数 学 年 刊
3 (6) 1982

半环的 Jacobson 关系根与 Jacobson 根

厉 立 德
(浙江大学)

Bourne 与 Zassenhaus[1,2], Lizuka[4] 分别定义了半环的 Jacobson 根. 但是刻划关于这种根的半单类的最好结果是 LaTorre[5] 所证明的, Jacobson 根为零的半环"半同构"于本原半环的亚直和. 本文将以定义在半环上的几类特殊的等价关系为基础, 来探讨任意半环的结构. 如我们所熟知, 用本原环的亚直和来代替 Jacobson 半单环, 是对一般环结构的一种很理想的刻划. 本着同样目的, 我们将寻求一种合适的半单半环类. 当然, 它应该有完整的结构. 我们在 § 2 中定义了半环中唯一决定的一个等价关系, 称为半环的 Jacobson 关系根. 它可以通过不同类型的等价关系来刻划; 半环关于它的商半环是"J-关系半单半环"; (即它的 J-关系根只是平凡的相等关系的那种半环) 关于它的一个等价类, 恰与[2]中的半根一致, 也与[4]中的 Jacobson 根一致. 这两个独立的证明也在 § 2 中给出. 进一步, § 3 中给出了 J-关系半单半环的结构: 一个半环是 J-关系半单的当且仅当它同构于完全本原半环的亚直和, 如果所论的半环是环, 则关于 J-关系根的商与关于 Jacobson 根的商一致, 完全本原半环与本原环一致.

§1. 预 备 概 念

本文中的半环 R, 即是所谓的 Hemiring. 它的加法是可交换的, 含有一个零元素. 对于子半环、右(左、双侧)理想、右 R- 半模、子半模的定义也都同前面所述的文章. 如无特别声明, R- 半模 M 均指右 R- 半模 M, 记之以 M_R. 半模 M_R 上的一个等价关系$\sim$称为右 R- 线性的, 如果有

(i) $x\sim y,\ x'\sim y'\Rightarrow x+x'\sim y+y',\ x,\ y,\ x',\ y'\in M$,

(ii) $x\sim y,\ \Rightarrow xr\sim yr,\ \forall r\in R$.

记 x° 为 M 中任意元素 x 所代表的关于$\sim$的等价类,定义 $x^\circ+y^\circ=(x+y)^\circ, x^\circ r=(xr)^\circ$, 则 $M/\sim$作成一个右 R-半模.

定义 1.1 设 R 和 S 是半环, 如果 M 既是右 R- 半模, 又是左 S- 半模, 且 $(sx)r=s(xr)$, $\forall s\in S, r\in R, x\in M$, 则称 M 为 SR- 双半模. SR- 双半模 M 中的一个等价关系称为 SR- 双模关系, 如果它是右 R- 线性的, 又是左 S-线性的.

特别, 半环 R 的任一右理想是一个右 R- 半模, 任一理想是一个 RR- 双半模. 如果$\sim$是半环 R 作为 RR- 双半模的双模关系, 则 $R/\sim$可以以自然方式定义为一个半环, 称为 R 关于$\sim$的商半环, 以 $\bar{R}$ 记之. 本文中所谓半环 R 的一个双模关系都是对 R 作为 RR-

本文 1980 年 7 月 21 日收到.

双半模而言. 加群 M 上的一个等价关系 $\sim$ 称为可消的, 如果有

(iii) $x+w\sim y+z,\ w\sim z\Rightarrow x\sim y,\ x,\ y,\ w,\ z\in M$. 如果已知(i)成立, 则上式可以代之以

(iv) $x+z\sim y+z\Rightarrow x\sim y,\ x,\ y,\ z\in M$.

定义 1.2 半环 R 上的一个等价关系 $\sim$ 称为正则的, 如果在 R 中存在着两个在 $\sim$ 意义下不等价的元素 $e_1,\ e_2$, 使得 $x+e_1x\sim e_2x,\ \forall x\in R$.

记 $E(S)$ 为集合 S 上所有等价关系的集合. $E(S)$ 按 $\leqslant$ 作成一个偏序集. 它有一个最大元 $\pi_1(x\pi_1y,\ \forall x,\ y\in S)$ 和最小元 $\pi_0(x\pi_0y\Leftrightarrow x=y)$. 易知, 若所论集合是双半模(半模), 则 π_1 是双模(线性)的, 且是可消的. 而 π_0 只是双模(线性)的. 半模 M_R 的线性、可消等价关系 σ 称为极大的, 如果 $\sigma\neq\pi_1$, 而且, 若有线性、可消的等价关系 ξ 使 $\sigma<\xi$, 则必 $\xi=\pi_1$.

定义 1.3 称半环 R 上的等价关系 σ 是 W-关系, 如果 σ 是正则的, 而且, 作为 R_R 上的关系, 它是极大的线性可消等价关系.

