数 学 年 刊
3 (6) 1982

在非古典变分场中的非线性 Klein-Gordon 方程的某些性质

张 学 铭
（浙江大学）

本文讨论了相对论性的非线性 Klein-Gordon 方程的相互作用项的性质，证明它在非古典变分场中应具有的变号系统的特性．同时并证明 I. Segal 所讨论的三阶 Klein-Gordon 方程中系数 g 的恒正性是不完全正确的．本文对所得到的结果从物理意义上也作了明确的说明．

§1. 引 言

在[1]中我们讨论了非相对论性的非线性波动力学的某些问题．这里是继续[1]的工作，进一步讨论在相对论情形下的一些问题．这里所用的方法是非古典变分方法；而把所讨论的动力体系置于作者所建立的非古典变分场[2]中，这和作者在[3]中所处理的方法是类似的．

我们知道 I. Segal[4] 曾用非线性半群方法研究了相对论性的粒子自旋为零的非线性 Klein-Gordon 方程解的存在性和唯一性；即

$$\Box u=F(u) \tag{1.1}$$

和它的特殊类型

$$\Box u=ku+gu^3 \tag{1.2}$$

在 Lipschitzian 扰动下的局部解的存在性和唯一性．这里 $\Box$ 表 D'Alemberlian 算符，F 表相互作用项．而 k 和 g 在 Segal 的著作中均假定为正的常数，同时该方程具有 Lorentz 协变性．

本文的内容主要是研究 (1.1) 和 (1.2) 在相对论情形下，受到宇宙势[2] (cosmos potential) 作用下所得到的主要结果．

1.1 问题的叙述

首先将(1.1)化为一阶二维向量系统．设

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=u_2, & (1.3)\\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=c^2\nabla^2u_1-c^2F(u_1,\ u_2). & (1.4)\end{cases}$$

本文 1980 年 4 月 8 日收到，1982 年 4 月 1 日收到修改稿．

令
$$\boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}u_1(t,\ \boldsymbol{x})\\ u_2(t,\ \boldsymbol{x})\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ c^2\nabla^2 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x}))=\begin{bmatrix}0\\ -c^2F(\boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x}))\end{bmatrix},$$
则(1.3)—(1.4)变为
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}). \tag{1.5}$$
于是,我们提出如下的问题(简称问题(A)):
$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})\delta(t-\bar{t},\ \boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}),\ (\bar{t},\ \bar{\boldsymbol{x}})\in[t_0,\ T]\times\Omega, & (1.6)\\ \boldsymbol{u}(t_0,\ \boldsymbol{x})=0(\text{或 }\boldsymbol{u}(t_0,\ \boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})), & (1.7)\\ \boldsymbol{S}_x\boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x}_b)=0,\ \boldsymbol{x}_b\in\partial\Omega\ (\partial\Omega\text{ 表 }\Omega\text{ 的边界}), & (1.8)\\ \boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}(t_0,\ \boldsymbol{x}),\ t_0]=\min\limits_{\boldsymbol{V}\in\mathscr{V}}\displaystyle\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega}f^0(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}))dt\,d\Omega. & (1.9)\end{cases}$$
问题(A)的说明:

(i) $\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})^*$ 表宇宙势函数类,其值域为 $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}$ 表豪士道夫(Hausdorff)空间中的闭集,且 $\boldsymbol{V}$ 为有界可测函数,它满足
$$|\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x}))|\leqslant 1. \tag{1.10}$$
在一般现代的量子场论中 $\boldsymbol{V}$ 在系统(1.6)中表示瞬时相互作用.

(ii) $(\bar{t}\pm\varepsilon,\ \bar{\boldsymbol{x}}\pm\varepsilon)\in[t_0,\ T]\times\Omega$, 表示某一微小时空奇异区. $\boldsymbol{S}_x$ 表对 $\boldsymbol{x}$ 的线性微分算子.

(iii) f^0 表示有关的已知的物理量的函数, 如拉氏函数密度, 以及其他应满足极值约束的诸物理量函数,如最慢衰减振荡和短程波等.

(iv) 问题(A)有解的意义, 是说可以在宇宙势函数类中找到一个宇宙势函数, 使粒子在微小奇异区内的行为可以由找到的相应的(1.6)—(1.8)的 $\boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x})$ 来刻划, 并满足(1.9).

(v) 若 $f^0=\delta(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$, 则(1.9)表示最长时间.

