数 学 年 刊
3 (5) 1982

向量测度在分布参数系统最优控制理论中的应用

李 训 经
(复旦大学)

敬献给苏步青教授八十寿辰暨从事教育工作五十年

Lasalle, J. P.[1] 首先利用向量测度的值域定理[2, 8]证明时间最优控制的开关原理；我们在[3]中进一步讨论了线性系统时间最优控制的一般问题，给出了最优时间的计算公式. 在无限维空间取值的向量测度值域定理是 Uhl, J. J. 给出的[4]. 我们在[5, 6, 7]中利用它讨论了分布参数系统的时间最优控制问题. 它们表明，向量测度是研究时间最优控制的有力工具.

向量测度在最优控制理论的其它应用还未见讨论，本文指出它可以用来研究一类最优控制问题，该类问题包括有约束的二次最优控制问题. 证明了分布参数系统最优控制的最大原理，而不要求控制区域具有凸性等限制. 以往在分布参数系统最优控制理论的研究中，都要求控制区域是有界凸闭集(参见[10, 11, 12]).

一、分布参数系统

设 X 和 Z 是自反 Banach 空间. $U\subset Z$ 是一给定集合，我们称为控制区域，如果 $u(\cdot)$: $[t_0,T]\to U$ 是强可测的，我们称 $u(\cdot)$ 是容许控制，记为 $u(\cdot)\in U_{ad}$.

假设当 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 时 $A(t)$ 是 X 上的线性算子，满足[9]所给的条件；$b(\cdot,\ \cdot):[t_0,\ T]\times U\to X$ 是强连续的，且存在实数值函数 $\mu(t)\geqslant 0$ 使得当 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 时 $\|b(t,u(t))\|\leqslant\mu(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$，并且 $\int_{t_0}^{T}\mu(t)dt<+\infty$. 设 $x(t)\equiv x(t,\ u(\cdot))$ 是分布参数系统

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+b(t,\ u(t)),\quad t_0<t\leqslant T \tag{1}$$

的解，满足初值条件 $x(t_0)=x_0$. 当 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 时，(1)的 Mild 解是

$$x(t,\ u(\cdot))=U(t,\ t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}U(t,\ s)b(s,\ u(s))ds, \tag{2}$$

这里 $U(t,\ s)$ 在 $t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上是强连续的，且适合

$$\frac{dU(t,\ s)x}{dt}\equiv A(t)U(t,\ s)x\quad (t_0\leqslant s<t\leqslant T,\ x\in X),$$
$$U(s,\ s)=I. \tag{3}$$

本文 1980 年 9 月 16 日收到.

在[5, 7]中，我们曾证明等时区域 $R(t)=\{x|x=x(t, u(\cdot)), u(\cdot)\in U_{ad}\}$ 的闭包是凸的.

如果考虑 $C([t_0, T]; X)$ 的子集

$$\Sigma=\{x(\cdot)|x(t)\equiv x(t, u(\cdot)), t\in[t_0, T], u(\cdot)\in U_{ad}\},$$

它是否是凸集呢？下述例题表明，即使 $X=R^1$, Σ 也可能不是凸的.

例　设 $X=R^1$, $U=\{0, 1\}\subset R^1$. 考虑系统

$$\frac{dx(t)}{dt}=u(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad u(\cdot)\in U_{ad},\quad x(0)=0. \tag{4}$$

显然 $u_1(t)\equiv 0$ 和 $u_2(t)\equiv 1$ 都是容许控制，它们相应的轨线 $x_1(t)\equiv 0$ 和 $x_2(t)\equiv t$ 都属于 Σ.

设 $0<a<1$, $x_a(t)\equiv(1-a)x_1(t)+ax_2(t)\equiv at$, 它是否属于 Σ 呢？如果 $x_a(\cdot)\in\Sigma$, 就应当有 $u_a(\cdot)\in U_{ad}$, 使得

$$\dot{x}_a(t)\equiv a=u_a(t).$$

但是 $0<a<1$, 而控制区域 $U=\{0, 1\}$, 所以 $u_a(\cdot)\overline{\in} U_{ad}$, 得到矛盾. 因此，$x_a(\cdot)\overline{\in}\Sigma$, 即 Σ 不是凸的.