现在设 f 是集合 S 到集合 S' 上的映射. 定义 S 上的一个等价关系 ρ_f: 对于 $x,\ y\in S$, $x\rho_fy\Leftrightarrow f(x)=f(y)$. 对于 S 上的一个等价关系 σ, 且 $\sigma\geqslant\rho_f$, 我们可以在 S' 中定义一个等价关系 $f[\sigma]$: $x'f[\sigma]y'\Leftrightarrow x\sigma y$, 其中 $x',\ y'\in S'$ 而 $x,\ y$ 分别是它们的原象. 反之, 对于 S' 上的任一等价关系 σ', 可以在 S 上定义一个等价关系 $f^{-1}[\sigma']$: $xf^{-1}[\sigma']y$ 当且仅当 $x'\sigma'y'$, 这里 $x'=f(x),\ y'=f(y)$. 记 $E_f(S)=\{\sigma\in E(S)\mid\sigma\geqslant\rho_f\}$. 从定义易知, f 实际上导出一个从 $E_f(S)$ 到 $E(S)$ 的 1-1 映射, 显然它是保序的.

引理 1.4 设 f 是半环 R 到半环 R' 上的同态, $\sigma\in E_f(R)$ 而 $\sigma'=f[\sigma]$, 则下列结论成立:

(i) σ 是 R-线性的 $\Leftrightarrow\sigma'$ 是 R'-线性的;

(ii) σ 是 RR-双模的 $\Leftrightarrow\sigma'$ 是 $R'R'$-双模的;

(iii) σ 是 R 的 w-关系 $\Leftrightarrow\sigma'$ 是 R' 的 w-关系.

证 (i)与(ii)的证明是简单的, 现证(iii). 设 σ 是 R 的 w-关系. 由(i), σ' 在 R' 上线性. 由 σ 的可消推知 σ' 在 R' 上可消. 如果有线性可消的等价关系 $\xi'\in E(R')$, 使 $\sigma'<\xi'<\pi_1(R')$, 则由于 f 所导出的映射的单一性, 必有 $\xi=f^{-1}[\xi']$ 使 $\sigma<\xi<\pi_1(R)$. 而 ξ 也是线性可消的, 这与 σ 的定义矛盾. 再对任意的 $x\in R$, 由 σ 的正则性, 知有 $e_1,\ e_2\in R$ 使 $x+e_1x\ \sigma\ e_2x$. 其中 $e_1,\ e_2$ 在关系 σ 中不等价. 为方便起见我们用 $e_1\tilde{\bar{\sigma}}e_2$ 表示之. 这样必有 $e_1'\tilde{\bar{\sigma}}'e_2'$ 且 $(x+e_1x)'\ \sigma'\ (e_2x)'$. 即 $x'+e_1'x'\ \sigma'\ e_2'x',\ \forall x'\in R'$. 这证明了 σ' 是 R' 上的 w-关系. 另一方向的证明类似.

设 I 是集合 S 上的一族等价关系. 定义关系 $\{I\}$ 为: $x\{I\}y\Leftrightarrow\exists$ 自然数 $n,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{n-1}\in S$ 以及 $\sigma_{i_1},\ \sigma_{i_2},\cdots,\ \sigma_{i_n}\in I$, 使 $x\sigma_{i_1}c_1,\ c_1\sigma_{i_2}c_2,\ \cdots,\ c_{n-2}\sigma_{i_{n-1}}c_{n-1},\ c_{n-1}\sigma_{i_n}y$, 称 $\{I\}$ 为 I 中所有关系的并. 易见 $\{I\}$ 也是 S 上的一个等价关系, 它是 I 中元的最小上界. 如果 S 是 R-半模且 I 中的关系都是 R-线性的, 则 $\{I\}$ 也是 R-线性的.

定义 1.5 设 I 是半模 M_R 的一族线性等价关系, 定义关系 $\langle I\rangle$ 为: $x\langle I\rangle y\Leftrightarrow\exists z\in M$, $\ni x+z\{I\}y+z$.

易知 $\langle I\rangle$ 也是 M 上的一个线性等价关系, 而且是可消的. 事实上, 设 $x+w\langle I\rangle y+w$,

即有 $z\in M$，使 $x+w+z\langle I\rangle y+w+z$，故 $x\langle I\rangle y$．关系 $\langle I\rangle$ 是所有 I 中关系的最小可消上界，因为若可消等价关系 ξ 是 I 中关系的上界，必有 $\{I\}\leqslant\xi$．于是 $x\langle I\rangle y\Rightarrow x+z\{I\}y+z\Rightarrow x+z\xi y+z\Rightarrow x\xi y$．故 $\langle I\rangle\leqslant\xi$．

§2. Jacobson 关系根，Jacobson 根

一个环关于它的 Jacobson 根的商实质上是对于某一个双模关系的商．但是在半环中，一般地说，双模关系比理想更为丰富．现在就从寻求这种恰当的双模关系着手，来找出更为本质的半单类半环，从而得到一般半环的结构．

