数 学 年 刊
3 (6) 1982

一类二次微分系统的极限环的不存在性

王明淑　　林应举
（南京大学）

本文证明二次微分系统

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by), \tag{1}$$

在三阶细焦点外围不存在极限环.

设 $O(0,\ 0)$ 是(1)的三阶细焦点. 据[1]可推出 $m=5a,\ b=3l$, 因此(1)写为

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+5axy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+3ly). \tag{1'}$$

研究系统(1′)在 O 点外围极限环的存在问题可化为 Van der Pal 型方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y \tag{2}$$

在奇点(1, 0)外围极限环的存在问题, 其中

$$\begin{aligned} g(x)&=x^{-3}(x-1)[3x(x+4)+\delta(6x-1)], \\ f(x)&=-x^{-2}(x-1)(x+4), \end{aligned} \tag{3}$$

这里参数 $\delta=(5a^2-3l^2)/l^2$.

事实上, 可作如下的变换将(1′)化为形如(2)的系统

令 $x_1=\frac{5a}{l}x-\frac{1}{l},\ y_1=l+5alx+25a^2y,\quad \tau=\frac{t}{5a}$, 系统(1′)化为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau}&=1+x_1y_1, \\ \frac{dy_1}{d\tau}&=a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}y_1+a_{20}x_1^2+a_{11}x_1y_1 \end{aligned} \tag{4}$$

或等价方程

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}y_1+a_{20}x_1^2+a_{11}x_1y_1}{1+x_1y_1}, \tag{5}$$

其中 $a_{00}=30a^2-5l^2,\ a_{10}=l(35a^2-9l^2),\ a_{01}=3l,\ a_{20}=l^2(5a^2-3l^2),\ a_{11}=4l^2$. 点 $\left(-\frac{1}{l},\ l\right)$ 是系统(4)的奇点, y_1 轴是无切直线, 极限环不能与其相交.

令 $x=-\frac{1}{lx_1},\ y=-\frac{x_1y_1+1}{lx_1}$ 可化为方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{x^3y}[x(x+4)(y-3)-\delta(6x-1)]. \tag{6}$$

与(6)等价的方程组就是系统(2).

本文1980年3月7日收到, 1982年3月29日收到修改稿.

$x=0$ 是系统(2)的积分线，因此(1, 0)外围如有极限环，必位于 $x>0$ 的半平面内。系统(2)的零等倾线有两个分支：一为直线 $x=1$，一为曲线 L

$$y=h(x)=3+\frac{\delta(6x-1)}{x(x+4)}.$$

这曲线以 $x=-4$, $x=0$, $y=3$ 为渐近线。当 $\delta<0(\delta>0)$ 时它在 $x=1$ 处有极小(极大)值 $y=3+\delta$，在 $x=-\frac{2}{3}$ 处有极大(极小)值 $y=3+\frac{45}{20}\delta$(见图 1，图 2).

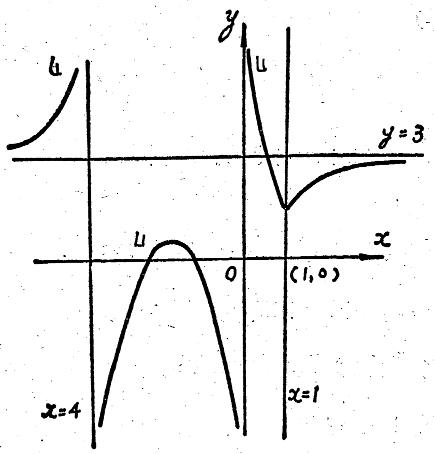

图 1

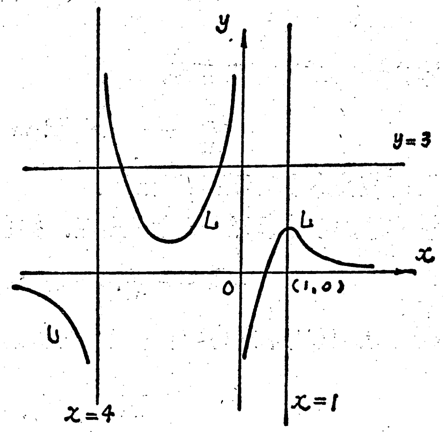

图 2

注意，在 $\delta<0$ 时须有 $\delta>-3$，不然系数 a 非实数。图 1 是对应于 $\delta>-\frac{4}{3}$ 的情形。图 2 是对应于 $\delta>0$ 的情形。

定理 1 系统(2)在(1, 0)外围不存在极限环。

证 由(3)式可得

$$F(x)=\int_1^x f(x)dx=-\left(x+3\ln x+\frac{4}{x}-5\right),$$

$$G(x)=\int_1^x g(x)dx=3F(x)+\delta\left(6\ln x+\frac{7}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{13}{2}\right).$$

因为 $-3<\delta<0$，故当 $x>\frac{1}{6}$ 时，有 $3x(x+4)+\delta(6x-1)>3(x-1)^2\geqslant 0$，而当 $0<x\leqslant\frac{1}{6}$ 时，不等式 $3x(x+4)+\delta(6x-1)\geqslant 0$ 显然成立，因此，在 $x>0$ 的区域内，有

$$(x-1)g(x)>0, \text{ 当 } x\neq 1.$$

作 Филиппов 变换 $z=\int_1^x g(x)dx$ 系统(2)化为

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_1(z)-y}, \tag{7_1}$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_2(z)-y}, \tag{7_2}$$