1.2 主要结果

现将我们所得到的主要结果,以定理形式叙述如下:

定理 1 设描写在相对论情形下微小空间奇异区内非线性波动力学系统为:
$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})\delta(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}),\ (t,\ \boldsymbol{x})\in[t_0,\ T]\times\Omega,\ |\boldsymbol{V}|\leqslant 1, & (1.11)\\ \boldsymbol{u}(t_0,\ \boldsymbol{x})=0(\text{或 }\boldsymbol{u}(t_0,\ \boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})), & (1.12)\\ \boldsymbol{S}_x\boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x}_b)=0, & (1.13)\\ \boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}\ (t_0,\ \boldsymbol{x}),\ t_0]=\displaystyle\iiint_{\Omega}[\alpha(T,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})+\beta(T,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}_t)]d\Omega & \\ \qquad\qquad+\displaystyle\int_{t_0}^{T}\iiint_{\Omega}f^0(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x})))d\Omega dt & \\ \qquad\qquad=\min\limits_{\boldsymbol{V}\in\mathscr{V}}. & (1.14)\end{cases}$$

若 $\boldsymbol{V}$ 满足(1.11)—(1.14),则必满足最大原理．特别当 f^0 不显含 $\boldsymbol{V}$ 时,则有

$$\boldsymbol{V}(t, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)) = \operatorname{sgn}\psi(t, \boldsymbol{x}_0), \tag{1.15}$$

而当 f^0 含有 $\boldsymbol{V}$ 但具有某些特别结构时, $\boldsymbol{V}$ 仍然可表为(包含 $\psi(t, \boldsymbol{x}_0)$在内)符号函数.

其中 $\psi(t, \boldsymbol{x})$由下面系统确定:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}=\dfrac{\partial f^0}{\partial u}, & (1.16)\\ \left.\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right|_{t=T}=-\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=T}, & (1.17)\\ \left.\dfrac{\partial\beta}{\partial u_t}\right|_{t=T}=\psi|_{t=T}, & (1.18)\\ \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|_S=\Gamma(s). & (1.19)\end{cases}$$

本定理的证明,将应用非古典变分方法来实现．因此,我们在下一节中先讨论波动方程的非古典变分方法.

§2. 关于波动方程的非古典变分

2.1 问题的叙述

设波动力学系统为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=F(t, x_1, x_2, x_3), \tag{2.1}$$

初始条件

$$u(0, x_1, x_2, x_3)=\varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{2.2}$$

$$u_t(0, x_1, x_2, x_3)=\phi(x_1, x_2, x_3), \tag{2.3}$$

边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S=f(s), \tag{2.4}$$

这里 $F(t, x_1, x_2, x_3)$ 为一有界可测函数类．对每一个 $F(t, x_1, x_2, x_3)$ 类中的函数属于 L_2,其值域为 $\mathscr{F}$, (2.1)—(2.4)具有弱解, φ, ϕ 也属于 L_2. $(\{\varphi_n\}, \{\phi_n\})\in(C^2, C^3)$且分别均方收敛于 φ 和 ϕ, 则可知存在解序列 $\{u_n\}$ (对应于 $\{f_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{\phi_n\}$). u 在 S 所包的区域 Ω 内有二阶的逐片微商, 且在闭域 $\bar{\Omega}$ 上一阶导数是连续的．无损于一般性, 令 $\varphi=\phi=f=0$.

设给定泛函——物理量的某种约束泛函为

$$J[u(t, \boldsymbol{x}), t]=\iiint\limits_{\Omega}[\alpha(T, \boldsymbol{x}, u(T, \boldsymbol{x}))+\beta(T, \boldsymbol{x}, u_t(T, \boldsymbol{x}))]\cdot d\Omega$$
$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega} f^0(\tau, \boldsymbol{x}, u(\tau, \boldsymbol{x}), F(\tau, \boldsymbol{x}, u(\tau, \boldsymbol{x})))d\Omega\, d\tau, \tag{2.5}$$

现在问题提为:寻求 $F(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x}))$使(2.1)—(2.4)的解满足

$$J=\min \tag{2.6}$$

2.2 问题的解法

作与原泛函等价的新泛函

$$J^*=\iiint\limits_{\Omega}[\alpha(T,\ \boldsymbol{x},\ u(T,\ \boldsymbol{x}))+\beta(T,\ \boldsymbol{x},\ u_t(T,\ \boldsymbol{x}))]d\Omega$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}f^0(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u(\tau,\ \boldsymbol{x}),\ F(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u(\tau,\ \boldsymbol{x})))d\Omega d\tau$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}\psi(\tau,\ \boldsymbol{x})\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Big\langle(1,\ 1,\ 1),\ \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{x}}\Big\rangle-F(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u)\Big]d\tau\,d\Omega. \tag{2.7}$$