设 M 是 R-半模，m 是 M 中的非零元．R 上的一个关系 $\sigma(m)$ 定义为：对于 $r_1, r_2\in R$，$r_1\sigma(m)r_2\Leftrightarrow mr_1=mr_2$．

引理 2.1 若 M 是可消既约 R-半模，m 是 M 中非零元，则 $\sigma(m)$ 是 R 上的 w-关系．

证　显然 $\sigma(m)$ 是一个线性等价关系．由 M 可消即推得 $\sigma(m)$ 可消．因 M 是既约 R-半模，$MR\neq 0$．故有 $\{x\in M\mid xR=0\}\neq M$．因既约半模非有设平凡的闭子半模，得 $\{x\in M\mid xR=0\}=0$．所以 $mR\neq 0$ 从而 $\sigma(m)\neq\pi_1$．设有线性可消的等价关系 σ_1，使 $\sigma(m)<\sigma_1$，则有 $u_1, u_2\in R$，使 $u_1\widetilde{\sigma(m)}u_2$ 而 $u_1\sigma_1u_2$．于是 $mu_1\neq mu_2$．根据既约半模之定义．对于任意的 $y\in R$，$\exists a_1, a_2\in R$，使 $my+(mu_1)a_1+(mu_2)a_2=(mu_1)a_2+(mu_2)a_1$．即 $y+u_1a_1+u_2a_2\,\sigma(m)\,u_1a_2+u_2a_1$，$y+u_1a_1+u_2a_2\,\sigma_1\,u_1a_2+u_2a_1$．由 $u_1\sigma_1u_2$ 以及 σ_1 是线性可消的，得 $y\sigma_1 0$．故 $\sigma_1=\pi_1$．再由既约半模之定义，知存在着 $a_1, a_2\in R$，使 $m+ma_1=ma_2$．因而有 $my+ma_1y=ma_2y$，$\forall y\in R$，即 $y+a_1y\sigma(m)a_2y$ $\forall y\in R$．因 $m\neq 0$，故 $ma_1\neq ma_2$ 即 $a_1\widetilde{\sigma(m)}a_2$．至此引理得证．

引理 2.2 设 m 是既约可消半模 M_R 中的非零元，则 $R/\sigma(m)$ 可以嵌入到 M_R 之中．

证　我们证明，$R/\sigma(m)$ 同构于 M 的非零子半模 mR．记 R-半模 $R/\sigma(m)$ 为 R°，元素 r 代表的等价类 r°．定义 R° 到 mR 上的映射 f 为：$f(r^\circ)=mr$．因

$$r_1^\circ=r_2^\circ\Leftrightarrow r_1\sigma(m)r_2\Leftrightarrow mr_1=mr_2.$$

且

$$r_1^\circ+r_2^\circ=(r_1+r_2)^\circ\overset{f}{\mapsto}m(r_1+r_2)=mr_1+mr_2.$$

知 f 是同构．

引理 2.3 若 σ 是半环 R 的 w-关系，则 R/σ 是可消既约 R-半模．

证　由于 σ 的极大性以及引理 1.4，$R^\circ=R/\sigma$ 上不可能有非平凡的线性可消等价关系．今对于取定的 $u_1^\circ, u_2^\circ\in R^\circ$，$u_1^\circ\neq u_2^\circ$，定义关系 $\sim$：$x^\circ\sim y^\circ\Leftrightarrow\exists a_1, a_2\in R$，使 (i) $x^\circ+u_1^\circ a_1+u_2^\circ a_2=y^\circ+u_2^\circ a_1+u_1^\circ a_2$．易证 $\sim$ 是线性可消等价关系．今证 $\sim\neq\pi_0(R^\circ)$．从 $u_1^\circ a+u_1^\circ o+u_2^\circ a=u_2^\circ a+u_2^\circ o+u_1^\circ a$ 知 $u_1^\circ a\sim u_2^\circ a$，$\forall a\in R$．如果 $u_1^\circ a=u_2^\circ a$，$\forall a\in R$，则可定义 R° 上的关系 ξ：$x^\circ\xi y^\circ\Leftrightarrow x^\circ a=y^\circ a$，$\forall a\in R$．因 ξ 是线性，可消的等价关系，且 $u_1^\circ\xi u_2^\circ$ 而 $u_1^\circ\neq u_2^\circ$，故 $\xi=\pi_1^\circ(R^\circ)$．设 e_1, e_2 是 σ 正则性定义中的两个元素．今有 $e_1^\circ\xi e_2^\circ\Rightarrow e_1^\circ a=e_2^\circ a$，$\forall a\in R\Rightarrow e_1a\sigma e_2a$，$\forall a\in R\Rightarrow\sigma=\pi_1(R)$，这个矛盾证明了 $\sim\neq\pi_\circ(R^\circ)$．从而 $\sim=\pi_1(R^\circ)$．在 (i) 中恒取 $y^\circ=0$，便见 R° 是既约半模．

设 σ 是半环 R 中的一个 w–关系，定义关系 (σ)：对于 $x, y\in R$, $x(\sigma)y\Leftrightarrow rx\sigma ry$, $\forall r\in R$. 定义另一个关系 σ_r: $x\sigma_r y\Leftrightarrow rx\sigma ry$. 这里 r 对应于 σ_r 是取定的. 易知 (σ) 是 R 的双模关系而 σ_r 是 R 的线性关系.