但是我们有下述定理：

定理 1　Σ 的闭包 $\bar{\Sigma}$ 是凸的.

为证该定理，需要下述引理

引理　设 $u_1(\cdot)$ 和 $u_2(\cdot)$ 都是容许控制. 如果 $u(\cdot)\in U_{ad}$, 并且 $u(t)$ 取值为 $u_1(t)$ 或 $u_2(t)$, 就记 $u(\cdot)\in U_{ad}^{12}$. 这时

$$\Sigma_{12}=\{x(\cdot)|x(t)\equiv x(t, u(\cdot)), u(\cdot)\in U_{ad}^{12}\}$$

是同等连续的，即对于 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $u(\cdot)\in U_{ad}^{12}$, $t_0\leqslant t$, $\tilde{t}\leqslant T$, $|t-\tilde{t}|<\delta$ 时 $\|x(t, u(\cdot))-x(\tilde{t}, u(\cdot))\|<\varepsilon$.

证　设 $C=\max\limits_{t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}\|U(t, s)\|$, $u(\cdot)\in U_{ad}^{12}$, $t_0\leqslant t\leqslant\tilde{t}\leqslant T$, 那末

$$\begin{aligned}x(\tilde{t}, u(\cdot))-x(t, u(\cdot))&=\{U(\tilde{t}, t_0)x_0-U(t, t_0)x_0\}\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\{U(\tilde{t}, s)-U(t, s)\}b(s, u(s))ds+\int_{t}^{\tilde{t}}U(\tilde{t}, s)b(s, u(s))ds\\&=I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{5}$$

这时

$$\|I_1\|=\|U(\tilde{t}, t_0)x_0-U(t, t_0)x_0\|,$$

$$\|I_3\|\leqslant\int_t^{\tilde{t}}\|U(\tilde{t}, s)\|\cdot\|b(s, u(s))\|ds\leqslant C\int_t^{\tilde{t}}\mu(s)ds.$$

再来估计 I_2. 注意到 $u(\cdot)\in U_{ad}^{12}$, 若置

$$E_i=\{s|u(s)=u_i(s), t_0\leqslant s\leqslant T\}\quad(i=1, 2),$$

那末 $E_1\cup E_2=[t_0, T]$.

由于 $b(\cdot, u_i(\cdot))$: $[t_0, T]\to X$ 是强可测的，对于 $\varepsilon>0$, 存在只取有限个值的可测函数 $b_i(\cdot)$ 和可测集 F_i, 使得

$$\int_{F_i}\mu(s)ds\leqslant\frac{\varepsilon}{24C}, \tag{6}$$

$$\|b_i(s)-b(s, u_i(s))\|<\frac{\varepsilon}{24C(T-t_0)},\quad s\in[t_0, T]\backslash F_i.$$

这时

$$
\begin{aligned}
\|I_2\| &= \left\|\int_{t_0}^{t}\{U(\tilde{t}, s)-U(t, s)\}b(s, u(s))ds\right\| \\
&\leqslant \left\|\int_{[t_0, t]\setminus(F_1\cup F_2)}\{U(\tilde{t}, s)-U(t, s)\}b(s, u(s))ds\right\| + \int_{F_1\cup F_2} 2C\cdot\mu(s)ds \\
&\leqslant \left\|\int_{[t_0, t]\cap E_1\setminus F_1}\{U(\tilde{t}, s)-U(t, s)\}b(s, u_1(s))ds\right\| \\
&\quad + \left\|\int_{[t_0, t]\cap E_2\setminus F_2}\{U(\tilde{t}, s)-U(t, s)\}b(s, u_2(s))ds\right\| \\
&\quad + \int_{F_1\cup F_2} 2C\mu(s)ds = I_{21}+I_{22}+I_{23}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

