数 学 年 刊
3 (5) 1982

高阶偏微分方程与正对称方程组

许 政 范
(安徽大学)

敬献给苏步青教授八十寿辰暨从事教育工作五十年

§1. 引 言

Friedrichs, K. O., Lax, P. D. 等人[1,2]所建立的一阶正对称方程组理论在国内有不少研究. 这些工作沿着两个不同的方向, 一个方向是将高阶方程(例如混合型方程)定解问题化成一阶正对称方程组进行研究[3,4,5,6]. 另一方向是推广 Friedrichs-Lax 理论到高阶, 用以直接研究高阶方程的定解问题[7,8,9]. 本文将研究高阶方程与一阶正对称方程组的关系.

在§2的定理1, 我们证明了二阶 (或高阶) 方程能化成一阶正对称组的充要条件是存在着一个低阶偏微分算子 L_1 使 $\mathrm{Re}L_1\phi\cdot\overline{L\phi}$ 等于一个散度形式加一项正定微分二次型。这定理事实上也给出了一种将高阶方程化成一阶正对称方程组的方法, 利用这方法可以容易地将一大类高阶方程化为正对称组. 从这定理也可看出化正对称方程组的方法与能量不等式方法间的联系.

§3中给出许多例子说明利用定理1可以将各种类型的高阶方程, 包括混合型、超双曲型和复合型方程化成正对称方程组. 为了避免增加不必要的篇幅, 我们选取的例子是尽可能简单的.

§4中讨论高阶方程定解问题的解与化成的一阶方程组定解问题的解之间的关系。我们证明如 $\phi\in H_1(\Omega)$ 是二阶方程的弱解, 则由 ϕ 及其一阶偏导数所组成的向量函数 $\boldsymbol{u}$ 是一阶方程组满足 $n-1$ 个协调条件的弱解. 弱解的这类性质, 都可由弱解的定义通过对伴随方程与伴随定解问题相对应的运算而得到.

§5给出一个反例说明由高阶方程化成的一阶正对称方程组的合格定解问题所对应的原方程定解问题, 并不一定是适定的. 因此, 从化成的一阶正对称组定解问题适定性不能断言原方程对应的定解问题的适定性已经解决. 所以将正对称方程组的 Friedrichs-Lax 理论推广到高阶以直接研究高阶方程定解问题的适定性是有意义的[10].

§2. 化二阶方程为正对称方程组

在[3, 4]等文章中, 将二阶方程或高阶方程化成一阶正对称方程组进行讨论. 通过引入未知函数的偏导数作新的未知函数, 添入相容方程, 经过适当变换后将一些高阶方程巧

本文1981年4月26日收到.

妙地化成一阶正对称组. 现在提出问题: (1)怎样的高阶方程可通过引入未知函数的偏导数化成一阶正对称方程组? (2)怎样将高阶方程化成一阶正对称组? 下面的定理简单地回答了上面提出的两个问题.

定理 1 给出 n 个自变量的方程(系数可以是复数)

$$L\phi\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+c\phi=f, \tag{2.1}$$

其中 $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, $c(x)\in C(\overline{\Omega})$. 方程 (2.1) 能通过引入新未知函数

$$u_i=\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}(x)\phi_j\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n) \tag{2.2}$$

$\left(\phi_0=\phi,\ \phi_i=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i},\ \underset{i,j=0,1,\cdots,n}{\mathrm{mat}}(\alpha_{ij})\text{为非异矩阵}\right)$化成一阶正对称方程组的必要且充分条件是存在着一个一阶算子 L_1 使

$$\mathrm{Re}\,L_1\phi\cdot\overline{L\phi}\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}P_i(\phi,\ \phi)+B(\phi,\ \phi), \tag{2.3}$$

这里 $P_i(\phi,\ \phi)(i=1,\ \cdots,\ n)$, $B(\phi,\ \phi)$ 为微分二次型, 即 $\phi,\ \phi_1,\ \cdots,\ \phi_n$ 的二次型, 且 $B(\phi,\ \phi)$是正定的, 即

$$B(\phi,\ \phi)\geqslant c_0\sum_{i=0}^{n}|\phi_i|^2, \tag{2.4}$$

其中 c_0 为正的常数.

证 先证条件的必要性.

设方程(2.1)存在着一组非异变换(2.2)连同 n 个相容条件化成一阶正对称方程组

$$L_k\boldsymbol{u}\equiv\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}\left(A_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}^k\right)u_i+\sum_{i=0}^{n}B_i^k u_i=\alpha_k f_i \tag{2.5}$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n),$$

其中 $A_j=\underset{i,k=0,1,\cdots,n}{\mathrm{mat}}(A_{ij}^k)$为对称阵, 即 $A_{ij}^k=\overline{A}_{kj}^i$. $B=\underset{i,k=0,1,\cdots,n}{\mathrm{mat}}(B_i^k)$为正定阵, 即

$$\mathrm{Re}(B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})\geqslant c_0|\boldsymbol{u}|^2,\ \boldsymbol{u}=(u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_n)^T.$$

方程组(2.5)由方程(2.1)及 n 个相容条件(即利用(2.2)式将 u_i 换成 ϕ_j 后成恒等式)组合而成. 记 $\widetilde{L}_0\boldsymbol{u}$ 为方程(2.1)经变换 (2.2) 后所得的方程, $\widetilde{L}_k\boldsymbol{u}(k=1,\ \cdots,\ n)$为 n 个相容方程, 则将 u_i 换成 $\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}\phi_j$ 后应有

$$\widetilde{L}_0\boldsymbol{u}=L\phi,\ \widetilde{L}_k\boldsymbol{u}=0\quad(k=1,\ \cdots,\ n).$$

$L_k\boldsymbol{u}(k=0,\ 1,\ \cdots n)$是由 $\widetilde{L}_0\boldsymbol{u},\ \cdots,\ \widetilde{L}_n\boldsymbol{u}$ 经非异线性变换得到的, 即

$$L_k\boldsymbol{u}=\sum_{j=0}^{n}\beta_k^j\widetilde{L}_j\boldsymbol{u},\ (\beta_k^0=\alpha_k). \tag{2.6}$$

将方程组(2.5)写成

$$\mathbf{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \tag{2.7}$$

则

$$\mathrm{Re}\,\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\mathbf{L}\boldsymbol{u}}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{A_j\boldsymbol{u}})+\mathrm{Re}\,\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{B\boldsymbol{u}}.$$

另一方面

$$\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\mathbf{L}\boldsymbol{u}}=\sum_{k=0}^{n}u_k\cdot\overline{L_k\boldsymbol{u}}=\sum_{k=0}^{n}u_k\cdot\left(\overline{\sum_{j=0}^{n}\beta_k^j\widetilde{L}_j\boldsymbol{u}}\right).$$

将 u_i 用 $\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}\phi_j$ 代入，得

$$\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\mathbf{L}\boldsymbol{u}}=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k^ju_k\right)\overline{\widetilde{L}_j\boldsymbol{u}}=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\alpha_{ki}\right)\phi_i\cdot\overline{L\phi}.$$

记
$$L_1\phi=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\alpha_{ki}\right)\phi_i,$$