记泛函由于 F 的改变和所引起 $u(t,\ \boldsymbol{x})$ 的改变而导致的泛函改变量为 ΔJ^*

$$\Delta J^*=\iiint\limits_{\Omega}[\alpha(T,\ \boldsymbol{x},\ u(T,\ \boldsymbol{x})+\Delta u(T,\ \boldsymbol{x}))-\alpha(T,\ \boldsymbol{x},\ u(T,\ \boldsymbol{x}))]d\Omega$$

$$+\iiint\limits_{\Omega}[\beta(T,\ \boldsymbol{x},\ u_t(T,\ \boldsymbol{x})+\Delta u_t(T,\ \boldsymbol{x})]-\beta(T,\ \boldsymbol{x},\ u_t(T,\ \boldsymbol{x}))]d\Omega$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}\psi(\tau,\boldsymbol{x})\Big\{\Big[\frac{\partial^2(u+\Delta u)}{\partial t^2}-\Big\langle(1,\ 1,\ 1),\ \frac{\partial^2(u+\Delta u)}{\partial \boldsymbol{x}^2}\Big\rangle-F^*(\tau,\ \boldsymbol{x},u)\Big]$$

$$-\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Big\langle(1,\ 1,\ 1),\ \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{x}^2}\Big\rangle-F(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u)\Big]\Big\}d\Omega d\tau$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}[f^0(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u+\Delta u,\ F^*)-f^0(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u,\ F)]d\Omega d\tau, \tag{2.8}$$

于是有

$$\Delta J^*=\iiint\limits_{\Omega}\Big[\frac{\partial\alpha}{\partial u}\Delta u|_{t=T}+\frac{\partial\beta}{\partial u_t}\Delta u_t|_{t=T}\Big]d\Omega$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}\Big\{\Big[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\Big\langle(1,\ 1,\ 1),\ \frac{\partial^2\psi}{\partial \boldsymbol{x}^2}\Big\rangle\Big]+\frac{\partial f^0}{\partial u}\Big\}\Delta u d\Omega d\tau$$

$$-\iiint\limits_{\Omega}\Big[\psi\ \frac{\partial\Delta u}{\partial t}\Big|_{t=T}-\frac{\partial\psi}{\partial t}\ \Delta u|_{t=T}\Big]d\Omega$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}\psi[F(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u)-F^*(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u)]d\Omega d\tau$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}[f^0(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u(\tau,\ \boldsymbol{x}),\ F^*)-f^0(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u(\tau,\ \boldsymbol{x}),\ F)]d\Omega d\tau$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}[\cdots](\Delta u)^2\,d\Omega\,d\tau+\iiint\limits_{\Omega}[\cdots](\Delta u)^2\,d\Omega$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}[\cdots](\Delta u_t)^2 d\Omega d\tau+o((\Delta u)^2,\ (\Delta u_t)^2)$$

$$+[\text{相应的边界条件项}]. \tag{2.9}$$

当 $\psi(t,\ x)$ 满足(1.16)—(1.19)时,则(2.9)变为

$$\Delta J^*=\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}\{\psi[F(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u)-F^*(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u)]+f^0(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u,\ F^*)-f^0(\tau,\ \boldsymbol{x},\ u,\ F)\}d\Omega d\tau$$

$$+\int_t^T\iiint\limits_{\Omega}[\cdots](\Delta u)^2 d\Omega d\tau+\iiint\limits_{\Omega}[\cdots](\Delta u)^2 d\Omega$$

$$+\int_t^T\iiint_\Omega[\cdots](\Delta u_t)^2d\tau\, d\Omega+\cdots+o(\varepsilon). \tag{2.10}$$

我们将采用如下的变更函数类 F 的定义

$$F^*(t,\ \boldsymbol{x},\ u)=\begin{cases}F(t,\ \boldsymbol{x},u(t,\ \boldsymbol{x})),\ (t,\ \boldsymbol{x})\in I_i:\ [\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}^i+\sqrt{\varepsilon_i}]\times[t^i,\ t^i+\sqrt{\varepsilon_i}],\\ V_i,\ (t,\ \boldsymbol{x})\in I_i,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N),\end{cases} \tag{2.11}$$

往证

$$\int_0^T\iiint_\Omega(\Delta u)^2dt\,d\Omega=o(\varepsilon), \tag{2.12}$$

$$\iiint_\Omega(\Delta u)^2d\Omega=o(\varepsilon), \tag{2.13}$$

$$\iiint_\Omega(\Delta u_t)^2d\Omega=o(\varepsilon). \tag{2.14}$$

考虑积分

$$K(t)=\iiint_\Omega\Big[\Big\langle\Big(\frac{\partial\Delta u}{\partial t},\frac{\partial\Delta u}{\partial\boldsymbol{x}}\Big),\Big(\frac{\partial\Delta u}{\partial t},\frac{\partial\Delta u}{\partial\boldsymbol{x}}\Big)\Big\rangle\Big]d\Omega, \tag{2.15}$$