但

$$
\begin{aligned}
I_{21} &\leqslant \int_{[t_0, t]\cap E_1}\|\{U(\tilde{t}, s)-U(t, s)\}b_1(s)\|ds + \frac{\varepsilon}{24C(T-t_0)}\int_{t_0}^{t} 2C\,dt \\
&\leqslant \int_{[t_0, t]\cap E_1}\|U(\tilde{t}, s)b_1(s)-U(t, s)b_1(s)\|ds + \frac{\varepsilon}{12},
\end{aligned}
$$

同样

$$
I_{22} \leqslant \int_{[t_0, t]\cap E_2}\|U(\tilde{t}, s)b_2(s)-U(t, s)b_2(s)\|ds + \frac{\varepsilon}{12}.
$$

把(6)以及上式代入(7)，得到

$$
\begin{aligned}
\|I_2\| &\leqslant \int_{[t_0, t]\cap E_1}\|U(\tilde{t}, s)b_1(s)-U(t, s)b_1(s)\|ds \\
&\quad + \int_{[t_0, t]\cap E_2}\|U(\tilde{t}, s)b_2(s)-U(t, s)b_2(s)\|ds + \frac{1}{4}\varepsilon,
\end{aligned} \tag{8}
$$

而 $U(t, s)x$ 在 $t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上是强连续的，$b_1(s)$ 和 $b_2(s)$ 只取有限个值，所以存在 $\delta>0$，使得当 $0\leqslant\tilde{t}-t<\delta$ 时

$$
\|I_1\| \leqslant \|U(\tilde{t}, t_0)x_0-U(t, t_0)x_0\| < \varepsilon/3, \tag{9}
$$

$$
\|I_3\| \leqslant C\int_{t}^{\tilde{t}}\mu(s)ds < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{10}
$$

$$
\|U(\tilde{t}, s)b_i(s)-U(t, s)b_i(s)\| < \frac{\varepsilon}{12(T-t_0)} \quad (t_0\leqslant s\leqslant t). \tag{11}
$$

把(11)代入(8)得到

$$
\|I_2\| \leqslant \int_{[t_0, t]\cap E_1}\frac{\varepsilon}{12(T-t_0)}ds + \int_{[t_0, t]\cap E_2}\frac{\varepsilon}{12(T-t_0)}ds + \frac{1}{4}\varepsilon \leqslant \varepsilon/3.
$$

把上式和(9)、(10)代入(5)式得到

$$
\|x(\tilde{t}, u(\cdot))-x(t, u(\cdot))\| < \varepsilon.
$$

证毕.

定理1的证明

假设 $x_i(\cdot)\in\Sigma(i=1, 2)$，$0<\alpha<1$，又设 $u_i(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$
x_i(t)\equiv x(t, u_i(\cdot)) \quad (i=1, 2).
$$

根据引理，对于 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $u(\cdot)\in U_{ad}^{12}$，$0\leqslant\tilde{t}-t<\delta$ 时

$$
\|x(\tilde{t}, u(\cdot))-x(t, u(\cdot))\| < \varepsilon/3. \tag{12}
$$

用 $t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=T$ 把 $[t_0, T]$ 划分，使得

$$0<t_j-t_{j-1}<\delta \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

在区间 $t_{j-1}\leqslant s\leqslant t_j$ 上考虑

$$y(s)=U(t_j,\ s)\{b(s,\ u_1(s))-b(s,\ u_2(s))\}.$$

根据 Uhl[4] 关于向量测度值域定理，存在 $E_a^j\subset[t_{j-1},\ t_j]$，使得

$$\left\|\int_{E_a^j}y(s)ds-a\int_{t_{j-1}}^{t_j}y(s)ds\right\|<\varepsilon_j=\frac{\varepsilon}{4mC^{m-j}}.$$

若置

$$u_a(s)=\begin{cases}u_1(s), & s\in E_a^j,\\ u_2(s), & s\in[t_{j-1},\ t_j]\setminus E_a^j,\end{cases}$$