于是
$$\operatorname{Re}L_1\phi\cdot\overline{L\phi}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}P_j(\phi,\ \phi)+B(\phi,\ \phi),$$

其中 $P_j(\phi,\ \phi)$ 为 $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{A_j\boldsymbol{u}}$ 中以 $\boldsymbol{u}$ 换成 $\phi_0,\ \phi_1,\ \cdots,\ \phi_n$ 后所得的二次型，$B(\phi,\ \phi)$ 为 $\operatorname{Re}\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{B\boldsymbol{u}}$ 中以 $\boldsymbol{u}$ 换成 $\phi_0,\ \phi_1,\cdots,\ \phi_n$ 后所得的二次型．从 B 的正定性得出 $B(\phi,\ \phi)$ 满足条件(2.4)．

再证条件的充分性．如存在一个一阶算子 L_1 使

$$\operatorname{Re}L_1\phi\cdot\overline{L\phi}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}P_j(\phi,\ \phi)+B(\phi,\ \phi),$$

其中 $P_j(\phi,\ \phi)$ 为 $\phi_0,\ \phi_1,\ \cdots,\ \phi_n$ 的二次型，$B(\phi,\ \phi)$ 为正定二次型，引入

$$\begin{aligned}&u_0=L_1\phi=a_0\phi_0+a_1\phi_1+\cdots+a_n\phi_n,\\&u_i=\phi_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\end{aligned}\tag{2.8}$$

设 $a_0\neq0$，上述变换是非异的，解得

$$\begin{aligned}&\phi_0=\frac{1}{a_0}(u_0-a_1u_1-\cdots-a_nu_n),\\&\phi_i=u_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\end{aligned}\tag{2.9}$$

记
$$P_j(\phi,\ \phi)=\sum_{i,k=0}^{n}a_{ij}^k\phi_i\bar{\phi}_k=\sum_{i,k=0}^{n}\tilde{a}_{ij}^ku_i\bar{u}_k\quad(j=1,\ \cdots,\ n),$$
$$B(\phi,\ \phi)=\sum_{i,k=0}^{n}b_i^k\phi_i\bar{\phi}_k=\sum_{i,k=0}^{n}\tilde{b}_i^ku_i\bar{u}_k.$$

由 $\overline{P_j(\phi,\ \phi)}=P_j(\phi,\ \phi)$ 得 $\tilde{a}_{kj}^i=\tilde{a}_{ij}^k$．引入矩阵 $A_j=\underset{i,k=0,1,\cdots,n}{\operatorname{mat}}(2\tilde{a}_{ij}^k)$，$\widetilde{B}=\underset{i,k=0,1,\cdots,n}{\operatorname{mat}}(\tilde{b}_i^k)$．今证由原方程及 n 个相容条件所得的方程组可以表示成

$$\mathbf{L}\boldsymbol{u}\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(A_j\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(A_j\boldsymbol{u})\right)+B\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$$

形式，其中 $\boldsymbol{f}=(f,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$，$B$ 与 $\widetilde{B}$ 相差一反对称阵 C．

事实上，从恒等式

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}L_1\phi\cdot\overline{L\phi}&\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i,k=0}^{n}\tilde{a}_{ij}^ku_i\bar{u}_k\right)+\sum_{i,k=0}^{n}\tilde{b}_i^ku_i\bar{u}_k\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{n}\tilde{a}_{ij}^k\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\sum_{i=0}^{n}\tilde{b}_i^ku_i\right)\bar{u}_k+\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(\tilde{a}_{kj}^iu_k)}\right)u_i\\&=\operatorname{Re}\sum_{i=0}^{n}u_i\overline{\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\tilde{a}_{kj}^i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{a}_{kj}^iu_k)\right)+\sum_{k=0}^{n}\tilde{b}_k^iu_k\right\}}.\end{aligned}$$

注意到上式右端花括号内部分用 $u_i=\Sigma\alpha_{ij}\phi_j$ 代入后表示为 $\overline{\sum_{j,k}\mu_{jk}^{(i)}\phi_{jk}+\sum_k\lambda_k^{(i)}\phi_k}$ 形式，其中

$\phi_{jk}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_k}$ 为 ϕ 的二阶偏导数. 由恒等关系式知 u_i 的系数中 ϕ 的二阶偏导数部分在左右端应相等. 如将上式写成

$$\operatorname{Re} u_0\overline{\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\tilde{a}_{kj}^0\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{a}_{kj}^0 u_k)+\sum_{k=0}^{n}\tilde{b}_k^0 u_k-L\phi\right\}}$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{n}u_i\overline{\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\tilde{a}_{kj}^i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{a}_{kj}^i u_k)+\sum_{k=0}^{n}\tilde{b}_k^i u_k\right\}}=0,$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\tilde{a}_{kj}^0\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{a}_{kj}^0 u_k)\right)+\sum_{k=0}^{n}\tilde{b}_k^0 u_k-L\phi=\sum_{k=0}^{n}r_k^0 u_k, \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\tilde{a}_{kj}^i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{a}_{kj}^i u_k)\right)+\sum_{k=0}^{n}\tilde{b}_k^i u_k=\sum_{k=0}^{n}r_k^i u_k,\quad (i=1,\ \cdots,\ n). \tag{2.11}$$

且

$$\operatorname{Re}\sum_{i=0}^{n}u_i\left(\overline{\sum_{k=0}^{n}r_k^i u_k}\right)\equiv 0.$$

亦即

$$r_i^k+\overline{r}_k^i=0\quad (i,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

引入反对称阵 $C=\operatorname*{mat}\limits_{i,k=0,1,\cdots,n}(r_i^k)$, 此时 $B=\tilde{B}-C$ 仍是正定的, 满足

$$\operatorname{Re}\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{B\boldsymbol{u}}=\operatorname{Re}\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\tilde{B}\boldsymbol{u}}=B(\phi,\ \phi)\geqslant c_0\sum_{i=0}^{n}|\phi_i|^2\geqslant c_0'|\boldsymbol{u}|^2.$$

写

$$\mathbf{L}\boldsymbol{u}\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(A_j\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(A_j\boldsymbol{u})\right)+B\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \tag{2.12}$$

$\mathbf{L}\boldsymbol{u}=(L_0\boldsymbol{u},\ L_1\boldsymbol{u},\ \cdots,\ L_n\boldsymbol{u})^T$. 由恒等式(2.10)、(2.11)知, 将 $\boldsymbol{u}$ 换成 $\phi_0,\ \phi_1,\ \cdots,\ \phi_n$ 后应有 $L_0\boldsymbol{u}\equiv L\phi,\ L_i\boldsymbol{u}\equiv 0\,(i=1,\ \cdots,\ n)$. 这表明一阶正对称方程组(2.12)即由原方程与 n 个相容条件组成.

若 $a_0\equiv 0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ 不全为零, 设 $a_n\neq 0$, 此时仍取

$$u_0=L_1\phi=a_1\phi_1+\cdots+a_n\phi_n,$$
$$u_i=\phi_i\quad (i=1,\ \cdots,\ n-1),\ u_n=\phi_0,$$

上述讨论依然成立. 定理证毕.

