数 学 年 刊
3 (5) 1982

半线性分布系统的最大原理(I)

姚 允 龙
(复旦大学数学研究所)

敬献给苏步青教授八十寿辰暨从事教育工作五十年

本文讨论 Banach 空间上的半线性发展系统在一般指标下的最大原理及其在一阶、二阶半线性发展方程中的具体形式.

一、半线性分布系统的最优控制问题提法与最大原理

讨论 Banach 空间 X(具范数 $\|\cdot\|_X$)上的半线性分布系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t,\ x(t),\ u(t)),\ t>0 \\ x(0)=0,\ u(\cdot)\in\mathscr{F}, \end{cases} \tag{1}$$

这里 A 是 X 上一个线性 c_0 类算子半群 e^{At} 的无穷小生成元; $\mathscr{F}$ 是由定义在 $[0,\ T]$ 上取值于控制 Banach 空间 Z 的一个任意子集 U 的强可测函数 $u(t)$ 所组成的函数族, 即

$$\mathscr{F}=\{u(\cdot),\ u(t)\in U \text{ 且于} [0,\ T] \text{上强可测}\}, \tag{2}$$

其中 T 是一个给定的正数.

全文中, 我们将采用 Mild 解[4,5], 即称 $x(t)=x(t,\ u(\cdot))$ 为(1)的解, 如果它满足下列抽象非线性 Volterra 型积分方程

$$x(t)=\int_0^t e^{A(t-s)}f(s,\ x(s),\ u(s))ds, \tag{3}$$

其中的积分是在 Bochner 意义下的.

非线性方程一个困难问题是它的解不一定整体存在, 这是与线性情形一个很大的区别, 因此我们必须对容许控制函数类作若干限制才能使最优控制问题讨论有意义, 称 $u(\cdot)$ 是一个容许控制, 若它不仅有 $u(\cdot)\in\mathscr{F}$ 而且对应的解 $x(t,\ u(\cdot))\overset{\text{def.}}{=\!=}x(t)$ 在 $[0,\ T]$ 上整体存在, 即定义容许控制类 U_{ad} 为

$$U_{ad}=\{u(\cdot)\in\mathscr{F},\ x(t,\ u(\cdot)) \text{于} [0,\ T] \text{上存在}\}. \tag{4}$$

指标函数将取为

$$Q(u(\cdot))=\int_0^T J(t,\ x(t,\ u(\cdot)),\ u(t))dt, \tag{5}$$

这包括了二次最优控制问题, 分离型指标(即 $J(t,\ x,\ u)=J_1(t,\ x)+J_2(t,\ u)$)最优控制问题. 目前甚至在线性分布系统场合也只讨论这二种情形[6~10]. 下面的假定 1°, 2° 将保证对一切 $u(\cdot)\in U_{ad}$, (5)式的积分存在.

最优控制问题的提法是: 求 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$ 使得

本文 1981 年 6 月 2 日收到.

$$\min_{u(\cdot)\in U_{ad}} Q(u(\cdot)) = Q(u^*(\cdot)), \tag{6}$$

$u^*(\cdot)$称为系统(1)在指标(5)下的最优控制.

先对$f(t, x, u)$与$J(t, x, u)$作以下假设:

1° 设G是X中一个给定的开集, $f(t, x, u)$, $J(t, x, u)$是定义在乘积集合$[0, T]\times G\times U$上的二个连续映照, 值域分别在X与R^1(实数域)中, 同时对一切$x(\cdot)\in C([0, T], G)$和$u(\cdot)\in\mathscr{F}$有

$$\|f(t, x(t), u(t))\|_X \quad 及 \quad J(t, x(t), u(t))\in L_1[0, T].$$

2° $f(t, x, u)$与$J(t, x, u)$在$[0, T]\times G\times U$上关于x的 Fréchet 导数

$$\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x}\equiv f_x(t, x, u)\in\mathscr{L}(X),$$

$$\frac{\partial J(t, x, u)}{\partial x} = J_x(t, x, u)\in X^*$$

存在且强连续. 此外, 对一切$x_0\in G$与$u(\cdot)\in\mathscr{F}$存在一个正数λ与纯量函数$\mu(\cdot)\in L_1[0, T]$ (λ, $\mu(\cdot)$与x_0, $u(\cdot)$可以有关)使得对一切$t\in[0, T]$及

$$x\in O(x_0, \lambda)\overset{\text{def.}}{=\!=}\{x\in X;\ \|x-x_0\|_X<\lambda\}\subset G$$

满足

$$\|f_x(t, x, u(t))\|_{\mathscr{L}(X)}\leqslant\mu(t),$$
$$\|J_x(t, x, u(t))\|_{X^*}\leqslant\mu(t). \tag{7}$$

注 以下在不发生混淆的场合,范数的下标省略了.

假定2°可推断对G中每个紧子集C及每个$u(\cdot)\in\mathscr{F}$也存在一个正数λ与可积函数$\mu(\cdot)\in L_1[0, T]$, 使得(7)式对一切$t\in[0, T]$及$x\in C_\lambda\subset G$成立, 其中C_λ表示C的闭邻域, 即$C_\lambda\overset{\text{def.}}{=\!=}\{x\in X,\ \inf\limits_{y\in C}\|x-y\|\leqslant\lambda\}$. 以下二节论证中将多次用到这一条件.