那末

$$\left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}U(t_j,\ s)b(s,\ u_a(s))ds-a\int_{t_{j-1}}^{t_j}U(t_j,\ s)b(s,\ u_1(s))ds\right.$$
$$\left.-(1-a)\int_{t_{j-1}}^{t_j}U(t_j,\ s)b(s,\ u_2(s))ds\right\|<\varepsilon_j.$$

因此

$$\begin{aligned}&\|x(t_j,\ u_a(\cdot))-ax_1(t_j)-(1-a)x_2(t_j)\|\\&\leqslant\|U(t_j,\ t_{j-1})\{x(t_{j-1},\ u_a(\cdot))-ax_1(t_{j-1})-(1-a)x_2(t_{j-1})\|+\varepsilon_j\\&\leqslant C\|x(t_{j-1},\ u_a(\cdot))-ax_1(t_{j-1})-(1-a)x_2(t_{j-1})\|+\varepsilon_j.\end{aligned}$$

由于 $x(t_0,\ u_a(\cdot))-ax_1(t_0)-(1-a)x_2(t_0)=0$，所以逐次得到

$$\|x(t_1,\ u_a(\cdot))-ax_1(t_1)-(1-a)x_2(t_1)\|\leqslant\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{4mC^{m-1}}<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|x(t_2,\ u_a(\cdot))-ax_1(t_2)-(1-a)x_2(t_2)\|\leqslant C\varepsilon_1+\varepsilon_2$$
$$=\frac{\varepsilon}{4mC^{m-2}}+\frac{\varepsilon}{4mC^{m-2}}<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\|x(t_j,\ u_a(\cdot))-ax_1(t_j)-(1-a)x_2(t_j)\|\leqslant\frac{j\varepsilon}{4mC^{m-j}}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\|x(t_m,\ u_a(\cdot))-ax_1(t_m)-(1-a)x_2(t_m)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}.$$

对于 $t\in[t_0,\ T]$，存在 j 使得 $t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j$，从而

$$\begin{aligned}&\|x(t,\ u_a(\cdot))-ax_1(t)-(1-a)x_2(t)\|\leqslant\|x(t,\ u_a(\cdot))-x(t_j,\ u_a(\cdot))\|\\&\quad+\|x(t_j,\ u_a(\cdot))-ax_1(t_j)-(1-a)x_2(t_j)\|\\&\quad+a\|x_1(t_j)-x_1(t)\|+(1-a)\|x_2(t_j)-x_2(t)\|,\end{aligned}$$

根据(12)，由上式得到

$$\|x(t,\ u_a(\cdot))-ax(t,\ u_1(\cdot))-(1-a)x(t,\ u_2(\cdot))\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

因此 $ax_1(\cdot)+(1-a)x_2(\cdot)\in\overline{\Sigma}$，即 $\overline{\Sigma}$ 是凸的. 证毕.

二、最优控制问题

设 X 是 Hilbert 空间，对于系统(1)，考虑泛函

$$J(u(\cdot))=\langle Q_1x(T),\ x(T)\rangle+\int_{t_0}^{T}\{\langle Q(t)x(t),\ x(t)\rangle+r(t,\ u(t))\}dt, \tag{13}$$

其中 Q_1 和 $Q(t)$ 都是 X 到 X 的有界自共轭算子，$Q(\cdot)$ 在 $[t_0,\ T]$ 上是强连续的，$r(\cdot,\ \cdot)$: $[t_0,\ T]\times U\to R^1$ 是连续的，并且当 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 时，$r(\cdot,\ u(\cdot))$: $[t_0,\ T]\to R^1$ 是 Lebesgue 可积的.

最优控制问题是求 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$J(u^*(\cdot))=\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(u(\cdot)).$$

我们称 $u^*(\cdot)$ 为最优控制，$x^*(t)\equiv x(t,\ u^*(\cdot))$ 是最优轨线.