以下，记 Σ 为半环 R 中所有 w–关系的集合.

定理 2.4 在半环 R 上，$\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}(\sigma)=\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}\sigma$.

证 设 $x(\sigma)y$，即 $rx\sigma ry$, $\forall r\in R$. 因 σ 是正则关系，知有 $e_1, e_2\in R$，且 $e_1\tilde{\sigma}e_2$，使 $x+e_1x\sigma e_2x$ 以及 $e_2y\sigma y+e_1y$. 由 σ 的线性可消，得 $x\sigma y$. 所以 $(\sigma)\leqslant\sigma$, $\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}(\sigma)\leqslant\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}\sigma$. 另一方面，注意 $(\sigma)=\bigcap\limits_{r\in R}\sigma_r$. 故 $\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}(\sigma)=\bigcap\limits_{\substack{r\in R\\ \sigma\in\Sigma}}\sigma_r$. 记既约 R–半模 R/σ 为 R°. 若 $r\sigma 0$，则 $ra\sigma 0$, $\forall a\in R$，即 $a\sigma_r 0$, $\forall a\in R$, $\sigma_r=\pi_1$. 若 $r\tilde{\sigma}0$，则 $r^\circ\neq 0$. 由引理 2.1, $\sigma(r^\circ)$ 是 R 的 w–关系. 且因 $x\sigma(r^\circ)y\Leftrightarrow r^\circ x=r^\circ y\Leftrightarrow(rx)^\circ=(ry)^\circ\Leftrightarrow rx\sigma ry\Leftrightarrow x\sigma_r y$，即 $\sigma(r^\circ)=\sigma_r$. 总之 $\bigcap\limits_{\substack{r\in R\\ \sigma\in\Sigma}}\sigma_r\geqslant\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}\sigma$. 证毕.

定义 2.5 称 $\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}(\sigma)=\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}\sigma$ 为半环 R 的 Jacobson 关系根，简称 J–关系根，并用 $\tau(R)$ 或 τ 记之. 当 Σ 为空集时，定义 $\tau=\pi_1$. 此时 R 称为 J–关系根半环. 当 $\tau=\pi_0$ 时，R 称为 J–关系半单半环.

作为 R 上的双模关系之交，J–关系根当然亦是一个双模关系. 因此说 R 关于 τ 的商半环有意义.

定理 2.6 R 是半环，则 $R/\tau(R)$ 是 J–关系半单半环.

证 记 $\bar{R}=R/\tau$. 令 f 是 R 到 $\bar{R}$ 上的自然同态. 对于 R 的任一 w–关系 σ，必有 $\sigma\geqslant\tau$. 故由引理 1.4 之(iii)知 $f[\sigma]$ 是 $\bar{R}$ 的 w–关系. 故 $\tau(\bar{R})\leqslant\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}f[\sigma]$. 对于 $\bar{x}$, $\bar{y}\in\bar{R}$, $\bar{x}\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}f[\sigma]\bar{y}\Rightarrow\bar{x}f[\sigma]\bar{y}$, $\forall\sigma\in\Sigma\Rightarrow x\sigma y$, $\forall\sigma\in\Sigma\Rightarrow x\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}\sigma y\Rightarrow\bar{x}=\bar{y}$. 于是 $\tau(\bar{R})=\pi_0(\bar{R})$.

定理 2.7 若 R 是环，则 $R/\tau(R)\cong R/J$，其中 J 是环 R 的 Jacobson 根.

证 略.

有两个问题自然要引起我们的兴趣：一是 J–关系半单半环的结构如何？这将在 § 3 中讨论；二是前面提到的作者定义的这些根与 J–关系根的关系如何？如我们即将看到的，它们恰好是 J–关系根的一个等价类.

为方便，令 $(0\overset{\sim}{:}b)=\{x\in R\mid bx\sim 0\}$, $(0\overset{\sim}{:}1)=\{x\in R\mid x\sim 0\}$, $(0\overset{\sim}{:}R)=\{x\in R\mid rx\sim 0\ \forall r\in R\}$. $\sim$ 是某一等价关系.

定义 2.8 设 τ 是半环 R 的 J–关系根. 记 $\mathscr{R}=(0\overset{\tau}{:}1)$，不妨也称之为半环 R 的根.