注1 在充分性证明过程中, 如取 $u_0=\phi_0,\ u_i=\phi_i\,(i=1,\ \cdots,\ n)$ 此时同样可以化成正对称方程组(2.12), 只是这时 $L_0\boldsymbol{u},\ L_1\boldsymbol{u},\ \cdots,\ L_n\boldsymbol{u}$ 都是原方程(2.1)与相容条件的线性组合, $\boldsymbol{f}=(\overline{a}_0 f,\ \overline{a}_1 f,\ \cdots,\ \overline{a}_n f)^T$.

注2 如方程(2.1)中, $C\equiv 0$, 且 $L_1\phi$ 可取成 $a_1\phi_1+\cdots+a_n\phi_n$ 形式, 此时可以引进 n 个未知函数 $u_i=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}\ (i=1,\ \cdots,\ n)$, 使方程(2.1)化成 n 个未知函数的一阶正对称方程组.

注3 定理1可推广到高阶方程情形.

注4 如微分二次型 $B(\phi,\ \phi)$ 是非负定而不是正定的, 此时化成的对称方程组也是非负定的.

§3. 化高阶方程为正对称组的例子

本节利用定理1中充分性证明部分所给出的方法将一些高阶方程化成一阶正对称方程组, 包括一些混合型方程、超双曲型方程与复合型方程.

例1 在[3, 4]中将 Busemann 方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij}-x_ix_j)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum_{i=1}^{n}ax_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}-a(a+1)\phi=f\quad\left(a\neq-\frac{n}{2}\right)\tag{3.1}$$

化成正对称方程组．方程(3.1)可写成

$$L\phi\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}L_1\phi-aL_1\phi,$$

其中
$$L_1\phi=(a+1)\phi-\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

为算子 L 在双曲区域(即单位球外)的分划算子．

今讨论形如

$$\tilde{L}\phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}L_1\phi-bL_1\phi-c\phi\tag{3.2}$$

的方程．于是

$$\begin{aligned}-L_1\phi\cdot\tilde{L}\phi=&-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{L_1\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+\frac{1}{2}x_i\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)^2+\frac{1}{2}x_i(L_1\phi)^2+\frac{c}{2}x_i\phi^2\right\}\\&+\left(a+\frac{n}{2}\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)^2+\left(b+\frac{n}{2}\right)(L_1\phi)^2+c\left(a+1+\frac{n}{2}\right)\phi^2.\end{aligned}\tag{3.3}$$

引入 $u_0=L_1\phi,\ u_i=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$．因此

$$P_i(\phi,\phi)=-u_0u_i-\frac{1}{2}x_i\left(u_0^2+\sum_{j=1}^{n}u_j^2\right)-\frac{c}{2(a+1)^2}x_i\left(u_0+\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\right)^2,$$

$$B(\phi,\phi)=\left(a+\frac{n}{2}\right)\sum_{j=1}^{n}u_j^2+\left(b+\frac{n}{2}\right)u_0^2+\frac{c\left(a+1+\frac{n}{2}\right)}{(a+1)^2}\left(u_0+\sum_{j=1}^{n}x_ju_j\right)^2.$$

记 I 为 $n+1$ 阶单位阵，J_i 为第 1 行、第 $i+1$ 列及第 $i+1$ 行、第 1 行的元素为 1，其余元素均为 0 的 $n+1$ 阶阵，

$$K=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n & x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2\end{bmatrix},$$

此时方程(3.2)可化成形如

$$\mathbf{L}\boldsymbol{u}\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(A_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}A_i\boldsymbol{u}\right)+B\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}\tag{3.4}$$

的正对称方程组，假如 $a>-\dfrac{n}{2}$，$b>-\dfrac{n}{2}$，$c\geqslant0$．这里

$$A_i=-J_i-x_iI-\frac{c}{(a+1)^2}x_iK,$$

$$B=\left(a+\frac{n}{2}\right)\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}+\left(b+\frac{n}{2}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}+\frac{c\left(a+1+\frac{n}{2}\right)}{(a+1)^2}K,$$

$\boldsymbol{f}=(-f,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$, $\boldsymbol{u}=(u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_n)^T$. 如 $a<-\frac{n}{2}$, $b<-\frac{n}{2}$, $a\geqslant -\frac{n}{2}-1$, $c\geqslant 0$ 或 $a<-\frac{n}{2}-1$, $b<-\frac{n}{2}$, $c\leqslant 0$, 则在(3.3)式两边改变符号,同样可化成正对称方程组.

由于分划算子 L_1 可以取成各种不同形式,例如取

$$L_1\phi=\alpha\phi-(x_1-\beta)\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-\sum_{i=2}^{n}x_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i},$$

α, β 为适当选择的常数[9],此时得到不同的正对称方程组.

例2 超双曲型方程

$$L\phi\equiv\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_4^2}+a\phi=f, \tag{3.5}$$

其中 a 为常数.

引入
$$L_1\phi=-x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial\phi}{\partial x_3}+x_4\frac{\partial\phi}{\partial x_4}+b\phi,$$

这里 b 是常数,满足 $|b|<1$, $ab>0$. 于是

$$\begin{aligned}L_1\phi\cdot L\phi=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{&x_i\sum_{k=1}^{4}\phi_{x_k}^2-2x_i\phi_{x_j}^2+2\phi_{x_i}(x_j\phi_{x_j}-\sum_{k\neq i,j}x_k\phi_{x_k})\\&-\varepsilon(2b\phi\phi_{x_i}-ax_i\phi^2)+(1-b)(\phi_{x_1}^2+\phi_{x_2}^2)\\&+(1+b)(\phi_{x_3}^2+\phi_{x_4}^2)+ab\phi^2,\end{aligned}$$

其中 $j=i-(-1)^i$, $\varepsilon=1(i=1,\ 2)$, $\varepsilon=-1(i=3,\ 4)$.

设
$$u_0=-x_1\phi_{x_1}-x_2\phi_{x_2}+x_3\phi_{x_3}+x_4\phi_{x_4}+b\phi,$$
$$u_i=\phi_{x_i}\quad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

此时

$$P_i(\phi,\ \phi)=\frac{\varepsilon}{2}\Big\{x_i(u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2)+2u_0u_1-\frac{a}{b^2}x_i(u_0+x_1u_1+x_2u_2-x_3u_3-x_4u_4^2)\Big\},$$

$$B(\phi,\ \phi)=(1-b)(u_1^2+u_2^2)+(1+b)(u_3^2+u_4^2)+\frac{a}{b}(u_0+x_1u_1+x_2u_2-x_3u_3-x_4u_4)^2.$$

方程(3.5)可化成形如(3.4)的一阶正对称方程组,其中

$$A_i=-\frac{a}{b^2}x_i\varepsilon\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4\\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & -x_1x_3 & -x_1x_4\\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & -x_2x_3 & -x_2x_4\\ -x_3 & -x_1x_3 & -x_2x_3 & x_3^2 & x_3x_4\\ -x_4 & -x_1x_4 & -x_2x_4 & x_3x_4 & x_4^2\end{bmatrix}$$
$$+x_i\varepsilon\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1\end{bmatrix}+\varepsilon J_i,$$

其中 J_i 见例1,但阶为5

$$B=\frac{a}{b}\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4\\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & -x_1x_3 & -x_1x_4\\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & -x_2x_3 & -x_2x_4\\ -x_3 & -x_1x_3 & -x_2x_3 & x_3^2 & x_3x_4\\ -x_4 & -x_1x_4 & -x_2x_4 & x_3x_4 & x_4^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1-b & \cdots & \cdots & \vdots\\ \cdots & \cdots & 1-b & \cdots & \vdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & 1+b & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1+b\end{bmatrix}$$

例 3　超双曲型方程

$$L\phi\equiv\sum_{i=1}^{n}\phi_{x_ix_i}-\sum_{j=1}^{m}\phi_{y_jy_j}=f,\tag{3.6}$$

其中 f 与 ϕ 分别为 $n+m$ 个自变量 $x_1, \cdots, x_n$: $y_1, \cdots, y_m$ 的已知与未知函数.