为了使讨论更一般化起见, 我们将对下列的非线性抽象 Volterra 型积分方程进行讨论

$$x(t) = h(t) + \int_0^t G(t, s) f(s, x(s), u(s))ds, \tag{8}$$

其中$f(t, x, u)$与前面一致, 即亦满足以上假设, 而对有界线性算子族$G(t, s)\in\mathscr{L}(X)$ $(T\geqslant t\geqslant s\geqslant 0)$及$h(t)$作如下假设:

3° $G(t, s)\in\mathscr{L}(X)$, 且关于t, s强连续$(T\geqslant t\geqslant s\geqslant 0)$及$h(t)\in C([0, T], G)$. 按共鸣定理,存在一个正常数$M$, 使得$\|G(t, s)\|\leqslant M$对一切$T\geqslant t\geqslant s\geqslant 0$.

显然(8)包括了(3),除外它还包括了许多其它类型的半线性分布系统,我们仅举二个例子来说明这点.

例1 在 Banach 空间X给出一个半线性非自治分布系统(指$A(t)$与t有关)

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t))\ (t>0),\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

其中$A(t)$是稠定闭算子族, 在一定条件下[11,12,13]存在一个强连续的发展算子$G(t, s)\in\mathscr{L}(X)$满足$T\geqslant t\geqslant s\geqslant 0$时

$$\frac{dG(t,\ s)x}{dt}=A(t)G(t,\ s)x \quad (x\in X \text{ 中一个稠密线性子集 } D_0),$$

$$G(t,\ t)=I,$$

$$G(t,\ \tau)G(\tau,\ s)=G(t,\ s) \quad (t\geqslant\tau\geqslant s\geqslant 0),$$

这时例 1 的 Mild 解 $x(t)$ 是(8)的解，其中 $h(t)=G(t,\ 0)x_0$.

例 2　在 Hilbert 空间 H 中给出一个二阶半线性分布系统

$$\begin{cases} \ddot{x}(t)+Ax(t)=f(t,\ x(t),\ u(t)) \quad (t>0), \\ x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0, \end{cases}$$

其中 A 是正定自共轭算子，则它的 Mild 解 $x(t)$ 也是(8)的解，其中

$$G(t,\ s)=A^{-\frac{1}{2}}\sin[A^{\frac{1}{2}}(t-s)],\ h(t)=\cos(A^{\frac{1}{2}}t)\cdot x_0+A^{-\frac{1}{2}}\sin(A^{\frac{1}{2}}t)\cdot\dot{x}_0$$

均满足假定 3°[14].

以上二例分别对应半线性抛物型方程与半线性双曲型方程.

如果 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$，按 U_{ad} 的定义，(8)的解 $x(t,\ u^*(\cdot))\xlongequal{\text{def.}}x^*(t)$ 在 $[0,\ T]$ 上存在. 根据抽象 Volterra 型积分方程有关结果知，对一切 $T\geqslant t\geqslant s\geqslant 0$ 存在强连续有界线性算子族 $U(t,\ s)\in\mathscr{L}(X)$ 满足积分方程

$$U(t,\ s)x=G(t,\ s)x+\int_s^t G(t,\ \tau)f_x(\tau,\ x^*(\tau),\ u^*(\tau))U(\tau,\ s)x\,d\tau, \tag{9}$$

$x\in X$，且连续解是唯一的.

有了以上这些准备，我们可以叙述本文的主要定理.

定理 1(**最大原理**)　如果 $u^*(\cdot)$ 是系统(8)在指标(5)下的最优控制，那末变量 $u\in U$ 的函数 $H(t,\ u)$ 在 $u=u^*(t)$ 取到最大值(除一个另集外)即

$$\max_{u\in U} H(t,\ u)\doteq H(t,\ u^*(t)), \tag{10}$$

这里

$$H(t,\ u)=-J(t,\ x^*(t),\ u)+\langle\psi(t),\ f(t,\ x^*(t),\ u)\rangle, \tag{11}$$

$$\psi(t)=-\int_t^T J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))U(s,\ t)ds\in X^*, \tag{12}$$

及最佳轨道 $x^*(t)=x(t,\ u^*(\cdot))$. 其中 $\langle\ ,\ \ \rangle$ 表示 X^* 与 X 纯量积.

在证明之前(第二、三节)先将该定理用于推论(1)及例 1, 2.

推论 1　如果 $u^*(\cdot)$ 是系统(1)在指标(5)下的最优控制，那末(10)式成立，其中

$$H(t,\ u)=-J(t,\ x^*(t),\ u)-\int_t^T\langle J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s)),\ \theta(s)\rangle ds, \tag{13}$$

$\theta(t)$ 是摄动方程的 Cauchy 初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta(t)}{dt}=(A+f_x(t,\ x^*(t),\ u^*(t)))\theta(t),\ t>s, \\ \theta(s)=f(s,\ x^*(s),\ u) \end{cases} \tag{14}$$

的 Mild 解($s\in[0,\ T]$; $t\in[s,\ T]$).