由 τ 之定义立刻可得 $\mathscr{R}=\bigcap\limits_{\sigma\in\Sigma}(0\overset{\sigma}{:}1)$.

定理 2.9 半环 R 的根 $\mathscr{R}=\bigcap\limits_{M\in I}(0:M)$ 其中 I 是所有既约可消 R–半模的集合.

证 据引理 2.3，对于 $\sigma\in\Sigma$, R/σ 是既约可消的 R–半模. 如果 $x\in(0\overset{\sigma}{:}R)$，即 $rx\sigma 0$, $\forall r\in R$. 由 σ 的正则性知 $\exists e_1, e_2\in R$ 使 $x+e_1x\sigma e_2x$. 于是 $x\sigma 0$. 这说明 $(0\overset{\sigma}{:}R)\subset(0\overset{\sigma}{:}1)$. 注意到 $(0\overset{\sigma}{:}R)=(0:R/\sigma)$，我们有

$$\mathscr{R}=\bigcap_{\sigma\in\Sigma}(0\overset{\sigma}{:}1)\supset\bigcap_{\sigma\in\Sigma}(0\overset{\sigma}{:}R)=\bigcap_{\sigma\in\Sigma}(0:R/\sigma)\supset\bigcap_{M\in I}(0:M).$$

如果有 $x\in\mathscr{R}$ 而 $x\notin\bigcap_{M\in I}(0:M)$，则有既约可消半模 M 使 $Mx\neq 0$．从而有 $m\in M$ 使 $mx\neq 0$．由引理 2.1，得 w-关系 $\sigma(m)$，使 $x\widetilde{\sigma(m)}0$．这与 $x\in\mathscr{R}$ 矛盾．于是得到

$$\mathscr{R}=\bigcap_{M\in I}(0:M).$$

引理 2.10　$\mathscr{R}$ 包含了 R 中所有右拟正则右理想．

证　假设 R 中有一个右拟正则右理想 I，$I\not\subset\mathscr{R}$，则必有 $\sigma_1\in\Sigma$，使 $I\not\subset(0\overset{\sigma_1}{:}1)$．定义关系 σ_2: $x\sigma_2 y\Leftrightarrow$ 存在 i_1, $i_2\in I$，使 (i)$x+i_1=y+i_2$，则 σ_2 是 R 上的线性等价关系．由所设，知 $\exists i$，使 $i\in I$ 而 $i\notin(0\overset{\sigma_1}{:}1)$，即 $i\sigma_2 0$ 而 $i\tilde{\sigma}_1 0$．这样，$\langle\{\sigma_1, \sigma_2\}\rangle$ 是真包含 σ_1 的线性可消关系．由 σ_1 的极大性，得 $\langle\{\sigma_1, \sigma_2\}\rangle=\pi_1$．特别，对于 σ_1 正则性定义中选定的 e_1, e_2，有 $e_1\langle\{\sigma_1, \sigma_2\}\rangle e_2$．于是有 c_1, c_2, $\cdots$, c_{n-1}, $x\in R$ 以及关系式 (ii) $e_1+x\sigma_{i_1}c_1$, $c_1\sigma_{i_2}c_2$, $\cdots$, $c_{n-1}\sigma_{i_n}e_2+x$，其中 σ_{i_1}, $\cdots$, σ_{i_n} 是 σ_1 或 σ_2．现将 (ii) 中的元素在自然同态 f: $R\to R/\sigma_1$ 之下映到 $R^\circ=R/\sigma_1$ 之中．这时，原来由 σ_1 连结的元素对，它们的象相等；原来由 σ_2 连结的元素对例如 y, z，有关系式 (iii) $f(y)+f(k_1)=f(z)+f(k_2)$，k_1, $k_2\in I$．由于(iii)有传递性，我们总可以找到 i_1^0, $i_2^0\in R^0$，使 $(e_1+x)^0+i_2^0=(e_2+x)^0+i_1^0$．由于 R^0 满足消去律，$e_1^0+i_2^0=e_2^0+i_1^0$ 或写为 (iv) $e_1+i_2\sigma_1 e_2+i_1$．从 I 的右拟正则性，知有 j_1, $j_2\in R$，使 $i_1+j_1+i_1j_1+i_2j_2=i_2+j_2+i_2j_1+i_1j_2$．两边加上 $(e_1+e_2+e_1j_1+e_1j_2+e_2j_1+e_2j_2)$ 得 $(e_2+i_1)+(e_2+i_1)j_1+(e_1+i_2)j_2+j_1+e_1+e_1j_1+e_2j_2=(e_1+i_2)+(e_1+i_2)j_1+(e_2+i_1)j_2+j_2+e_2+e_2j_1+e_1j_2$．注意到 $j_1+e_1j_1\sigma_1 e_2j_1$, $j_2+e_1j_2\sigma_1 e_2j_1$ 以及(iv)，消去若干项得 $e_1\sigma_1 e_2$．这不可能，引理得证．