引入
$$L_1\phi=-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\phi_{x_i}+\mu\sum_{j=1}^{m}y_j\phi_{y_j},$$

得

$$\begin{aligned}L_1\phi\cdot L\phi=&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\lambda x_i\phi_{x_i}^2+2\sum_{k\neq i}\lambda x_k\phi_{x_i}\phi_{x_k}-\sum_{k\neq i}\lambda x_i\phi_{x_k}^2+\sum_{j=1}^{m}\lambda x_i\phi_{y_j}^2-2\mu\sum_{j=1}^{m}y_j\phi_{x_i}\phi_{y_j}\Big)\\&-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\mu y_j\phi_{y_j}^2+2\sum_{l\neq j}\mu y_l\phi_{y_j}\phi_{y_l}+\sum_{i=1}^{n}\mu y_j\phi_{x_i}^2-\sum_{l\neq j}\mu y_j\phi_{y_l}^2-2\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\phi_{x_i}\phi_{y_j}\Big)\\&+\frac{1}{2}\Big\{(\mu m-\lambda(n-2))\sum_{i=1}^{n}\phi_{x_i}^2+(\lambda n-\mu(m-2))\sum_{j=1}^{m}\phi_{y_j}^2\Big\}.\end{aligned}$$

取 λ, μ 满足 $\mu m-\lambda(n-2)>0$, $\lambda n-\mu(m-2)>0$, 例如 $\lambda=m$, $\mu=n$, 此时上式右端最后一项即成正定形式.

设
$$u_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\quad(i=1, \cdots, n),\quad \tilde{u}_j=\frac{\partial\phi}{\partial y_j}\quad(j=1, \cdots, m),$$
$$\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n; \tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_m)^T,$$

此时原方程可化成一阶正对称方程组

$$\mathbf{L}\boldsymbol{u}\equiv\frac{1}{2}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big(A_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}A_i\Big)+\sum_{j=1}^{m}\Big(\tilde{A}_j\frac{\partial}{\partial y_j}+\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{A}_j\Big)\Big\}\boldsymbol{u}+B\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},$$

其中 $\boldsymbol{f}=(-\lambda x_1f, \cdots, -\lambda x_nf; \mu y_1f, \cdots, \mu y_mf)^T$. 记 I_n 为 n 阶单位阵, $J_{m,n}^{(i)}$ 为第 i 行元素取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 而其余各行元素取 0 的 $m\times n$ 矩阵, $\tilde{J}_{n,m}^{(j)}$ 为第 j 行元素取 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 而其余各行元素取 0 的 $n\times m$ 矩阵. X 为对角线元素取 $x_1, x_2, \cdots, \cdots, x_n$ 的 n 阶对角阵, Y 为对角线元素取 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的 m 阶对角阵, $O_{n,m}$ 为 $n\times m$ 零矩阵, 此时

$$A_i=\begin{bmatrix}-\lambda X+\lambda J_{n,n}^{(i)}+\lambda J_{n,n}^{(i)T}, & -\mu\tilde{J}_{n,m}^{(i)}\\ -\mu\tilde{J}_{n,m}^{(i)T}, & \lambda x_iI_m\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_j=\begin{bmatrix}\mu y_jI_n, & -\lambda J_{m,n}^{(j)T}\\ -\lambda J_{m,n}^{(j)}, & -\mu Y+\mu\tilde{J}_{m,m}^{(j)}+\mu\tilde{J}_{m,m}^{(j)T}\end{bmatrix},$$

$$B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(\mu m-\lambda(n-2))I_n, & O_{n,m}\\ O_{m,n}, & (\lambda n-\mu(m-2))I_m\end{bmatrix}.$$

例 4　方程

$$L\phi\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(x_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big)=f.\tag{3.7}$$

它在不同象限取椭圆型、双曲型、超双曲型等不同类型, 因而在包含原点的区域中是混合型的.

引入
$$L_1\phi=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial x_j},$$

此时

$$L_1\phi\cdot L\phi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2\right)+\sum_{i\neq j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2.$$

记

$$u_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

此时方程(3.7)可化成(3.4)的正对称方程组,其中

$$A_i=x_i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\cdots 0\\ \ddots & & & \\ 0\cdots 0 & & \cdots & 0\\ 0\cdots & 1 & \cdots & 0\\ 0\cdots & & 0 & 0\\ & & & \ddots\\ 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1 & 0 & 0 & 0\cdots 0\\ \ddots & & & \\ 0 & x_{i-1} & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & x_i & \cdots\ 0\\ 0 & \cdots & & x_{i+1}\cdots 0\\ & & & \ddots\\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots x_n\end{bmatrix}+x_i\begin{bmatrix}0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0\\ 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0\\ 1\cdots 1 & 1 & 1\ \ 1\\ 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0\\ 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0\end{bmatrix},$$

$$B=\frac{1}{2}I_n.$$

例5 复合型方程

$$L\phi\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=f.\tag{3.8}$$

取 $L_1\phi=y\phi$, 得

$$L_1\phi\cdot L\phi=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{1}{2}y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{1}{2}y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2.$$

引入 $u_0=\phi$, $u_1=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$, $u_2=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$, $u_{12}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$, $u_{22}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$, $\boldsymbol{u}=(u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_{12},\ u_{22})^T$, 此时方程(3.8)可以化成一阶对称型方程组

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}A_1+A_1\frac{\partial}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}A_2+A_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]+B\right\}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},\tag{3.9}$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&0&y&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\y&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&0&-1&0&y\\0&-y&0&0&0\\-1&0&-y&0&0\\0&0&0&0&0\\y&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0&y&0\\0&0&\frac{3}{2}&0&y\\0&-y&0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&-y&0&0\end{bmatrix}.$$

$f=(yf,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$. B 是非负阵，但非正定阵.

例 6　复合型方程

$$L\phi\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi=f. \tag{3.10}$$

取 $L_1\phi=x\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$，得

$$L_1\phi\cdot L\phi=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\phi_x\phi_{xxx}-\phi_x\phi_{xx}-\frac{1}{2}x\phi_{xx}^2-\frac{1}{2}x\phi_{yy}^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}(x\phi_{xy}\phi_{yy}-x\phi_x\phi_{yyy})+\frac{3}{2}\phi_{xx}^2+\frac{1}{2}\phi_{yy}^2.$$

引入 $u_1=\phi_x$, $u_{11}=\phi_{xx}$, $u_{12}=\phi_{xy}$, $u_{22}=\phi_{yy}$, $u_{111}=\phi_{xxx}$, $u_{222}=\phi_{yyy}$, $\boldsymbol{u}=(u_1,\ u_{11},\ u_{12},\ u_{22},\ u_{111},\ u_{222})^T$. 此时方程(3.10)可化成形如(3.9)的一阶对称型方程组，其中

$$A_1=\begin{bmatrix}0&-1&0&0&x&0\\-1&-x&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-x&0&0\\x&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&-x\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&x&0&0\\0&0&x&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\-x&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{3}{2}&0&0&x&0\\0&0&0&0&0&-x\\0&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&-x&0&0&0&0\\0&0&x&0&0&0\end{bmatrix},$$

B 是非负阵，$f=(xf,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$.