证　根据 Ball 或 Balakrishnan[4,5] 中的结果，(14) 的 Mild 解是下列抽象积分方程的唯一连续解

$$\theta(t)=e^{A(t-s)}f(s,\ x^*(s),\ u)+\int_s^T e^{A(t-\tau)}f_x(\tau,\ x^*(\tau),\ u^*(\tau))\theta(\tau)d\tau.$$

将它与(9)式比较,根据解的唯一性得(这里 $G(t,\ s)=e^{A(t-s)}$)

$$\theta(t)=U(t,\ s)f(s,\ x^*(s),\ u).$$

于是从(11)、(12)就可得(13).

如果我们用共轭方程来表示 $H(t,\ u)$, 则可得到

推论 1′ 如果 $u^*(\cdot)$ 是系统(1)在指标(5)下的最优控制,那末(10)式成立,其中

$$H(t,\ u)=-J(t,\ x^*(t),\ u)+\langle\psi(t),\ f(t,\ x^*(t),\ u)\rangle,$$

$\psi(t)$ 是下列共轭摄动方程的唯一连续 Mild 解:

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi(t)}{dt}=-(A^*+f_x^*(t,\ x^*(t),\ u^*(t)))\psi(t)+J_x(t,\ x^*(t),\ u^*(t)),\\ \psi(T)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\end{cases}\tag{15}$$

其中 f_x^* 表示有界线性算子 f_x 的共轭算子.

证 从(9)及 $G(t,\ s)=e^{A(t-s)}$, 并注意到摄动交换公式[8]

$$\int_s^t G(t,\ \tau)f_x(\tau,\ x^*(\tau),\ u^*(\tau))U(\tau,\ s)d\tau=\int_s^t U(t,\ \tau)f_x(\tau,\ x^*(\tau),\ u^*(\tau))G(\tau,\ s)d\tau,$$

可推出对一切 $g\in X^*$ 有

$$U^*(t,\ s)g=G^*(t,\ s)g+\int_s^t G^*(\tau,\ s)f_x^*(\tau,\ x^*(\tau),\ u^*(\tau))U^*(t,\ \tau)g d\tau,$$

即

$$U^*(t,\ s)g=G^*(t,\ s)g-\int_t^s G^*(t,\ s)f_x^*(\tau,\ x^*(\tau),\ u^*(\tau))U^*(t,\ \tau)g\,d\tau.\tag{16}$$

但这里 $G^*(t,\ s)=e^{A^*(t-s)}$(见[8]),且 $-A^*$ 是“向后” W^* 连续算子半群 $e^{-A^*s}(s<0)$ 的生成元,即 e^{-A^*s} 是共轭方程

$$\frac{dg(s)}{ds}=-A^*g(s),\ s<0$$

的发展算子. 于是从(16)知 $U^*(t,\ s)$ 是共轭摄动方程

$$\frac{dg(s)}{ds}=-A^*g(s)-f_x^*(s,\ x^*(s),\ u^*(s))g(s)$$

的发展算子,从而(12)表明

$$\psi(t)=\int_T^t U^*(s,\ t)J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))ds$$

是非齐次共轭摄动方程(15)的解.

推论 2 在例 2 中, $\psi(t)$ 是

$$\begin{cases}\ddot{\psi}(t)+(A+f_x^*(t,\ x^*(t),\ u^*(t)))\psi(t)=J_x(t,\ x^*(t),\ u^*(t)),\\ \psi(T)=\dot{\psi}(T)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\end{cases}$$

的弱解.

证明略.

现在来着手证明最大原理.

二、一些引理

考虑 Banach 空间的抽象积分方程

$$x(t)=f_\delta(t)+\int_0^t K_\delta(t,\ s,\ x(s),\ n)ds, \tag{1}_n^\delta$$

这里满足下列条件

1° $f_\delta(t)\in C([0,\ T],\ G)$, 其中参数 $\delta\in[0,\ 1]$, 此外在 $C([0,\ T],\ X)$ 中

$$f_\delta \xrightarrow{C} f_0 \quad (\delta\to+0).$$

2° $K_\delta(t,\ s,\ x,\ n)$ $(\delta\in[0,\ 1],\ n=1,\ 2,\ \cdots)$ 是定义在 $T\geqslant t\geqslant s\geqslant 0,\ x\in G$ 取值于 X 的映照, 它关于 $t,\ x$ 连续, 关于 s 可测. 此外关于 x 满足"局部 Lipschitz"条件, 即对任意一点 $x_0\in G$, 存在一个正数 λ 与纯量可积函数 $\mu(\cdot)\in L_1[0,\ T]$ ($\lambda,\ \mu(\cdot)$ 可以与 x_0 有关), 有 $O_\lambda(x_0)=\{x\in X,\ \|x-x_0\|_X<\lambda\}\subset G$, 且对一切 $x_1,\ x_2\in O_\lambda(x_0)$, $\delta\in[0,\ 1]$, $n=1,2,\cdots$ 一致成立

$$\|K_\delta(t,\ s,\ x_1,\ n)-K_\delta(t,\ s,\ x_2,\ n)\|_X\leqslant\mu(s)\|x_1-x_2\|_X. \tag{2}$$

3° 对每个 $x(\cdot)\in C([0,\ T],\ G)$, $K_\delta(t,\ s,\ x(s),\ n)$ 关于 s 在 $[0,\ t]$ 上 Bochner 可积, 且积分 $\int_0^t K_\delta(t,\ s,\ x(s),\ n)ds$ 是 t 的连续函数, 此外, 在 $t\in[0,\ T]$, $n=1,\ 2,\ \cdots$ 一致地成立

$$\int_0^t K_\delta(t,\ s,\ x(s),\ n)ds \rightrightarrows \int_0^t K_0(t,\ s,\ x(s),\ n)ds \quad (\delta\to+0). \tag{3}$$