引理 2.11　$\mathscr{R}$ 是 R 中的右拟正则理想．

证　如果 $\mathscr{R}$ 不是右拟正则的，则有 a_1, $a_2\in\mathscr{R}$，使对任意的 j_1, $j_2\in R$, $a_1+j_1+a_1j_1+a_2j_2\neq a_2+j_2+a_2j_1+a_1j_2$．定义关系 $\sigma(a_1, a_2)$: $x_1\sigma(a_1a_2)x_2\Leftrightarrow\exists y_1$, $y_2\in R$．使成立 (i) $x_1+y_1+a_1y_1+a_2y_2=x_2+y_2+a_2y_1+a_1y_2$．此关系是等价关系，而且是线性可消的．我们证明，$\sigma(a_1a_2)$ 是正则的．由所设，$a_1\widetilde{\sigma(a_1a_2)}a_2$．只须验证，对任意的 $x\in R$，有 $x+a_1x\sigma(a_1a_2)a_2x$．即验证有 y_1, $y_2\in R$，使 $x+a_1x+y_1+a_1y_1+a_2y_2=a_2x+y_2+a_2y_1+a_1y_2$．这只须令 $y_1=0$, $y_2=x$．上式便成立．已知 R 上所有 $\geqslant\sigma(a_1a_2)$ 而使 a_1, a_2 不等价的线性可消等价关系的集合不空，且按 $\leqslant$ 作成一个偏序集，其中每一个升链在 §1 意义下之并仍是使 a_1, a_2 不等价的线性可消关系．事实上只须指出，若 I 中元组成升链而 $x\{I\}y$，则必存在 $\sigma_1\in I$，使 $x\sigma_1 y$．于是，根据 Zorn 引理，这个偏序集中有极大元 σ，则 σ 是 w-关系．事实上，因 $\sigma\geqslant\sigma(a_1, a_2)$，故 σ 正则；若有线性可消等价关系 ξ 使 $\sigma<\xi$，则 $a_1\xi a_2$．由于 σ 的正则性，$\forall x\in R$, $x\xi 0$，即 $\xi=\pi_1$．这样产生了矛盾：一方面，a_1, a_2 在每一 w-关系中等价；另一方面；有 w-关系 σ 使 $a_1\tilde{\sigma}a_2$．于是证明完毕．

定理 2.12　半环 R 的根 $\mathscr{R}$ 是 R 中最大的右拟正则右理想．

定理 2.9 以及定理 2.12 各自独立地证明了根 $\mathscr{R}$ 与[4]中定义的根一致，也与[2]中定义的半根一致．利用[3]中的结果，这些以不同角度定义的半环的根全部被证明是一致．

作为半环的特例，我们可以在环中考虑 J-关系根．下述定理是对环的 Jacobson 根

的另一种刻划.

定理 2.13 设 R 是环，J 是 R 的 Jacobson 根而 τ 是 R(半环意义下)的 J-关系根，则

$$J=(0\overset{\tau}{:}1).$$

证 略.

§3. J-关系半单半环

本节的目的是给出 J-关系半单半环的结构.

定义 3.1 M 是 R-半模，定义关系 $\sigma(M)=\bigcap\limits_{m\in M}\sigma(m)$. 即对于 $x,y\in R$，$x\sigma(M)y\Leftrightarrow mx=my$，$\forall m\in M$.

易知 $\sigma(M)$ 是 R 的一个双模关系.

引理 3.2 (i) δ 是半环 R 的一个双模关系. M 是 R-半模，且 $\delta\leqslant\sigma(M)$，则 M 也是 R/δ-半模. (ii) 若 M 是 R/δ-半模，其中 δ 是半环 R 的某一双模关系，则 M 也是 R-半模.

证 只须在(i)中定义 $m\bar{r}=mr$，在(ii)中定义 $mr=m\bar{r}$，其中 $m\in M$，$r\in R$，$\bar{r}$ 是 r 在自然同态下在 R/δ 中的象.

定义 3.3 R-半模 M 称为完全忠实的，如果 $\sigma(M)=\pi_0$，换句话说，M_R 是完全忠实半模 $\Leftrightarrow$ 若 $mx=my$，$\forall m\in M$，则 $x=y$.

定义 3.4 半环 R 称为完全本原的，如果它有完全忠实的，既约可消半模.