§4. 二阶方程与对应的正对称组的解

一阶正对称方程组可以提出合格定解条件(极大非负)，使定解问题成为适定. 问题在于是否能从正对称组定解问题的适定性得到原方程对应定解问题的适定性？如答案是肯定的，那末对例 1–4 所给出的方程，可得到一系列适定的定解问题. [3, 4] 等文中将 Busemann 方程与程更一般的混合型方程化成正对称组进行讨论，提出合格定解问题，并证明其可微解必是原方程的解. [3, 4]的证明中作了两个限制：(i)正对称组是充分正的，即用切边算子组延拓若干次后方程组仍是正对称的，且定解条件经延拓后仍是合格的；(ii)在一部分境界满足条件 $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}-\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}=0\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ i\neq j)$，且由这部分境界上

的点为端点引出的一族曲线（实际上即是分划算子 L_1 的特征线）能覆盖住整个区域. 条件(i)、(ii)是两个很强的限制. 设切边算子组为 $\{I, \varepsilon D_1, \cdots, \varepsilon D_m\}$，要保证延拓方程组的定解条件仍为合格，必须取 ε 充分小，从而要求原方程组正定性极强，其阶数应为 $O\left(\frac{1}{\varepsilon^k}\right)$，$k$ 为延拓的次数. 这条件在应用上很受限制. 而条件(ii)除 Cauchy 条件外也是很难满足的. 因此一般不能从正对称方程组定解问题的适定性立即推出原定解问题的适定性.

设 ϕ 是方程(2.1)的解，引入变换(2.2)及 n 个相容条件，得到 $\boldsymbol{u}$ 满足一阶方程组（并不假设它是正对称的）. 如 $\boldsymbol{u}$ 直到境界上是光滑的，此时在境界上 $\boldsymbol{u}$ 应满足 $n-1$ 个微分关系式，称协调条件. 在本节中我们证明，如 $\phi\in H_1$ 是方程(2.1)的弱解，则由(2.2)得出的 $\boldsymbol{u}$ 是一阶方程组的弱解，且弱满足协调条件.

由于方程组的弱解在作未知函数的非异矩阵变换与两端乘以非异矩阵变换下是不变的，因此通过未知函数非异变换及两端乘以矩阵，可设

$$u_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\quad(i=1, \cdots, n),\ u_0=\phi, \tag{4.1}$$

且设方程组中 $L_0\boldsymbol{u}$ 即是原方程，$L_k\boldsymbol{u}(k=1, \cdots, n)$ 为相容条件，即

$$\begin{cases} L_0\boldsymbol{u}=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}^0u_i)+\sum\limits_{i=0}^{n}b_i^0u_i=f, \\ L_k\boldsymbol{u}=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}^ku_i)+\sum\limits_{i=0}^{n}b_i^ku_i=0\ (k=1, \cdots, n), \end{cases} \tag{4.2}$$

其中

$$\begin{cases} a_{ij}^0=a_{ij},\ b_i^0=b_i,\ b_0^0=c,\ a_{0j}^0=0\quad(i, j=1, \cdots, n); \\ a_{ij}^k+a_{ji}^k=0,\quad(k=1, \cdots, n; i, j=1, \cdots, n), \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}^k+b_i^k=0\quad(k=1, \cdots, n; i=0, 1, \cdots, n). \end{cases} \tag{4.3}$$

将方程组(4.2)记为

$$\mathbf{L}\boldsymbol{u}\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_j\boldsymbol{u})+B\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},$$

其中 $A_j=\underset{i,k=0,\cdots,n}{\mathrm{mat}}(a_{ij}^k)$，$B=\underset{i,k=0,\cdots,n}{\mathrm{mat}}(b_i^k)$，$\boldsymbol{f}=(f, 0, \cdots, 0)^T$.

二阶方程与方程组的 Green 公式依次为

$$\int_\Omega(L\phi\cdot\overline{\psi}-\phi\cdot\overline{L^*\psi})\,dx=\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\cdot\overline{\psi}-\phi\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}+b_i\phi\cdot\overline{\psi}\right)\cos(\widehat{\nu, x_i})\,dS, \tag{4.4}$$

$$\int_\Omega(\mathbf{L}\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{u}\cdot\overline{\mathbf{L}^*\boldsymbol{v}})\,dx=\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i,k=0}^{n}a_{ij}^ku_i\overline{v}_k\right)\cos(\widehat{\nu, x_j})\,dS. \tag{4.5}$$

另一方面，若用 $\boldsymbol{u}=(\phi, \phi_1\cdots, \phi_n)^T\left(\phi_i=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)$ 及 $\boldsymbol{v}=(v_0, v_1, \cdots, v_n)^T$ 代入，并利用(4.3)，经计算后易得

$$\int_\Omega\mathbf{L}\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx=\int_\Omega L\phi\cdot\overline{v}_0\,dx, \tag{4.6}$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}^T\cdot\mathbf{L}^*\boldsymbol{v}\,dx=\int_\Omega \phi\cdot\overline{L^*v_0}\,dx-\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^n\phi\cdot\left(\overline{\bar{a}_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}-\bar{b}_i v_0}\right)\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}dS$$
$$-\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^n\phi\cdot\overline{\sum_{k=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\bar{a}_{ij}^k\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\bar{b}_i^k v_k\right)}\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}dS. \tag{4.7}$$

设 $\partial\Omega$ 是光滑的 $n-1$ 维曲面，曲面上的流动坐标由 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{n-1}$ 表示．又设 ϕ 是 $\overline{\Omega}$ 上的光滑函数，此时由(4.1)式所得出的 $u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_n$ 在 $\partial\Omega$ 上应满足 $n-1$ 个协调条件

$$\frac{\partial u_0}{\partial\lambda_i}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial x_j}{\partial\lambda_i}u_j\quad(i=1,\ \cdots,\ n-1). \tag{4.8}$$

为了证明由(2.1)的 H_1 弱解所得出的 $\boldsymbol{u}$ 弱满足协调条件，必须导出(4.8)的伴随定解条件．

$\boldsymbol{v}$ 所满足的(4.8)的伴随定解条件由条件：

“$\boldsymbol{v}$ 使 $\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i,k=0}^n a_{ij}^k u_i\bar{v}_k\right)\cos\widehat{(\nu,\ x_j)}dS=0$ 对一切满足 (4.8) 的光滑函数成立”所确定．

我们限于在境界 $\partial\Omega$ 处处不是方程 (2.1) 的特征面的情形来导出伴随条件 ($\partial\Omega$ 为方程(2.1)的特征面时同样可导出)．