从 2°, 我们可知对每个 $x_0(\cdot)\in C([0,\ T],\ G)$ 存在一个正数 λ 与 $\mu(\cdot)\in L_1[0,\ T]$ 使得 $x_0(\cdot)$ 在 $C([0,\ T]X)$ 中的 λ 闭邻域:

$$O_\lambda(x_0(\cdot))=\{x(\cdot)\in C([0,\ T],\ X),\ \|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_C\leqslant\lambda\}\subset C([0,\ T],\ G), \tag{4}$$

且

$$\|K_\delta(t,\ s,\ x_1(s),\ n)-K_\delta(t,\ s,\ x_2(s),\ n)\|_X\leqslant\mu(s)\|x_1(s)-x_2(s)\|_X, \tag{5}$$

对一切 $x_1(\cdot),\ x_2(\cdot)\in O_\lambda(x_0(\cdot))$ 及 $\delta\in[0,\ T]$, $n=1,\ 2,\ \cdots$ 成立.

引理 1 如果上面条件 1°、2°、3° 满足, 且方程 $(1)_n^0$ $(\delta=0!)$ 在 $[0,\ T]$ 上对一切 n 存在一个公共解 $x^*(\cdot)\in C([0,\ T],\ G)$, 那末必存在一正数 δ_0 使得当 $0\leqslant\delta\leqslant\delta_0$ 时对一切 n, 方程 $(1)_n^\delta$ 在整个 $[0,\ T]$ 上存在唯一连续解 $x_n^\delta(t)$, 并且对每个固定的 n, 在 $t\in[0,\ T]$ 上一致地存在极限

$$x_n^\delta(t)\rightrightarrows x^*(t) \quad (\delta\to+0). \tag{7}$$

证　在 (4)、(5) 式中取 $x_0(\cdot)=x^*(\cdot)$ 和 $0<\varepsilon\leqslant\lambda$. 在 $C([0,\ T],\ X)$ 中引进新范数 $\|\cdot\|_\mu$ 为

$$\|x(\cdot)\|_\mu=\max_{t\in[0,T]}\left(e^{-3\int_0^t\mu(s)ds}\|x(t)\|_X\right), \tag{8}$$

这里 $x(\cdot)\in C([0,\ T],X)$. 显然新范数 $\|\cdot\|_\mu$ 与 $C([0,\ T],\ X)$ 中原来的范数 $\|\cdot\|_C$ 等价. 因此存在一个正数 $\lambda_1>0$ 使得在新范数下的闭球 $S_{\lambda_1}(x^*(\cdot),\ \mu)\subset O_\varepsilon(x^*(\cdot))$, 其中

$$S_{\lambda_1}(x^*(\cdot),\ \mu)\overset{\text{def.}}{=\!=}\{x(\cdot)\in C([0,\ T],\ X),\ \|x(\cdot)-x^*(\cdot)\|_\mu\leqslant\lambda_1\}.$$

用记号 T_n^δ 和 U_n^δ 表示如下从 $\delta_{\lambda_1}(x^*(\cdot),\ \mu)$ 到 $C([0,\ T],\ X)$ 的算子族

$$(T_n^\delta x)(t)=\int_0^t K_\delta(t,\ s,\ x(s),\ n)ds, \tag{9}$$

$$(U_n^\delta x)(t)=f_\delta(t)+\int_0^t K_\delta(t,\ s,\ x(s),\ n)ds=f_\delta(t)+(T_n^\delta)(t), \tag{10}$$

这里 $\delta\in[0,\ T]$, $n=1,\ 2,\ \cdots$. 按 $x^*(\cdot)$ 的定义, $x^*(t)=(U_n^0x^*)(t)$ 或简写为 $x^*=U_n^0x^*$.

从条件 $1°$ 和(3)式知, 存在正数 δ_0 使得当 $\delta\in[0,\ \delta_0]$ 时, 对一切 $n=1,\ 2,\ \cdots$ 有

$$\begin{aligned}&\|f_\delta-f_0\|_\mu<\frac{\lambda_1}{3},\\&\|T_n^\delta x^*-T_n^0x^*\|_\mu<\frac{\lambda_1}{3}.\end{aligned} \tag{11}$$

因此, 当 $x(\cdot)\in S_{\lambda_1}(x^*(\cdot),\ \mu)$ 时

$$\begin{aligned}\|(T_n^\delta x)(t)-(T_n^\delta x^*)(t)\|_X&\leqslant\int_0^t\|K_\delta(t,\ s,\ x(s),\ n)-K_\delta(t,\ s,\ x^*(s),\ n)\|_X ds\\&\leqslant\int_0^t\mu(s)\|x(s)-x^*(s)\|_X ds \qquad \text{(根据(5)式)}\\&\leqslant\int_0^t\mu(s)e^{3\int_0^s\mu(\tau)d\tau}ds\cdot\|x(\cdot)-x^*(\cdot)\|_\mu\\&\leqslant\frac{1}{3}e^{3\int_0^t\mu(\tau)d\tau}\|x(\cdot)-x^*(\cdot)\|_\mu,\end{aligned}$$