定理 2　设 $u^*(\cdot)$ 是最优控制，$x^*(t)\equiv x(t,\ u^*(\cdot))$. 又设 $u(\cdot)\in U_{ad}$, $x(t)\equiv x(t,\ u(\cdot))$，那末成立着变分不等式

$$\langle Q_1x^*(T),\ x(T)-x^*(T)\rangle+\int_{t_0}^{T}\langle Q(t)x^*(t),\ x(t)-x^*(t)\rangle dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\{r(t,\ u(t))-r(t,\ u^*(t))\}dt\geqslant 0. \tag{14}$$

证　设 $\hat{X}=R^1\times X$, $\hat{x}=(x^0,\ x)$. 在 X 上考虑发展方程

$$\frac{dx^0(t)}{dt}=r(t,\ u(t)),\quad x^0(t_0)=0,$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+b(t,\ u(t)),\quad x(t_0)=x_0.$$

根据定理 1，对于 $0<a<1$，存在 $u_a(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$\left|\int_{t_0}^{t} r(s,\ u_a(s))ds-a\int_{t_0}^{t} r(s,\ u(s))ds-(1-a)\int_{t_0}^{t} r(s,\ u^*(s))ds\right|<a^2,$$
$$\|x(t,\ u_a(\cdot))-ax(t)-(1-a)x^*(t)\|<a^2.$$

记 $x_a(t)\equiv x(t,\ u_a(\cdot))$，那末

$$\begin{aligned}
J&(u^*(\cdot))\leqslant J(u_a(\cdot))\\
&=\langle Q_1x_a(T),\ x_a(T)\rangle+\int_{t_0}^{T}\langle Q(t)x_a(t),\ x_a(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{T} r(t,\ u_a(t))dt\\
&=\langle Q_1\{x^*(T)+a(x(T)-x^*(T))\},\ x^*(T)+a(x(T)-x^*(T))\rangle\\
&\quad+\int_{t_0}^{T}\langle Q(t)\{x^*(t)+a(x(t)-x^*(t))\},\ x^*(t)+a(x(t)-x^*(t))\rangle dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{T} r(t,\ u^*(t))dt+a\int_{t_0}^{T}\{r(t,\ u(t))-r(t,\ u^*(t))\}dt+O(a^2).\\
&=J(u^*(t))+2a\langle Q_1x^*(T),\ x(T)-x^*(T)\rangle\\
&\quad+2a\int_{t_0}^{T}\langle Q(t)x^*(t),\ x(t)-x^*(t)\rangle dt\\
&\quad+a\int_{t_0}^{T}\{r(t,\ u(t))-r(t,\ u^*(t))\}dt+O(a^2).
\end{aligned}$$

因此

$$2\langle Q_1x^*(T),\ x(T)-x^*(T)\rangle+2\int_{t_0}^{T}\langle Q(t)x^*(t),\ x(t)-x^*(t)\rangle dt$$
$$+\int_{t_0}^{T}\{r(t,\ u(t))-r(t,\ u^*(t))\}dt+O(a)\geqslant 0.$$

令 $a\to 0$, 就得证变分不等式(14)

定理 3 （最大值原理）设

$$\psi(t)=-U'(T,\ t)Q_1x^*(T)-\int_t^T U'(\sigma,\ t)Q(\sigma)x^*(\sigma)d\sigma, \tag{15}$$

这里 $U'(\sigma,\ t)$ 表示 $U(\sigma,\ t)$ 的共轭算子，那末等式

$$\langle\psi(t),\ b(t,\ u^*(t))\rangle-\frac{1}{2}r(t,\ u^*(t))=\max_{u\in U}\{\langle\psi(t),\ b(t,\ u)\rangle-\frac{1}{2}r(t,\ u)\} \tag{16}$$

在 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 上几乎处处成立.

证　首先，(15)表示方程

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=-A'(t)\psi(t)+Q(t)x^*(t)\quad (t_0\leqslant t<T), \tag{17}$$
$$\psi(T)=-Q_1x^*(T).$$

的 Mild 解.