作变换

$$\begin{cases}\tilde{u}_i=\sum_{j=1}^n\frac{\partial x_j}{\partial\lambda_i}u_j\quad(i=1,\ \cdots,\ n-1),\\ \tilde{u}_n=\sum_{j=1}^n\cos\widehat{(\nu,\ x_j)}u_j.\end{cases} \tag{4.9}$$

这是$(u_1,\ \cdots,\ u_n)$到$(\tilde{u}_1,\ \cdots,\ \tilde{u}_n)$的非异变换．简记为

$$\tilde{u}_i=\sum_{j=1}^n\beta_{ij}u_j,\ u_i=\sum_{j=1}^n\tilde{\beta}_{ij}\tilde{u}_j\quad(i=1,\ \cdots,\ n),$$

则 $\tilde{\beta}_{in}=\beta_{ni}=\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}$, $u_0,\ \tilde{u}_1,\ \cdots,\ \tilde{u}_n$ 所满足的协调条件为 $\frac{\partial u_0}{\partial\lambda_i}=\tilde{u}_i$.

$$\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^n\sum_{k=0}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^k u_i\bar{v}_k\cos\widehat{(\nu,\ x_j)}dS=\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^n\sum_{k=0}^n\left[\sum_{i=1}^n a_{ij}^k\left(\sum_{l=1}^n\tilde{\beta}_{il}\tilde{u}_l\right)\bar{v}_k\right]\cos\widehat{(\nu,\ x_j)}dS$$
$$=\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^n\left(\sum_{k=0}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^k\tilde{\beta}_{in}\bar{v}_k\right)\tilde{u}_n\cos\widehat{(\nu,\ x_j)}dS$$
$$+\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^k\tilde{\beta}_{il}\bar{v}_k\right)\frac{\partial u_0}{\partial\lambda_l}\cos\widehat{(\nu,\ x_j)}dS.$$

注意到当 $k\neq0$ 时 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k\tilde{\beta}_{in}\cos\widehat{(\nu,\ x_j)}=0$, 上式化为

$$\int_{\partial\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0\tilde{\beta}_{in}\cos\widehat{(\nu,\ x_j)}\right)\tilde{u}_n\bar{v}_0dS$$
$$+\sum_{j=1}^n\int_{\partial\Omega}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^k\tilde{\beta}_{il}\bar{v}_k\right)\sum_{s=1}^n\beta_{ls}\frac{\partial u_0}{\partial x_s}dx_1\cdots\widehat{dx_j}\cdots dx_n,$$

而 $\frac{\partial}{\partial\lambda}=\sum_{s=1}^n\beta_{ls}\frac{\partial}{\partial x_s}$ 是曲面上的内导数，可用分部积分移到 v_k 上，再利用

$$\sum_{l=1}^{n-1}\tilde{\beta}_{il}\beta_{ls}=\delta_{ij}-\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}\cos\widehat{(\nu,\ x_s)},$$

上式后面一项化为

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i,s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}a_{ij}^{k}\tilde{\beta}_{il}\beta_{ls}\bar{v}_k)u_0dx_1\cdots\widehat{dx_j}\cdots dx_n$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{i,s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}\{a_{ij}^{k}[\delta_{is}-\cos(\widehat{\nu,x_i})\cos(\widehat{\nu,x_s})]\bar{v}_k\}\right\}u_0dx_1\cdots\widehat{dx_j}\cdots dx_n$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}(a_{ij}^{k}\bar{v}_k)u_0dx_1\cdots\widehat{dx_j}\cdots dx_n$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=1}^{n}\int_{\partial\Omega}u_0\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{k}\cos(\widehat{\nu,x_i})\cos(\widehat{\nu,x_j})\cos(\widehat{\nu,x_s})\bar{v}_k\right\}dS.$$

注意到 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{k}\cos(\widehat{\nu,x_i})\cos(\nu,x_j)=0(k\neq0)$，故得上式为

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}^{k}\bar{v}_k)u_0\cos(\widehat{\nu,x_j})dS$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\int_{\partial\Omega}u_0\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\sum_{i,j=0}^{n}a_{ij}^{0}\cos(\widehat{\nu,x_i})\cos(\widehat{\nu,x_j})\bar{v}_0\right\}dx_1\cdots\widehat{dx_j}\cdots dx_n.$$

最后得到

$$\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{k}u_i\bar{v}_k\cos(\widehat{\nu,x_j})dS=\int_{\partial\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{0}\tilde{\beta}_{in}\cos(\widehat{\nu,x_j})\tilde{u}_n\right]\bar{v}_0\,dS$$

$$-\int_{\partial\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}^{k}\bar{v}_k)\cos(\widehat{\nu,x_j})\right\}u_0\,dS$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}\cos(\widehat{\nu,x_i})\cos(\widehat{\nu,x_s})\right]a_{ij}^{0}\bar{v}_0\right\}u_0\,dx_1\cdots\widehat{dx_j}\cdots dx_n.$$

注意到 $\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}\cos(\widehat{\nu,x_i})\cos(\widehat{\nu,x_s})$ 是曲面上的内导数，如给出 $v_0|_{\partial\Omega}=0$，则内导数亦为零. 由 u_0 及 $\tilde{u}_n$ 的任意性立即推出要使曲面积分为零的充要条件是 $\boldsymbol{v}$ 满足

$$v_0|_{\partial\Omega}=0,\quad \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}^{k}\bar{v})\cos(\widehat{\nu,x_j})|_{\partial\Omega}=0. \tag{4.10}$$

如原定解条件为 $u_0|_{\partial\Omega}=0$ 及协调条件 (4.8)，则伴随定解条件应是 $v_0|_{\partial\Omega}=0$. 如原定解条件为 $u_0|_{\partial\Omega}=\tilde{u}_n|_{\partial\Omega}=0$ 及协调条件(4.8)，此时伴随定解条件为 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 任意. 对于其它定解条件，同样可导出 $\boldsymbol{v}$ 所满足的伴随定解条件.

今设 $\phi\in H_1(\Omega)$ 是方程 (2.1) 的弱解，不假设它满足任何边界条件，要证明 $u_0=\phi$, $u_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ 所成的向量函数 $\boldsymbol{u}=(u_0, u_1, \cdots, u_n)^T$ 是一阶方程组(4.2)满足协调条件(4.8)的弱解. 即对于满足条件(4.10)的充分光滑函数 $\boldsymbol{v}$，成立着

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{f}^T\cdot\bar{\boldsymbol{v}}\,dx-\int_{\Omega}\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\mathbf{L}^*\boldsymbol{v}}\,dx=0.$$

事实上，从公式(4.6)，(4.7)得

$$\int_{\Omega}(\boldsymbol{f}^T\cdot\bar{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\mathbf{L}^*\boldsymbol{v}})dx=\int_{\Omega}(f\cdot\bar{v}_0-\phi\cdot\overline{L^*v_0})dx$$

$$+\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}\phi\cdot\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}-\bar{b}_iv_0\right)}\cos(\widehat{\nu,x_i})dS$$

$$+\int_{\partial\Omega}\phi\left\{\sum_{i,k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}^{k}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-b_i^kv_k\right)\cos(\widehat{\nu,x_i})\right\}dS$$

$$=\int_{\Omega}(f\cdot\bar{v}_0-\phi\cdot\overline{L^*v_0})dx+\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\overline{\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}}\right)\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}dS$$

$$+\int_{\partial\Omega}\phi\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j,k=1}^{n}\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a}_{ij}^k v_k)}\right\}\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}dS$$

$$=\int_{\Omega}(f\cdot\bar{v}_0-\phi\cdot\overline{L^*v_0})dx+\int_{\partial\Omega}\overline{\phi\left(\sum_{i,j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\right)\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}}dS=0,$$

即 $\boldsymbol{u}$ 是方程组满足协调条件的弱解.