从而

$$\|T_n^\delta x-T_n^\delta x^*\|_\mu\leqslant\frac{1}{3}\|x-x^*\|_\mu\leqslant\frac{\lambda_1}{3}. \tag{12}$$

因此

$$\begin{aligned}&\|(U_n^\delta x)(\cdot)-x^*(\cdot)\|_\mu\\&\quad\leqslant\|(T_n^\delta x(\cdot)-(T_n^\delta x^*)(\cdot)\|_\mu+\|(T_n^\delta x^*)(\cdot)-(T_n^0x^*)(\cdot)\|_\mu+\|f_\delta(\cdot)-f_0(\cdot)\|_\mu\\&\quad\leqslant\frac{\lambda_1}{3}+\frac{\lambda_1}{3}+\frac{\lambda_1}{3}\leqslant\lambda_1.\end{aligned} \tag{13}$$

这证明了算子 U_n^δ 是闭球 $S_{\lambda_1}(x^*(\cdot),\ \mu)$ 到自身的算子. 类似地可证明对一切 $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)\in S_{\lambda_1}(x^*(\cdot),\ \mu)$ 有

$$\|(U_n^\delta x_1)(\cdot)-(U_n^\delta x_2(\cdot)\|_\mu\leqslant\frac{1}{3}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_\mu, \tag{14}$$

即 U_n^δ 是压缩算子, 从而存在唯一的不动点 $x_n^\delta(\cdot)\in S_{\lambda_1}(x^*(\cdot),\ \mu)$, 使 $x_n^\delta(t)=(U_n^\delta x_n^\delta)(t)$, $t\in[0,\ T]$, 条件只是 $0\leqslant\delta\leqslant\delta_0$. 另外

$$\|x_n^\delta(t)-x^*(t)\|_X<\varepsilon,$$

ε 可以任意小, 只要 δ 充分小. 证毕.

引理 2 设 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$, 记 $x^*(t)=x(t,\ u^*(\cdot))\ (t\in[0,\ T])$. 对任意一个 $u(\cdot)\in\mathscr{F}$ 及 $\delta\in[0,\ 1]$ 定义"控制变分" $u_n^\delta(t)$ 如下

$$u_n^\delta(t)=\begin{cases}u(t),\ t\in E_n^\delta,\\u^*(t),\ t\in[0,\ T]\setminus E_n^\delta,\end{cases} \tag{15}$$

这里 $E_n^\delta=\bigcup_{k=0}^{n-1}\left[\frac{T}{n}k,\ \frac{T}{n}(k+\delta)\right]$, $n=1,\ 2,\ \cdots$ 那末对充分小的 $\delta>0$ 有 $u_n^\delta(\cdot)\in U_{ad}$, 即

$u_n^\delta(\cdot)\in\mathscr{F}$ 且(1-8)的解 $x_n^\delta(t)\overset{\text{def.}}{=\!=}x(t,\ u_n^\delta(\cdot))$ 在$[0,\ T]$上存在且

$$\max_{\substack{t\in[0,T]\\ n=1,2,\cdots}}\|x_n^\delta(t)-x^*(t)\|_X\to 0\quad(\delta\to+0). \tag{16}$$

证　在引理1中，取 $K_\delta(t,\ s,\ x,\ n)=G(t,\ s)f(s,\ x,\ u_n^\delta(s))$，$f_\delta=h(t)$，那末从上节的三个假定1°—3°毫无困难的可验证本节关于f_δ与K_δ的三个条件满足，　证毕．

我们知道$x(t)$的抽象线性 Volterra 方程

$$x(t)=G(t,\ \tau)x+\int_\tau^t G(t,\ s)f_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))x(s)ds \tag{17}$$

对一切$x\in X$，$u^*(\cdot)\in U_{ad}$ 在$T\geqslant t\geqslant\tau\geqslant 0$上存在唯一关于$t$，$\tau$连续的解，引用上节(9)式的记号$U(t,\ \tau)$，则这个解可表成$x(t)=U(t,\ \tau)x$，其中$U(t,\ \tau)\in\mathscr{L}(X)$，关于$t$，$\tau$在$T\geqslant t\geqslant\tau\geqslant 0$上强连续．记

$$\begin{aligned}&\psi(t,\ \tau,\ n)=U(t,\ \tau)f(\tau,\ x^*(\tau),\ u),\\ &(\Delta x)(t)=\int_0^t\psi(t,\ \tau,\ u(\tau))d\tau-\int_0^t\psi(t,\ \tau,\ u^*(\tau))d\tau,\end{aligned} \tag{18}$$

其中$u(\cdot)\in\mathscr{F}$．可以证明：

引理3　若$u^*(\cdot)\in U_{ad}$，则$(\Delta x)(t)$是下列抽象线性 Volterra 方程的在$[0,\ T]$上唯一连续解

$$\begin{aligned}(\Delta x)(t)=&\int_0^t G(t,\ s)f_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\Delta x)(s)ds\\ &+\int_0^t[K(t,\ s,\ u(s))-K(t,\ s,\ u^*(s))]ds,\end{aligned} \tag{19}$$

这里$u(\cdot)\in\mathscr{F}$任意，$K(t,\ s,\ u)\overset{\text{def.}}{=\!=}G(t,\ s)f(s,\ x^*(s),\ u)$．

