambda_p^{(1)}+\varLambda_p^{(2)})}\Big[2\varepsilon\rho\sum_{i=1}^{2}\varLambda_p^{(i)}+2\varepsilon q^0+\varepsilon\pi+2\varepsilon\Big]\to 0,\ (\varepsilon\to 0).$$

这就是说，我们证明了非线性奇性积分算子 K^*f 是确定在空间 $L_p(\overline{G})$，$p>2$ 中的一个弱致密闭凸集 Ω 上的弱连续算子，它紧映照 Ω 于本身或内部，根据 Schauder 不动点原理，在 Ω 内至少有一个不动点 $f=K^*f$，它也就是非线性奇性积分方程(19)的解．再将这个 $f(z)$ 代入广义解表示式(7)，即得广义 Riemann-Hilbert 问题(1)(2)的广义解．换言之，我们建立了以下广义解存在定理．

定理　如果二阶非线性椭圆型方程组(1)的广义 Riemann-Hilbert 问题其方程和边界条件的系数满足假设条件(C)，且问题的指标 $n_i>m-1$，则当 q^0 取得适当小时，边值问题一定可解，且解可以表示成(7)的形式．

参考文献

[1] Векуа, И. И., Обобщдные Аналитигеские Функции, Главы1 и 4, Москва, (1959).
[2] 李明忠，数学学报，**14**: 1 (1964), 7.
[3] Джураев, А., *Сибир. Матем Журнал*, **9** Номр 1 (1968), 52.
[4] Комях, И. И. и Клименов, в., *Дифф. урав.*, **13** (1977).
[5] 李明忠，中国科学，**23**: 3 (1980), 280.
[6] 李明忠，数学年刊，**1**: 2 (1980), 299.
[7] Мусхелишвили, Н. И., 奇异积分方程，上海科学技术出版社，(1962).

THE GENERALIZED RIEMANN-HILBERT PROBLEM FAR A MULTI-CONNECTED REGION OF SECOND ORDER NON-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

LI MINGZHONG
(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper, we consider the generalized Riemann-Hilbert problem for second order non-linear elliptic complex equation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}=F\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \bar{z}}\right),\ z\in G \tag{1}$$

with the boundary condition

$$\mathrm{Re}[z^{-n_1}e^{-\pi i\alpha_1(z)}w]=r_1(z),\ \mathrm{Re}\left[z^{-n_2}e^{\pi i\alpha_2(z)}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right]=r_2(z),\ z\in\Gamma, \tag{2}$$

where $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\cdots+\Gamma_m$ is the smooth boundary of a multi-connected region G, $n_i(i=1,\ 2)$ are called the indices of the boundary value problem.

we also obtain the following existence theorem of generalized solution.

Theorem. suppose that the indices $n_i>m-1$, the coefficients of the complex equation (1) and the boundary condition (2) satisftes the condition (c), and q^0 is sufficiently small, then the seneralized Riemann-Hilbert problem(1), (2) is solvable and the solution has theexpression (7)。