若 $\phi\in H_1(\Omega)$ 是方程 (2.1) 的弱解且满足 $\phi|_{\partial\Omega}=0$, 则对于充分光滑且满足 $v_0=0$ 的向量函数 $\boldsymbol{v}$ 成立着

$$\int_{\Omega}(\boldsymbol{f}^T\cdot\bar{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{u}^T\cdot\overline{\mathbf{L}^*\boldsymbol{v}})dx=\int_{\Omega}(f\cdot\bar{v}_0-\phi\cdot\overline{L^*v_0})dx$$

$$+\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\overline{\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}-\bar{b}_i v_0}\right)\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}dS$$

$$+\int_{\partial\Omega}\phi\left\{\overline{\sum_{i,k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}^k\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\bar{b}_i^k u_k\right)\cos\widehat{(\nu,\ x_i)}}\right\}dS$$

$$=\int_{\Omega}(f\cdot\bar{v}_0-\phi\cdot\overline{L^*v_0})dx=0,$$

故 $\boldsymbol{u}$ 是满足 $u_0|_{\partial\Omega}=0$ 及协调条件的弱解.

同样, 如 $\phi\in H_1(\Omega)$ 是方程 (2.1) 满足 Cauchy 定解条件或其它定解条件的弱解, 则 $\boldsymbol{u}=(\phi_0,\ \phi_1,\ \cdots,\ \phi_n)^T$ 是满足相应的定解条件及相容定解条件的弱解. 综合上述结果, 我们有

定理 2 若 $\phi\in H_1(\Omega)$ 是方程(2.1)的弱解, 满足适当的定解条件, 则由 $u_i=\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}\phi_j$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 所得到的向量函数 $\boldsymbol{u}$ 是满足延拓一阶方程组及对应定解条件与协调条件的弱解.

定理 2 表明由一阶方程组的解所作出的 ϕ 要成为方程(2.1)的 H_1 弱解, 其必要条件是 $\boldsymbol{u}$ 在境界上弱满足协调条件.

§5. 一个反例

本节中举出一个反例说明从方程组(2.5)定解问题的适定性不能推出原方程(2.1)对应定解问题的适定的. 在[10]中给出一个更简单的反例并具体造出方程组定解问题的一个解它不是原方程对应定解问题的解(它不满足协调条件).

讨论 § 3 中例 2 所给出的超双曲型方程

$$L\phi\equiv\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_4^2}+a\phi=f,\tag{5.1}$$

其中 $a>0$ 是常数. 求解的区域 Ω 由曲面

$$S_1:\ x_1^2+x_2^2=c^2,\ x_3^2+x_4^2\leqslant c^2;$$

$$S_2:\ x_3^2+x_4^2=c^2,\ x_1^2+x_2^2\leqslant c^2$$

$(c>0)$所围成. (5.1)所化成的一阶正对称方程组已由例2给出.

在S_1上, $\cos(\widehat{\nu, x_1})=\frac{x_1}{c}$, $\cos(\widehat{\nu, x_2})=\frac{x_2}{c}$, $\cos(\widehat{\nu, x_3})=\cos(\widehat{\nu, x_4})=0$, 因此

$$A_\nu=\sum_{\nu=1}^{4}\cos(\widehat{\nu, x_i})A_i$$

$$=-\frac{1}{c}\begin{bmatrix} dc^2 & dx_1c^2-x_1 & dx_2c^2-x_2 & -dx_3c^2 & -dx_4c^2 \\ dx_1c^2-x_1 & (dx_1^2-1)c^2 & dx_1x_2c^2 & -dx_1x_3c^2 & -dx_1x_4c^2 \\ dx_2c^2-x_2 & dx_1x_2c^2 & (dx_2^2-1)c^2 & -dx_2x_3c^2 & -dx_2x_4c^2 \\ -dx_3c^2 & -dx_1x_3c^2 & -dx_2x_3c^2 & (dx_3^2+1)c^2 & dx_3x_4c^2 \\ -dx_4c^2 & -dx_1x_4c^2 & -dx_2x_4c^2 & dx_3x_4c^2 & (dx_4^2+1)c^2 \end{bmatrix},$$

其中$d=\frac{a}{b^2}$. 假设$dc^2=\frac{a}{b^2}c^2<1$, 经过计算可以得到矩阵A_ν的特征行列式为

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} -dc^2-\lambda & -dx_1c^2+x_1 & -dx_2c^2+x_2 & dx_3c^2 & dx_4c^2 \\ -dx_1c^2+x_1 & -(dx_1^2-1)c^2-\lambda & -dx_1x_2c^2 & dx_1x_3c^2 & dx_1x_4c^2 \\ -dx_2c^2+x_2 & -dx_1x_2c^2 & -(dx_2^2-1)c^2-\lambda & dx_2x_3c^2 & dx_2x_4c^2 \\ dx_3c^2 & dx_1x_3c^2 & +dx_2x_3c^2 & -(dx_3^2+1)c^2-\lambda & -dx_3x_4c^2 \\ dx_4c^2 & dx_1x_4c^2 & dx_2x_4c^2 & -dx_3x_4c^2 & -(dx_4^2+1)c^2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+c^2)(\lambda-c^2)\{\lambda^3+(dc^4+dc^2(x_3^2+x_4^2)$$
$$+dc^2)\lambda^2+(dc^4(c^2-x_3^2-x_4^2)+c^2(dc^2-1)-c^4)\lambda$$
$$+(dc^6-c^4-dc^4(x_3^2+x_4^2))\}.$$

由于$dc^6-c^4-dc^4(x_3^2+x_4^2)<0$, $dc^4+dc^2(x_3^2+x_4^2)+dc^2>0$, 而特征多项式的根必是实的, 因此它必是有两个正根, 三个负根.