证　(19)的解存在且唯一由抽象 Volterra 方程理论来保证，我们仅需验证(18)定义的$(\Delta x)(t)$确是解．

$$\begin{aligned}&\int_0^t G(t,\ s)f_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\Delta x)(s)ds\\ &=\int_0^t ds\int_0^s d\tau\, G(t,\ s)f_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\psi(s,\ \tau,\ u(\tau))-\psi(s,\ \tau,\ u^*(\tau)))\\ &=\int_0^t d\tau\int_\tau^t ds\, G(t,\ s)f_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))U(t,\ s)[f(\tau,\ x^*(\tau),\ u(\tau))\\ &\quad-f(\tau,\ x^*(\tau),\ u^*(\tau))]\\ &=\int_0^t d\tau[U(t,\ \tau)-G(t,\ \tau)][f(\tau,\ x^*(\tau),\ u(\tau))-f(\tau,\ x^*(\tau),\ u^*(\tau))]\\ &=(\Delta x)(t)-\int_0^t[K(t,\ \tau,\ u(\tau))-K(t,\ \tau,\ u^*(\tau))]d\tau,\end{aligned}$$

其中用过上节(9)式．　证毕．

引理4　在引理2、3的条件与记号下，必存在一个自然数$n(\delta)$，记$x^\delta(t)\overset{\text{def.}}{=\!=}x_{n(\delta)}^\delta(t)$，则在$[0,\ T]$上关于$t$一致成立极限关系

$$\frac{x^\delta(t)-x^*(t)}{\delta}\Longrightarrow(\Delta x)(t)\quad(\delta\to+0) \tag{20}$$

及

$$\frac{1}{\delta}\int_0^T [J(s, x^*(s), u(s))-J(s, x^*(s), u^*(s))]e^\delta(s)ds\to 0 \quad (\delta\to+0), \tag{21}$$

其中

$$e^\delta(s)=\begin{cases}1-\delta, & s\in E^\delta_{n(\delta)},\\ -\delta, & s\in[0, T]\setminus E^\delta_{n(\delta)}.\end{cases} \tag{22}$$

证 令

$$e^\delta_n(s)=\begin{cases}1-\delta, & s\in E^\delta_n,\\ -\delta, & s\in[0, T]\setminus E^\delta_n.\end{cases}$$

显然对一切$t\in[0, T]$和$\delta\in[0, 1]$有$\left|\int_0^t e^\delta_n(s)ds\right|\leqslant\frac{T}{n}\to 0(n\to+\infty)$. 但

$$y(s)\xlongequal{\text{def.}}J(s, x^*(s), u(s))-J(s, x^*(s), u^*(s))\in L_1([0, T], X)$$

因此

$$\int_0^T y(s)e^\delta_n(s)ds\to 0 \quad (n\to+\infty). \tag{23}$$

从而存在一个自然数$n_1(\delta)$, 当$n\geqslant n_1(\delta)$时

$$\left\|\int_0^T y(s)e^\delta_n(s)ds\right\|_X<\delta^2. \tag{24}$$

记

$$I_1=\frac{1}{\delta}\int_0^t G(t, s)[f(s, x^*(s), u^\delta_n(s))-f(s, x^*(s), u^*(s))]ds,$$

$$I_2=\frac{1}{\delta}\int_0^t G(t, s)[f(s, x^\delta_n(s), u^\delta_n(s))-f(s, x^*(s), u^\delta_n(s))]ds,$$

则

$$\frac{x^\delta_n(t)-x^*(t)}{\delta}=I_1+I_2. \tag{25}$$

先来估计I_1. 根据$u^\delta_n(s)$的定义

$$I_1=\frac{1}{\delta}\int_{[0,t]\cap E^\delta_n} G(t, s)[f(s, x^*(s), u(s))-f(s, x^*(s), u^*(s))]ds$$

$$=\frac{1}{\delta}\int_0^t z(t, s)(\delta+e^\delta_n(s))ds,$$

其中已记$z(t, s)=G(t, s)[f(s, x^*(s), u(s))-f(s, x^*(s), u^*(s))]$, 在[15]可断言对每个固定的$\delta$, 有关于$t\in[0, T]$一致的极限

$$\int_0^t z(t, s)e^\delta_n(s)ds \rightrightarrows 0 \quad (n\to+\infty).$$

因此存在自然数$n_2(\delta)$, 当$n\geqslant n_2(\delta)$时有

$$\left\|\int_0^t z(t, s)e^\delta_n(s)ds\right\|\leqslant\delta^2. \tag{27}$$

记$n(\delta)=\max(n_1(\delta), n_2(\delta))$, $u^\delta(t)=u^\delta_{n(\delta)}(t)$, $x^\delta(t)=x^\delta_{n(\delta)}(t)$, $(\Delta x)(t, \delta)=\frac{x^\delta(t)-x^*(t)}{\delta}$以及$x^\delta(t, \lambda)=x^*(t)+\lambda(x^\delta(t)-x^*(t))$, 其中$0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

根据引理2, $x^\delta(t, \lambda)\rightrightarrows x^*(t)\ (\delta\to+0)$, 于是当$\delta$充分小时$x^\delta(t, \lambda)\in G$, 这时$I_2$可写成

$$I_2=\int_0^T ds\int_0^1 G(t, s)f_x(s, x^\delta(s, \lambda), u^\delta(s))(\Delta x)(s, \delta)d\lambda. \tag{28}$$