其中方程(7_1)对应于(6)在 $x\geqslant 1$ 的部分，方程(7_2)对应于(6)在 $0<x\leqslant 1$ 的部分。

如果 $y=F_1(z)$ 与 $y=F_2(z)$ 在区域

$0<z\leqslant \min\left(\int_1^{x_0} g(x)dx,\ \int_1^M g(x)dx\right)$ 内仅有一个公共点(0, 0) 则系统 (2) 在 $x_0\leqslant x\leqslant M$ 内无环[2], 其中 M 为某一充分大的数, x_0 为奇点坐标或某一充分小的数. 为此只须证明方程组

$$\begin{cases} F(x_1)=F(x_2), \\ f(x_1)/g(x_1)=f(x_2)/g(x_2). \end{cases} \tag{8}$$

在区域 $1\leqslant x_1\leqslant M$, $x_0\leqslant x_2\leqslant 1$ 内仅有唯一的解 $x_1=x_2=1$.

方程组(8)可写为

$$x_1-x_2+3\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{4}{x_1x_2}(x_2-x_1)=0, \tag{9.1}$$

$$6x_1x_2-(x_1+x_2)-4=0. \tag{9.2}$$

由(9.2)得 $x_2=(x_1+4)/(6x_1-1)$ 代入(9.2)得

$$H(x_1)=\frac{2(3x_1^2-x_1-2)(-x_1^2+20x_1-4)}{x_1(6x_1-1)(x_1+4)}-3\ln\frac{x_1(6x_1-1)}{x_1+4}$$

如果 $x\geqslant 1$ 时, $H(x_1)$ 除 $x_1=1$ 外无其它零点, 则方程组(9)只有一组解 $x_1=x_2=1$. 下面证明当 $x_1\neq 1$ 时 $H(x_1)\neq 0$.

为此令 $x_1=1+\lambda$ 得

$$H(\lambda)=H_1(\lambda)-H_2(\lambda),$$

其中

$$H_1(\lambda)=\frac{2(3\lambda^2+5\lambda)(-\lambda^2+18\lambda+15)}{(1+\lambda)(6\lambda+5)(\lambda+5)},$$

$$H_2(\lambda)=3\ln\frac{(\lambda+1)(6\lambda+5)}{\lambda+5}.$$

当 $\lambda=0$ 时 $H(\lambda)=0$. 对 λ 求导数有

$$H_1'(\lambda)=\frac{1}{(1+\lambda)^2(6\lambda+5)^2(\lambda+5)^2}[-36\lambda^6-492\lambda^5+1318\lambda^4+9360\lambda^3+17400\lambda^2+13500\lambda+3750],$$

$$H_2'(\lambda)=\frac{1}{(1+\lambda)^2(6\lambda+5)^2(\lambda+5)^2}[108\lambda^5+1818\lambda^4+9360\lambda^3+17400\lambda^2+13500\lambda+3750].$$

相减得

$$H'(\lambda)=H_1'(\lambda)-H_2'(\lambda)=\frac{-2\lambda^4}{(1+\lambda)^2(6\lambda+5)^2(\lambda+5)^2}(18\lambda^2+300\lambda+250).$$

由此可见 $\lambda>0$ 时恒有 $H'(\lambda)<0$, 所以当 $\lambda>0$ 时必有 $H(\lambda)\neq 0$. 证毕.

对应到系统(1)有

定理 2 系统(1)在三阶细焦点外围不存在极限环.

参考文献

[1] 叶彦谦, 极限环论, 上海科学技术出版社, 1965.
[2] Черкас, Л. А., Жилевич, Л. И., *Дифф. Урав.*, **2** (1972), 2071—2278.

THE NON-EXISTENCE OF LIMIT CYCLE OF SOME QUADRATIC DIFFERENTIAL SYSTEM

WANG MINGSHU LIN YINGJU
(*Nanjing University*)

ABSTRACT

In this paper, we consider the system

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+5axy,\ \frac{dy}{dt}=x(1+ax+3ly) \tag{1}$$

which has a fine focus of the third order $O(0, 0)$.

We prove the following

Theorem. No limit cycle of system (1) can exist in the neighborhood of $O(0, 0)$.

In fact, using a few transformations. we can change system (1) into the Van Der Pol's system

$$\frac{dx}{dt}=-y,\ \frac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y, \tag{2}$$

where
$$g(x)=x^{-3}(x-1)[3x(x+4)+\delta(6x-1)],$$
$$f(x)=-x^{-2}(x-1)(x+4),\ \delta=(5a^2-3l^2)/l^2$$

Hence the problem of the existence or non-existence of limit cycle for system (1) around O changes into that for system (2) around $(1, 0)$.

Again through Филиппов transformation, we arrive at the following system

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_1(z)-y},\ \frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_2(z)-y},$$

where

$$\int_1^x f(\xi)d\xi=F(x)=F_1(z),\ (x>1);$$
$$\int_1^x f(\xi)d\xi=F(x)=F_2(z),\ (0<x<1)$$

It is proved that the algebraic equations

$$F(x_1)=F(x_2),\ \frac{f(x_1)}{g(x_1)}=\frac{f(x_2)}{g(x_2)}$$

has a unique solution $x_1=x_2=1$ in $1\leqslant x_1\leqslant M$, $x_0\leqslant x_2\leqslant 1$, this implies that system (2) has no limit cycle around $(1, 0)$.