其次，把 $x(t)-x^*(t)=\int_{t_0}^t U(t,\ s)\{b(s,\ u(s))-b(s,\ u^*(s))\}ds$ 代入变分不等式(14)，得到

$$\begin{aligned}&\langle Q_1x^*(T),\ \int_{t_0}^T U(T,\ s)\{b(s,\ u(s))-b(s,\ u^*(s))\}ds\rangle\\&+\int_{t_0}^T\int_{t_0}^t\langle Q(t)x^*(t),\ U(t,\ s)\{b(s,\ u(s))-b(s,\ u^*(s))\}\rangle ds\,dt\\&+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\{r(t,\ u(t))-r(t,\ u^*(t))\}dt\geqslant 0.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^T\langle U'(T,\ s)Q_1x^*(T)+\int_s^T U'(t,\ s)Q(t)x^*(t)dt,\ b(s,\ u(s))-b(s,\ u^*(s))\rangle ds\\&+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\{r(s,\ u(s))-r(s,\ u^*(s))\}ds\geqslant 0.\end{aligned}$$

把 $\psi(s)$ 的表达式代入上式，得到

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^T\langle\psi(s),\ b(t,\ u^*(s))-b(s,\ u(s))\rangle ds\\&+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\{r(s,\ u(s))-r(s,\ u^*(s))\}ds\geqslant 0.\end{aligned} \tag{18}$$

设 t 是 $\langle\psi(s),\ b(s,\ u^*(s))\rangle$ 和 $r(s,\ u^*(s))$ 的公共 Lebesgue 点. $h>0$ 和 $u\in U$ 是任意的，置

$$u(s)=\begin{cases}u^*(s), & |s-t|>h,\ s\in[t_0,\ T],\\ u, & |s-t|\leqslant h.\end{cases}$$

把它代入(18)式得到

$$\int_{t-h}^{t+h}\langle\psi(s),\ b(s,\ u^*(s))-b(s,\ u)\rangle ds-\frac{1}{2}\int_{t-h}^{t+h}\{r(s,\ u^*(s))-r(s,\ u)\}ds\geqslant 0.$$

上式两端除以 $2h$，并令 $h\to 0$，得到

$$\langle\psi(t),\ b(t,\ u^*(t))-b(t,\ u)\rangle-\frac{1}{2}\{r(t,\ u^*(t))-r(t,\ u)\}\geqslant 0,$$

即

$$\langle\psi(t),\ b(t,\ u^*(t))\rangle-\frac{1}{2}r(t,\ u^*(t))\geqslant\langle\psi(t),\ b(t',\ u)\rangle-\frac{1}{2}r(t,\ u).$$

由于 $u\in U$ 是任意的，且 $u^*(t)\in U$，由上式得证最大原理(16)．　证毕．

特别，当

$$r(t,\ u)\equiv\langle R(t)u,\ u\rangle,$$

而 $R(t)\colon Z\to Z$ 是有界自共轭算子时，最大原理(16)成为

$$\langle\psi(t),\ b(t,\ u^*(t))\rangle-\frac{1}{2}\langle R(t)u^*(t),\ u^*(t)\rangle$$
$$=\max_{u\in U}\left\{\langle\psi(t),\ b(t,\ u)\rangle-\frac{1}{2}\langle R(t)u,\ u\rangle\right\}. \tag{19}$$

在分布参数系统最优控制理论的研究中，以往都是假定 $b(t,\ u)\equiv B(t)u$，并且控制区域 U 是有界凸闭集，从而 U_{ad} 是有界凸闭集，以保证 Σ 的凸性(参见[10, 11, 12])．

我们利用向量测度的值域定理，证明了 $\bar{\Sigma}$ 是凸的．从而可以把控制区域 U 的种种限制统统去掉．

特别，当 $X=R^n$ 时，就得到集中参数系统的最大原理．

这里的方法可以推广讨论如下形状的泛函

$$J(u(\cdot))=\Psi(x(\cdot))+\int_{t_0}^{T}r(t,\ u(t))dt,$$

其中 $\Psi(x(\cdot))$ 是 $\bar{\Sigma}$ 上的连续凸泛函．

这只要选取 $u_a(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$|\Psi(x_a(\cdot))-\Psi(x^*(\cdot)+a(x(\cdot)-x^*(\cdot)))|<O(a^2).$$

就行了．我们不详述了．

本文曾在金福临老师领导的讨论班中报告，姚允龙同志在讨论中提出过意见．谨致感谢．

参　考　文　献

[1] LaSalle, J. P., Theory of Nonlinear Oscillations, Princeton Univ. Press., Princeton, New York, **5**(1959), 1—24.