从(24)—(28)可得到

$$(\Delta x)(t,\ \delta)=\int_0^t ds\,G(t,\ s)\int_0^1 f_x(s,\ x^\delta(s,\ \lambda),\ u^\delta(s))(\Delta x)(s,\ \delta)d\lambda$$
$$+\int_0^t z(t,\ s)ds+O(\delta). \tag{29}$$

这里$\|o(\delta)\|_X\leqslant 2\delta$. 在引理1中，令

$$f_\delta(t)=\int_0^t z(t,\ s)ds+O(\delta)\equiv\int_0^t z(t,\ s)ds+\frac{1}{\delta}\int_0^t z(t,\ s)e^\delta(s)ds,$$
$$K_\delta(t,\ s,\ x)=G(t,\ s)\int_0^1 f_x(s,\ x^\delta(s,\ \lambda),\ u^\delta(s))x\,d\lambda, \tag{30}$$

那末 $\delta=0$, $f_0(t)=\int_0^t z(t,\ s)ds$, $K_0(t,\ s,\ x)=G(t,\ s)f_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))$, 按(19)式, $(\Delta x)(t,\ 0)=(\Delta x)(t)$. 由(30)式定义的$f_\delta$与$K_\delta$满足引理1的条件1°—3°, 因此从引理1可断言对充分小的$\delta>0$, $\Delta x(t,\ \delta)$也在$[0,\ T]$上存在且(20)式成立. (21)式从(24)式代入$n=n(\delta)$

$$\left\|\frac{1}{\delta}\int_0^T y(s)e^\delta(s)ds\right\|_X<\delta$$

可推出.

三、最大原理的证明

定理2(整体变分不等式)　如果$u^*(\cdot)$是$x^*(\cdot)$(1—8)系统在指标(1—5)下的最优控制和最优轨道，那末对一切$u(\cdot)\in\mathscr{F}$(不仅仅$u(\cdot)\in U_{ad}$)满足变分不等式

$$\int_0^T J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\Delta x)(s)ds\geqslant\int_0^T[-J(s,\ x^*(s),\ u(s))+J(s,\ x^*(s),\ u^*(s))]ds. \tag{1}$$

$(\Delta x)(t)$的定义见(1—9)、(2—18).

证　有

$$0\leqslant\frac{Q(u^\delta)-Q(u^*)}{\delta}=I_3+I_4, \tag{2}$$

其中

$$I_3\overset{\text{def.}}{=\!=}\frac{1}{\delta}\int_0^T[J(s,\ x^\delta(s),\ u^\delta(s))-J(s,\ x^*(s),\ u^\delta(s))]ds, \tag{3}$$
$$I_4\overset{\text{def.}}{=\!=}\frac{1}{\delta}\int_0^T[J(s,\ x^*(s),\ u^\delta(s))-J(s,\ x^*(s),\ u^*(s))]ds, \tag{4}$$

先来估计I_3

$$\Delta_1\overset{\text{def.}}{=\!=}\left\|I_3-\int_0^T J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\Delta x)(s)ds\right\|_X$$
$$\leqslant\int_{E^\delta_{n(\delta)}}\left\|\frac{J(s,\ x^\delta(s),\ u(s))-J(s,\ x^*(s),\ u(s))}{\delta}-J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\Delta x)(s)\right\|_X ds$$
$$+\int_0^T\left\|\frac{J(s,\ x^\delta(s),\ u^*(x))-J(s,\ x_*(s),\ u^*(s))}{\delta}-J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\Delta x)(s)\right\|_X ds.$$

从引理2和4知对充分小的$\delta>0$, $x^\delta(t)$在$[0,\ T]$上存在且

$$x^\delta(t)=x^*(t)+\delta\cdot(\Delta x)(t)+O(\delta), \tag{5}$$

$\|O(\delta)\|_X \leqslant \delta$. 于是从第一节假设2°知对$u^*(\cdot)$和固定的$u(\cdot)\in\mathscr{F}$存在$\mu(\cdot)\in L_1[0,T]$，在$\delta>0$充分小时

$$\left\|\frac{J(s,\ x^\delta(s),\ v(s))-J(s,\ x^*(s),\ v(s))}{\delta}\right\|_X$$

$$=\left\|J_x(s,\ x^*(s)+\theta(s)(x^\delta(s)-x^*(s)),\ v(s))\cdot\frac{x^\delta(s)-x^*(s)}{\delta}\right\|_X\leqslant\mu(s),$$

这里$v(s)=u(s)$及$u^*(s)$，$0<\theta(s)<1$，又

$$\frac{J(s,\ x^\delta(s),\ u^*(s))-J(s,\ x^*(s),\ u^*(s))}{\delta}\to J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\varDelta x)(s)\quad(\delta\to+0)$$

及

$$\operatorname{mes}E^\delta_{n(\delta)}=T\delta\to 0\quad(\delta\to+0).$$

因此根据Lebesgue控制收敛定理

$$\varDelta_1\to 0\quad(\delta\to+0),$$

即

$$\lim_{\delta\to+0}I_3=\int_0^T J_x(s,\ x^*(s),\ u^*(s))(\varDelta x)(s)ds. \tag{6}$$

又对I_4

$$I_4=\frac{1}{\delta}\int_{E^\delta_{n(\delta)}}y(s)\,ds=\int_0^T y(s)ds+\frac{1}{\delta}\int_0^T y(s)\theta^\delta(s)ds\to\int_0^T y(s)ds\quad(\delta\to+0), \tag{7}$$

其中$y(\cdot)$定义见(2-23)式上一行. 从(2)—(7)可得变分不等式(1).