从而有

$$\frac{dK(t)}{dt}=2\iint_S\frac{\partial\Delta u}{\partial t}\frac{\partial\Delta u}{\partial\boldsymbol{n}}\Big|_S ds+2\iiint_\Omega\Delta F\frac{\partial\Delta u}{\partial t}d\Omega.$$

由于

$$\frac{\partial\Delta u}{\partial\boldsymbol{n}}\Big|_S=0,$$

所以

$$\iint_S\frac{\partial\Delta u}{\partial t}\frac{\partial\Delta u}{\partial\boldsymbol{n}}\Big|_S dS=0,$$

故得

$$\frac{dK(t)}{dt}=2\iiint_\Omega\Delta F\frac{\partial\Delta u}{\partial s}d\Omega.$$

又因

$$(a,\ b)\leqslant\frac{1}{2}[(a,\ a)+(b,\ b)],$$

其中内积

$$(a,\ b)=\iiint_\Omega ab\,d\Omega,$$

则得

$$\frac{dK(t)}{dt}\leqslant\iiint_\Omega(\Delta F)^2d\Omega+\iiint_\Omega\Big(\frac{\partial\Delta u}{\partial t}\Big)^2d\Omega$$

$$\leqslant\iiint_\Omega(\Delta F)^2d\Omega+K(t). \tag{2.16}$$

利用作者推广了的多重积分 Bellman 不等式[5]，并利用定义(2.11)，可得

$$K(t)\leqslant C\int_0^T\iiint_\Omega(\Delta F)^2d\Omega\,dt=o(\varepsilon). \tag{2.17}$$

再回到(2.16)中前一个不等式，显然有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial t}\right)^2 d\Omega=o(\varepsilon).$$

同样可得

$$\iiint_{\Omega}(\Delta u)^2 d\Omega=o(\varepsilon),$$

$$\int_0^T\iiint_{\Omega}(\Delta u)^2 d\Omega\, dt=o(\varepsilon),$$

将(2.12)，(2.13)和(2.14)代入(2.10)中，由于(2.6)，即 $F(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x}))$ 使泛函达到极小，故泛函改变量 $\Delta J^*>0$；而(2.10)中之第二、第三和第四项均为高阶无穷小量(在 $(t, \boldsymbol{x})\in I_i(i=1, 2, \cdots, N)$ 上)，故必有

$$\begin{aligned}&(\psi(t, \boldsymbol{x})F(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x}))-f^0(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x}), F(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x}))))\\ &\quad=\max_{F^*\in\mathscr{F}}(\psi(t, \boldsymbol{x})F^*(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x}))-f^0(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x}), F^*(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x})))).\end{aligned} \tag{2.18}$$

由(2.18)，当 f^0 不显含 F 时，则得

$$F(t, \boldsymbol{x}, u(t, \boldsymbol{x}))=\operatorname{sgn}\psi(t, \boldsymbol{x}). \tag{2.19}$$

而当 f^0 虽然显含 F，但具有某些结构形式时，F 仍然是(包含有 ψ 在内)符号函数.

这里 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ 是由(1.16)—(1.19)所确定的.

这样一来，我们只要将符号和文字略加手续上改动，定理1便能得到证明.

2.2 定理1的物理意义和例子.

下面，我们将对定理1的物理意义加以说明：

1) 定理1说明相对论非线性波动力学系统在微小时空奇异区中，粒子在满足(1.11)—(1.14)的情况下宇宙势函数 $\boldsymbol{V}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}))$ 必为符号函数，亦即该非线性波动力学系统，的确处于非古典变分场中，而不在 Lagrangian 场中.

2) 这个宇宙势函数的上确界，和玻姆对量子势的估计[6]是一致的，而且更明确.

3) 当 $f^0=\delta(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$ 时，而将 min 换为 max，则此时就反映粒子的"长时"迹径性质. 从而这时粒子衰减的迹径是一条短程线.

系1 若(1.11)的右端不含 $\delta(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$，而是 $\boldsymbol{V}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}))$ 或是 $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}))$，则可将 $\boldsymbol{V}$ 看成是宇宙势函数，定理1仍正确.

系2 关于守恒性质.