从定义知，完全忠实的可消半模必是忠实的，因而完全本原半环必是本原半环. 如果 R 是环，设 M 是 R 的完全忠实，既约，可消 R-半模，则对于任意的 $x\in M$，$x\neq 0$ 以及 $u\in M$，$u\neq 0$，必有 a_1，$a_2\in R$，使 $x+ua_1=ua_2$. 于是 $y=ua_1+u(-a_2)$ 就是 x 的加法逆元. 于是 M 实际上是 R-模. 易知 M 是忠实的，由于子模都是闭的，知 $MR\neq 0$，且无真子模. 反之，设 M 是环 R 的忠实既约模. 若有 x，$y\in R$，使 $mx=my$，$\forall m\in M$，则 $M(x-y)=0$，$x-y=0$，$x=y$. 故 M 是完全忠实的. 又对于 x，u_1，$u_2\in M$，$u_1\neq u_2$，易知 $(u_1-u_2)R=M$. 从而有 $r\in R$ 使 $(u_1-u_2)r=x$，故 $x+u_2r=u_1r$，即 M 作为 R-半模是既约的. 所以我们可以说，完全本原半环是本原环的推广. 关于它的结构，读者如有兴趣，可参看[6].

引理 3.5 若 σ 是半环 R 的 w-关系，则 $R/(\sigma)$ 是完全本原半环.

证 定理 2.3 证明 $R^0=R/\sigma$ 是既约、可消 R-半模. 易知 $(\sigma)=\sigma(R^0)$. 由引理 3.2，R^0 成为 $R/(\sigma)_-$ 半模. 显然仍是既约的. 今证是完全忠实的. 事实上，$\bar{a}$，$\bar{b}\in R/(\sigma)$，且 $r^0\bar{a}=r^0\bar{b}$，$\forall r^0\in R^0\Rightarrow r^0a=r^0b$，$\forall r^0\in R^0\Rightarrow ra\sigma rb$，$\forall r\in R\Rightarrow a(\sigma)b\Rightarrow\bar{a}=\bar{b}$. 证毕.

定理 3.6 J-关系半单半环同构于完全本原半环的亚直和.

证 设 R 是 J-关系半单半环，则 π_0 是它的 J-关系根，故有 $\bigcap\limits_{\sigma_\alpha\in\Sigma}(\sigma_\alpha)=\pi_0$. 设 φ_α 是 R 到 $R/(\sigma_\alpha)$ 上的自然同态，记 $A=\prod\limits_{\sigma_\alpha\in\Sigma}R/(\sigma_\alpha)$. 对于 $r\in R$，A 中的元素 f_r 定义为：$f_r(\alpha)=\varphi_\alpha(r)$. 定义 R 到 A 中的映射 φ：$\varphi(r)=f_r$. 与环论中熟知的证明类似，易知 $\varphi(R)$ 是 $\{R/(\sigma_\alpha),\ \sigma_\alpha\in\Sigma\}$ 的一个亚直和而 φ 是 R 到 $\varphi(R)$ 上的同态对应. 我们证明 φ 是同构，事实上，对于 x，$y\in R$，$f_x=f_y\Rightarrow\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha(y)$，$\forall\alpha\Rightarrow x(\sigma_\alpha)y$，$\forall\sigma_\alpha\in\Sigma\Rightarrow x\bigcap\limits_{\sigma_\alpha\in\Sigma}(\sigma_\alpha)y\Rightarrow x=y$. 再从引理 3.5 便得定理之结果.

定义 3.7 称半环 R 的双模关系 δ 为本原关系，如果 R/δ 是完全本原半环.

由定义，若 σ 是半环 R 的 w-关系，则 (σ) 是半环 R 的本原关系．

引理 3.8 若 δ 是半环 R 的一个本原关系，则必存在 R 的一个 w-关系 σ，使 $\sigma\leqslant\delta$.

证 如所设，则 $\bar{R}=R/\delta$ 是完全本原半环．它有完全忠实，既约可消半模 M．据引理 3.2，M 也是 R-半模，而且易知是既约，可消的．由引理 2.1，对任意的 $m\neq 0$，$m\in M$，$\sigma(m)$ 是 R 的一个 w-关系．如果对于 $x, y\in R$，$x\tilde{\delta}y$，即 $\bar{x}\neq\bar{y}$，由 M 的完全忠实性，知必有 $m\in M$，使 $m\bar{x}\neq m\bar{y}$．因而 $mx\neq my$ 而 $x\widetilde{\sigma(m)}y$．这样 $\sigma(m)\leqslant\delta$，　　证毕．

定理 3.9 半环 R 的 J-关系根 $\tau=\bigcap_{\delta\in\Delta}\delta$ 其中 Δ 是 R 上所有本原关系的集合．如果 Δ 是空集，则 $\tau=\pi_1$.

证 由引理 3.5 及引理 3.8 知 Σ 和 Δ 或同时为空或同时不空．因 $\tau=\bigcap_{\sigma\in\Sigma}\sigma=\bigcap_{\sigma\in\Sigma}(\sigma)\geqslant\bigcap_{\delta\in\Delta}\delta$，再由引理 3.8 推得反方向关系，便证明了定理．

最后，我们将完成定理 3.6 之逆的证明，这样，“完全本原半环的亚直和”与“J-关系半单半环”这两个概念就完全一致了．

引理 3.10 完全本原半环必是 J-关系半单的．

证 R 是完全本原半环，则 π_0 是 R 的本原关系．于是 R 的所有本原关系之交是 π_0.