定理1的证明　将(2-18)定义的$(\varDelta x)(t)$代入变分不等式(1)并引入(1—11, 12)所定义的$H(t,\ u)$得

$$\int_0^T H(s,\ u(s))ds\leqslant\int_0^T H(s,\ u^*(s))ds, \tag{8}$$

(8)式中代入$u(s)=\begin{cases}u,\ s\in[\alpha,\ \beta],\\ u^*(s),\ \text{其它点},\end{cases}$ 这里$u\in U$, α, $\beta\in[0,\ T]$, $\alpha\leqslant\beta$

$$\int_\alpha^\beta H(s,\ u)ds\leqslant\int_\alpha^\beta H(s,\ u^*(s))ds.$$

因为α, β任意，故对$u^*(s)$的近似连续点t上有

$$H(t,\ u)\leqslant H(t,\ u^*(t)).$$

但$u^*(t)\in U$故

$$\max_{u\in U}H(t,\ u)=H(t,\ u^*(t))$$

由于$u^*(t)$是可测函数，故它的近似连续点在$[0,\ T]$有全测度.

本文得到李大潜教授，李训经付教授的指导，另外Lions, J. L. 也提了很好的建议使本文生色不少，在此一并表示感谢.

参 考 文 献

[1] Banks, H. T. and Kunisch, K., An Approximation Theory for Nonlinear Partial Differential Equations with Application to Identification and Control, *LCDS Report*, **4**(1981), 81—7.

[2] Ball, J. M. and slemrod, M. Feedback stabilization of Distributed Semilnear Control Systems, *Appl. Math. Optim.*, **5**(1979), 169—179.

[3] Ball, J· M. and Slemrod, M., Nonharmonic Fourier Series and the Sabilizaltion of Distributed Semi-Linear Control Systems, *Communications on Pure and Appl. Math.*, **XXX 11** (1979), 555—587.

[4] Balakrishnan, A. V., Applied Functional Analysis, *Appl. Math.*, Springer, New York, **3** (1976).

[5] Ball, J₁ M., Strongly continuous semigroup, weak solution, and the variation of constants formula, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **63** (1977), 370—373.

[6] Lions, J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, springar-verlag, 1971.

[7] Lions, J. L., Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control.

[8] Curtain, R. F., and Pritchard, A. J., Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag., **8** (1978).

[9] 李训经,向量测度在分布参数系统最优控制理论中的应用,数学年刊, **3**:5(1982).

[10] 李训经、姚允龙,向量测度在最优控制理论中的应用,(未发表).

[11] Yosida, Functional Analysis, pp. 438—445.

[12] Kato, T., 巴拿赫空间与希尔伯特空间中的抽象抛物型发展方程,数学译丛, **6**(1964).

[13] 李训经, Banach 空间中的发展方程, 数学年刊, **2**: 3 (1981).

[14] Fattorsni, H. O., Ordinary Differential Equations in Linear Topological Spaces, *J. D. E.*, **5** (1968), 72—105.

[15] 姚允龙,向量测度与分布系统的最大原理,中国科学,A 辑,7(1982).

[16] 李训经、姚允龙,分布参数系统的时间最优控制,中国科学, (1980), 619—627.

[17] Li Xunjing(李训经) & Yao Yunlong(姚允龙),On optimal control for Distributed Parameter Systems, *Proc. 8th IFAC World Congress, Kyoto*, 1981.

MAXIMUM PRINCIPLE OF SEMI-LINEAR DISTRIBUTED SYSTEM (I)

YAO YUNLONG
(*Institute of Mathematics, Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper, an optimal control problem of non-linear Volterra systems $x(\cdot) = h(t)+\int_0^t G(t, s)f(s, x(s), u(s))ds$ on Banach space X with a general cost functional $Q(u(\cdot))=\int_0^T J(s, x(s, u(\cdot)), u(s))\,ds$ is discussed, where $G(t, s)\in\mathscr{L}(X)$ is strongly continuous in (t, s), $h(\cdot)\in C([0, T], G)$, $f(s, x, u)$: $[0, T]\times X\times U\mapsto X$ and $J(s, x, u)$: $[0, T]\times X\times U\mapsto R$. The control region U is an arbitrary set in a Banach space. Under some other assumptions of f and J, we have proved the following

Theorem. The optimal control $u^*(\cdot)$ of the above problem satisfies

$$\max H(t, u)=H(t, u^*(t)) \text{ for a. e. } t\in[0, T],$$

Where
$$H(t, u)=-J(t, x^*(t), u)+(\psi(t), f(t, x^*(t), u)),$$

$$\psi(t)=-\int_t^T J_x(s, x^*(s), u^*(s))U(s, t)ds$$

and $x^*(t)=x(t, u^*(\cdot))$, $U(s, t)\in\mathscr{L}(X)$ is the solution of

$$U(s, t)=G(s, t)+\int_t^s G(s, w)f_x(w, x^*(w), u^*(w))U(w, t)dw.$$

We have applied the results to semi-linear distributed systems.