[2] Ляпунов A. A., *Изв. АНСССР, сер. матем.*, **4**(1940), 465—478.

[3] 李训经、谢惠民等,《数学论文集》,复旦大学数学研究所, (1964), 95—111.

[4] Uhl, J. J., *Proc. Amer. Math.* Soc. **23**(1969), 158—163.

[5] 李训经、姚允龙, 中国科学, (1980), 619—627.

[6] 李训经, 数学年刊, **1**: 3—4(1980), 453—458.

[7] 李训经、姚允龙, 分布参数系统的最优控制(Li Xunjing and Yao Yunlong, On Opti mal Control for Distributed Parameter Systems, Proc. of 8th IFAC/81 Congress, Kyoto, 1981).

[8] Lindenstrauss, J., J. Math. Mech., **15**(1966), 971—972.

[9] 李训经, Banach 空间中的发展方程, 数学年刊, **2**: 4(1981), 479—490.

[10] Lions J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partail Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[11] Curtain R. F., and Pritchard A. J., Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, 1978.

[12] Balakrishnan A. V., Applied Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976.

ON APPLICATIONS OF VECTOR MEASURE TO THE OPTIMAL CONTROL THEORY FOR DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

LI XUNJING
(*Fudan University*)

ABSTRACT

Let X and Z be two reflexive Banach spaces, $U\in Z$ and $b(\cdot,\cdot)$: $[t_0, T]\times U\to X$ continuous. Suppose $x(t)\equiv x(t, u(\cdot))$ is a function from $[t_0, T]$ into X, satisfying the distrbuted parameter system

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+b(t, u(t)), \; t_0<t\leqslant T, \tag{1}$$

with the initial condition $x(t_0)=x_0$, where $u(t)$, the control function which will be denoted by $u(\cdot)\subset U_{ad}$, is a strongly measurable function with values in U, and $A(t)$ is a linear operator on X, satisfying the conditions 1°—5° given by [9].

Let

$$x(t)\equiv x(t, u(\cdot))\equiv U(t, t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} U(t, s)b(s, u(s))ds$$

and

$$\Sigma=\{x(\cdot)\,|\,x(t)\equiv x(t, u(\cdot)), \; t_0\leqslant t\leqslant T, \quad u(\cdot)\in U_{ad}\}.$$

In this paper we have proved

Theorem. Σ is a convex set of $C([t_0, T]; X)$.

If X is a Hilbert space, Q_1 and $Q(t)$ are two linear self-adjoint bounded operators on X, $Q(\cdot)$ is continuous on $[t_0, T]$ and $r(\cdot, \cdot)$: $[t_0, T]\times U\to R^1$ is continuous, then we consider the optimal control problem:

$$J(u^*(\cdot))=\inf_{(u\cdot)\in U_{ad}} J(u(\cdot)),$$

where

$$J(u(\cdot))=\langle Q_1x(T), x(T)\rangle+\int_{t_0}^{T}\{\langle Q(t)x(t), x(t)\rangle+r(t, u(t))\}dt.$$

We have proved the following theorem.

Theorem. Suppose $u^*(\cdot)$ is the optimal control function, $x^*(t)=X(t, u^*(\cdot))$ and

$$\psi(t)=-U'(T, t)Q_1x^*(T)-\int_{t}^{T}U'(\sigma, t)Q(\sigma)x^*(\sigma)d\sigma,$$

then the maximum principle

$$\langle\psi(t), b(t, u^*(t))\rangle-\frac{1}{2}r(t, u^*(t))=\max_{u\in U}\{\langle\psi(t), b(t, u)\rangle-\frac{1}{2}r(t, u)\} \tag{16}$$

holds for almost all t on $[t_0, T]$.