引理 3.11 设 f 是集合 S 到集合 S' 上的映射，E 是 S' 中一等价关系的集合，则 $f^{-1}[\bigcap_{\varepsilon\in E}\varepsilon]=\bigcap_{\varepsilon\in E}f^{-1}[\varepsilon]$.　　证　略.

引理 3.12 设 f 是半环 R 到半环 R' 上的同态，τ 和 τ' 分别是 R 和 R' 的 J-关系根，则 $\tau\leqslant f^{-1}[\tau']$.

证 设 Σ 和 Σ' 分别为 R 和 R' 的所有 w-关系之集合，从引理 1.4 以及引理 3.11，我们有

$$\tau=\bigcap_{\sigma\in\Sigma}\sigma\leqslant\bigcap_{\sigma'\in\Sigma'}f^{-1}[\sigma']=f^{-1}[\bigcap_{\sigma'\in\Sigma'}\sigma']=f^{-1}[\tau'].$$

定理 3.13 若半环 R 是完全本原半环的亚直和，则 R 是 J-关系半单半环．

证 设 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 是一族完全本原半环．R 是它们的亚直和．对于任意的 $\alpha\in\mathscr{A}$，都有投射 φ_α: $R\to P_\alpha$．根据引理 3.12，R 的 J-关系根 $\tau(R)\leqslant\varphi_\alpha^{-1}[\tau(P_\alpha)]$．又根据引理 3.10，$P_\alpha$ 是 J-关系半单的．故 $\tau(R)\leqslant\varphi_\alpha^{-1}[\pi_0(P_\alpha)]$．因此对于

$$x, y\in R, x\tau y\Rightarrow x\varphi_\alpha^{-1}[\pi_0(P_\alpha)]y\Rightarrow\varphi_\alpha(x)\pi_0(P_\alpha)\varphi_\alpha(y)\Rightarrow\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha(y).$$

由 α 的任意性，我们得 $x\tau y\Rightarrow x=y$ 于是 $\tau(R)=\pi_0$.　　证毕.

感谢刘绍学教授对本文写作的指导与鼓励．

参 考 文 献

[1] Bourne, S., The Jacobson radical of a semiring, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **37** (1951), 163—170.

[2] Bourne, S. and Zassenhaus, On the semiradical of a semiring, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **44** (1958), 907—914.

[3] Lizuka, K. and Nakahara, I., A nore on the semiradical of a semiring, *Kumamoto Jour. of Sci.*, **A4** (1959), 1—3.

[4] Lizuka, K., On the Jacobson radical of a semiring, *Tohoku. Math.*, J (2) **11** (1959), 409—421.

[5] Latorre, D. R., A note on the Jacobson radical of a hemiring, *Publ. Math. Debrecen*, **14** (1967), 9—14.

[6] 厉立德，Jacobson-Chevalley 稠密定理的一个推广，数学研究与评论，**2** (1981), 1—6.

[7] Jacobson, N., Structure of rings, Providence RI, 1956.

[8] Herstein, I. N., Noncommutative rings, *Carus Math. Monogr. MAA.*, 15 (1968).

[9] Kaplanskv, I., Fields and rings, Univ. of Chicago, 1969.
[10] 刘绍学,环与代数,科技出版社.
[11] Курош, А. Г., 一般代数学讲义(刘绍学译),上海科技出版社, 1962.
[12] Grätzer, G., Universal Algebra, Springer-Verlay, New York, 1979.

THE JACOBSON RELATIONAL RADICAL AND THE JACOBSON RADICAL

LI LIDE
(*Zhejiang University*)

ABSTRACT

In this paper it is shown that the intersection of all w-relations of a hemiring R is exactly the intersection of all primitive relations of this hemiring, and is called J-relational radical of the himiring R. Several properties of the J-relational radical are described. The radical $\mathscr{R}$ of a hemiring R is defined by the set $\{x \in R \mid x\tau 0\}$, where τ is the J-relational radical of R. We obtain independently following results: 1. $\mathscr{R}$ is a right quasi-regular ideal which contains every right quasi-regular right ideal. 2. $\mathscr{R} = \bigcap\{(0:M) \mid M$, irreducible cancellative right R-semimodule. The term "Jacobson semisimple" in ring theory is generalized to hemirings by defining "J-relational semisimple." It is proved that if τ is the Jacobson relational radical of a hemiring R, then R/τ is J-relational semisimple. Finally the structure theorem of the hemirings is given. A hemiring is J-relational simisimple if and only if it is isomorphic to a subdirect sum of completely primitive hemirings.