按偏微分方程理论，(1.11)—(1.14)的解为

$$\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})=\int_0^t\iiint_{\Omega}\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}; \tau, \xi)\begin{pmatrix}0\\ \pm1\end{pmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})d\Omega\, d\tau=\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}; \bar{t}, \bar{\boldsymbol{x}})\begin{pmatrix}0\\ \pm1\end{pmatrix};$$

同样，其共轭 $\boldsymbol{u}^*$ 为

$$\boldsymbol{u}^*(t, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{G}^*(t, \boldsymbol{x}; \bar{t}, \bar{\boldsymbol{x}})\begin{pmatrix}0\\ \pm1\end{pmatrix}.$$

故有

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}\, d\Omega=0.$$

于是守恒性得证.

下面,我们举一个例子来说明定理 1 的效应.

例子　我们以 I. Segal 所提到的非线性波动力学系统为例, 可以知道当粒子作快速衰减振荡时, g 并不恒为正的常数, 而是 $g=\pm1$.

I. Segal 研究过的系统为

$$\Box\varphi=K\varphi+g\varphi^3. \tag{E$_1$}$$

将它化为二维向量方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial t}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x})\varphi_1^3, \tag{E$_2$}$$

其中

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ c^2\nabla^2-K & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\phi}=\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0\\ g\end{bmatrix}, \tag{E$_3$}$$

初始条件

$$\boldsymbol{\phi}(t_0,\ \boldsymbol{x})=0\quad(\text{或 }\boldsymbol{\phi}(t_0,\ \boldsymbol{x})=\boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x})), \tag{E$_4$}$$

边界条件

$$\boldsymbol{S}_x(t,\ \boldsymbol{x}_b)=0, \tag{E$_5$}$$

泛函指标为

$$\boldsymbol{I}[\boldsymbol{\phi}(t_0,\ \boldsymbol{x}),\ t_0]=\int_{t_0}^{T}\iiint_{\Omega}\delta(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})d\Omega\ dt=\min_{V\in\mathscr{V}} \tag{E$_6$}$$

我们要证明在上述情形下 $g=\pm1$.

事实上,因(E$_2$)中的右端不含有 $\delta(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$,而仅含 $\boldsymbol{V}$; 又由 $\boldsymbol{V}(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x}))$可以是 $\boldsymbol{v}(t,\ \boldsymbol{x})f(\boldsymbol{\phi}(t,\ \boldsymbol{x}))$, 在这里 $f(\boldsymbol{\phi})=\varphi_1^3$. 当假定 $\boldsymbol{v}(t,\ \boldsymbol{x})$ 使 $\boldsymbol{\phi}$ 满足(E$_2$), (E$_4$), (E$_5$) 和(E$_6$)时,这时 φ_1^3 便确定了. 所以应用定理 1, 取 $\boldsymbol{v}(t,\ \boldsymbol{x})=\dfrac{1}{M}\boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x})$, M 为(E$_1$)的齐次式解的上界,于是得

$$\boldsymbol{v}(t,\ \boldsymbol{x})=\frac{1}{M}\boldsymbol{u}(t,\ \boldsymbol{x})=\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{\phi}^*.$$

故

$$\boldsymbol{v}(t,\ \boldsymbol{x})=\pm1.$$

而这里的 $\boldsymbol{v}(t,\ \boldsymbol{x})$和 g 一样均作为 φ_1^3 的系数. 所以我们说, 在粒子作最速衰减振荡时, g 并不能保持恒为正的常数. 也就是说 Segal 的假定不能认为是完全正确的.

参 考 文 献

[1] 张学铭,非线性波动力学研究(I),*山东大学学报*,1 (1979),9—19.
[2] 张学铭,拉格朗日场与非线性波动力学(上),*应用数学与计算数学*,3 (1979),50—63. 本文英文摘要发表于 Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, (1980) 21.
[3] 张学铭,单个电子在电磁场中加速问题,*高能物理与核物理*,4:2 (1980),168—172.
[4] I. Segal, Non-Linear Semi-Groups, *Annals of Mathematics*, **78**: 2 (1963), 339—364.
[5] 张学铭,分布参数系统最佳控制过程数学理论,山东科技出版社,(1980).
[6] Bohm, D. 物理学评论, **84** (1952), 166. (参看周世勋编: *量子力学* (1961). 404.)

SOME PROPERTIES OF NONLINEAR KLEIN-GORDON EQUATION IN THE NON-CLASSICAL VARIATION FIELD

ZHANG XUEMING
(*Zhejiang University*)

ABSTRACT

Using the non-classical variational method, we prove the function of cosmos potential of the non-linear Klein-Gordon equation is a sign-function, and the coefficient g of KGE is not always positive. Furthermore, some more important properties are obtained.