A_ν的极大非负空间在S_1上是两维的, 易见在S_1上给出

$$u_3=u_4=0,\ u_0=\left(\frac{1}{dc^2}-1\right)(x_1u_1+x_2u_2)$$

是合格的. 为此只要证明此时$A_\nu\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant0$好了.

$$A_\nu\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=-\frac{1}{c}\{dc^2u_0^2+2(dx_1c^2-x_1)u_0u_1+2(dx_2c^2-x_2)u_0u_2+(dx_1^2-1)c^2u_1^2$$
$$+2dx_1x_2c^2u_1u_2+(dx_2^2-1)c^2u_2^2\}$$
$$=-\frac{1}{c}\{dc^2(u_0+x_1u_1+x_2u_2)^2-2(x_1u_1+x_2u_2)u_0-c^2(u_1^2+u_2^2)\}$$
$$=-\frac{1}{c}\left\{\left(2-\frac{1}{dc^2}\right)(x_1u_1+x_2u_2)^2-c^2(u_1^2+u_2^2)\right.$$
$$\geqslant\frac{1}{c}\{(x_1^2+x_2^2)(u_1^2+u_2^2)-(x_1u_1+x_2u_2)^2\}\geqslant0.$$

同样可以证明在S_2上A_ν的极大非负空间也是两维的. 在S_2上给出定解条件

$$u_1=u_2=0,\ x_3u_3+x_4u_4=0,$$

则

$$
\begin{aligned}
A_\nu \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=&-\frac{1}{c}\{-dc^2u_0^2+(-dx_3^2-1)c^2u_3^2-2dx_3x_4c^2u_3u_4+(-dx_4^2-1)c^2u_4^2\\
&+2(dx_3c^2+x_3)u_0u_3+2(dx_4c^2+x_4)u_0u_4\}\\
=&-\frac{1}{c}\{-dc^2(u_0-x_3u_3-x_4u_4)^2+2(x_3u_3+x_4u_4)u_0-c^2(u_3^2+u_4^2)\}\\
=&\frac{1}{c}\{dc^2u_0^2+c^2(u_3^2+u_4^2)\}\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

因此正对称方程组给出定解条件：在 S_1 上 $u_3=u_4=0$，$u_0=\left(\frac{1}{dc^2}-1\right)(x_1u_1+x_2u_2)$；在 S_2 上 $u_1=u_2=0$，$x_3u_3+x_4u_4=0$ 是适定的．对于任给的 $\boldsymbol{f}$，该定解问题存在着弱解 $\boldsymbol{u}=(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)^T$．

对应于原方程的定解条件应为：在 S_1 上 $\phi_{x_3}=\phi_{x_4}=0$，$b\phi=\frac{1}{dc}\phi_\nu$；在 S_2 上 $\phi_{x_1}=\phi_{x_2}=0$，$\phi_\nu=0$．

如 $\phi\in H(\Omega)$ 弱满足上述条件，则由迹定理[7,8] ϕ_{x_i} 在境界 $\partial\Omega$ 上为 $H_{-3/2}$ 函数，且满足定解条件．因此在 S_1 上 $\phi=\phi(x_1, x_2)$，$(x_1^2+x_2^2=c^2)$，在 S_2 上 $\phi=\phi(x_3, x_4)$ $(x_3^2+x_4^2=c^2)$，故在境界上 $\phi=\text{const}$．记 $\phi|_{\partial\Omega}=k$，于是在 S_1 上 $\left.\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|_{S_1}=bdck$．这样的定解问题显然是过定的，我们用反证法证明．

若对于一切 $f\in C^\infty(\Omega)$，上述定解问题存在着弱解 $\phi\in H(\Omega)$，依弱解定义，对于一切满足伴随定解条件

$$\int_{S_1}\left(bdc\psi-\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)dS-\int_{S_2}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}dS=0 \tag{5.2}$$

的光滑函数 ψ 成立着

$$\int_\Omega(\phi\cdot L^*\psi-f\cdot\psi)dx=0.$$

如 $\tilde\psi$ 是齐次方程 $\psi_{x_1x_1}+\psi_{x_2x_2}-\psi_{x_3x_3}-\psi_{x_4x_4}+a\psi=0$ 的任一解，且满足伴随条件(5.2)，则有

$$\int_\Omega f\cdot\tilde\psi\,dx=\int_\Omega\phi\cdot L^*\psi\,dx=0,\ \forall f\in C^\infty(\Omega).$$

由 f 的任意性推出 $\tilde\psi\equiv 0$．但这是不可能的，因为齐次方程满足伴随条件(5.2)的非零解是显然存在的．

上例说明尽管方程(5.1)化成的正对称方程组所提的定解问题对于任意 $\boldsymbol{f}$ 存在着弱解，但由取 $\boldsymbol{f}=(f, 0, \cdots, 0)^T$ 得到的弱解 $\boldsymbol{u}$ 所作出的 $\phi=\frac{1}{b}(u_0+x_1u_1+x_2u_2-x_3u_3-u_4x_4)$ 并不就是原方程对应定解问题的弱解．

出现这例子的原因很简单．因引入新未知函数 $u_0, u_1, \cdots, u_n$ 得到的一阶方程组在境界上看成 $n+1$ 个独立函数，而在原方程中由 $n-1$ 个协调条件限制着．新方程组的解的全体较原方程解的全体增多，其中包括了一些境界上不满足协调条件的解．如方程组所给的合格定解条件不包括协调条件，此时所得到的解不能保证是原方程的解．如原方程的定解问题提法是适定的，其对应的一阶方程组定解问题也不一定是合格的(如将协调条件添入一阶方程组的定解条件中，此时它是微分条件而不是通常合格定解条件中所提

的代数条件).

参 考 文 献

[1] Friedrichs, K. O., Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418.
[2] Lax, P. D. and Phillips, R. S., Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators., *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 427—456.
[3] 谷超豪,论多维空间的一类混合型方程,数学进展, **8**:3 (1965), 277—282.
[4] 谷超豪,几个自变数线性混合型方程的边值问题,科学通报, **23**: 6(1978), 335—339.
[5] 谷超豪,拟线性正对称方程组的边值问题及其对混合型方程的应用,数学学报, **21**: 2(1978), 119—129.
[6] 陈恕行,含非良性角点区域中正对称方程组可解性问题的讨论, 复旦学报(自然科学版), **19**:3(1980), 249—257.
[7] 许政范,偏微分方程的弱解与强解一致性及其应用,安徽大学学报(自然科学版), 1978年第1期, 6—27.
[8] 许政范,高阶正对称方程理论,复旦学报(自然科学版), 3(1979) 57—68.
[9] Xu Zheng fan, Uniformity of strong and weak solutions and their differentiabilities for linear partial differential equations of higher order. Proc. D. D. internat. symp. Beijing (1980).
[10] 许政范,正对称方程组与高阶正定型方程(未发表).

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER AND SYMMETRIC POSITIVE SYSTEMS

Xu Zhengfan
(*Anhui University*)

ABSTRACT

In this paper we study the relation between symmetric positive systems and equations of higher order. The main result is:

Theorem 1. An equation of second order $L\phi=f$ can be transformed into a symmetric positive system by introducing new unknown functions

$$u_i=\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}\varphi_j(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\quad \varphi_0=\varphi,\quad \varphi_j=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

iff there exists L_1 of order 1 such that

$$\operatorname{Re}(L_1\varphi\cdot\overline{L\varphi})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}P_i(\varphi,\ \varphi)+B(\varphi,\ \varphi),$$

where $P_i(\varphi,\ \varphi)\ (i=1,\ \cdots,\ n)$, $B(\varphi,\ \varphi)$ are differential quadartic forms and $B(\varphi,\ \varphi)$ is positive definite.

This Theorem can be extended into equations of higher order.

Some examples of deducing equations of higher order into symmetric positive systems are given.

Finally, we give a counter example which shows that a boundary problem of a symmetric positive system deduced from an equation of higher order is admissible, but its corresponding bounbary problem of the original equation is not well-posed.