数 学 年 刊
3 (6) 1982

关于n维参数强鞅的随机积分

聂 赞 坎
(西北大学)

在本文中定义了$PK_{(r)}$可料过程(见定义2.3)$\Phi(\xi^1, \cdots, \xi^r)$, $(\xi^q\in R_+^n, 1\leqslant q\leqslant r\leqslant n)$关于$n$维参数强鞅组$M=(M_1, \cdots, M_r)$的$r$重随机积分. 利用这些随机积分能表示满足适当条件的强鞅泛函,特别, n维参数Wiener过程的平方可积泛函和鞅能用这些积分来表示.

§1. n维参数鞅

在$T\triangleq R_+^n$中引用半序$<$和$\leqslant$, 设$z=(z_1, \cdots, z_n)$, $z'=(z_1', \cdots, z_n')$, $z<z'(z\leqslant z')$当且仅当$z_l<z_l'(z_l\leqslant z_l')1\leqslant l\leqslant n$. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$是完备概率空间, $\{\mathscr{F}_z, z\in T\}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$-域族. 数集$\{1, 2, \cdots, n\}$的子集$\{l_1, \cdots, l_a\}$记为$L_a$, $\bar{L}_a\triangleq\{1, \cdots, n\}\backslash L_a$. 令

$$\mathscr{F}_z^{L_a}=\bigvee_{l\in\bar{L}_a}\bigvee_{z_l\geqslant 0}\mathscr{F}_z, \quad z\in T.$$

我们约定记号$\mathscr{F}_z^{L_a}$中的z满足: 当$l\in\bar{L}_a$时, $z_l=\infty$; 特别$\mathscr{F}_z^{L_n}=\mathscr{F}_z$. 我们假定$\{\mathscr{F}_z, z\in T\}$满足: (F_1)当$z\leqslant z'$时, $\mathscr{F}_z\subset\mathscr{F}_{z'}$, $(F_2)\mathscr{F}_0$包含$\mathscr{F}$的一切P零测集, $(F_3)\forall z\in T$, $\mathscr{F}_z=\bigcap\limits_{z<z'}\mathscr{F}_{z'}$, (F_4)当$L_a\cap L_{a'}'=\phi$时, $\mathscr{F}_z^{L_a}$和$\mathscr{F}_{z'}^{L_{a'}'}$关于$\mathscr{F}_z^{L_a\cup L_{a'}'}$条件独立.

可以证明, 若(F_1)成立, 则(F_4)等价于对一切可积随机变量X, $\forall z, z'\in T$和$\forall L_a$, $L_{a'}'(L_a\cap L_{a'}'$不必空$)$有

$$E[X/\mathscr{F}_z^{L_a}/\mathscr{F}_{z'}^{L_{a'}'}]=E[X/\mathscr{F}_z^{L_a}\cap\mathscr{F}_{z'}^{L_{a'}'}]=E[X/\mathscr{F}_{z\wedge z'}^{L_a\cup L_{a'}'}].$$

若$x=(x_1, x_2, \cdots, x_c)$是$c$个同类元素, $1\leqslant a\leqslant b\leqslant c$, a, b, c是整数, 我们约定: $x_{[a,b]}=\{x_a, x_{a+1}, \cdots, x_b\}$, $x_a=x_{[a]}\triangleq x_{[a,a]}$, $x_{(a)}\triangleq x_{[1,a]}$; $x[a, b]=x_{[a,b]}$, $x^{[a,b]}$, $\cdots$等有同样的意义, $x_{L_a}\triangleq\{x_l; l\in L_a\}$.

当$z<z'$时, $(z, z']$表示矩形$\{\xi: z<\xi\leqslant z'\}$, R_z(或$R(z)$)表示$(0, z]$, 设$f(z)$是T上函数, $\Delta_{(z,z']}^l(1\leqslant l\leqslant n)$表示如下差分算子.

$$\Delta_{(z,z']}^l f(u_{(l-1)}, \cdot, u_{[l+1,n]})=f(u_{(l-1)}, z_l', u_{[l+1,n]})-f(u_{(l-1)}, z_l, u_{[l+1,n]}).$$

$$\Delta_{(z,z']}^{L_a}\triangleq\Delta_{(z,z']}^{l_1}\cdots\Delta_{(z,z']}^{l_a}, \quad \Delta_{(z,z']}\triangleq\Delta_{(z,z']}^{L_n}.$$

定义1.1 设过程$M=\{M_z, z\in T\}$满足$E|M_z|<\infty$, $z\in T$, 我们称M是

(a) L_a鞅(弱L_a鞅). 若① M是$\mathscr{F}_z^{L_a}$适应, ② $\forall z_{\bar{L}_a}\in R_+^{n-a}$, $\forall z_{L_a}<z_{L_a}'$有

$$E[M(z_{L_a}', z_{\bar{L}_a})/\mathscr{F}_z^{L_a}]=M_z$$

本文1980年7月29日收到.

(相应地 $\forall z<z'$, $E[\varDelta_{(z,z']}M./\mathscr{F}_z^{L_a}]=0$).

(b) 强 L_a 鞅. 若 M 是 L_a 鞅且 $\forall z_{\bar{L}_a}\in R_+^{n-a}$, $\forall z_{L_a}<z'_{L_a}$ 有

$$E[\varDelta_{(z,z']}^{L_a}M(\cdot,z_{\bar{L}_a})/\bigvee_{l\in L_a}\mathscr{F}_z^l]=0$$

当 $a=n$ 时,称(弱、强)L_a 鞅为(弱、强)鞅.

注 若 M 是 L_a 鞅,则 $\forall l\in L_a$, M 是弱 l 鞅,反之,设 M 在 $n-1$ 维坐标面上为 0, 若 $\forall l\in L_a$, M 是弱 l 鞅, 则 M 是 L_a 鞅. 今后总假定我们所考虑的过程在 $n-1$ 维坐标面上取 0 值.

定义 1.2 称过程 $A=\{A_z, z\in T\}$ 是 L_a 增过程,若 A 是按变元 z_{L_a} 右连续的 $\mathscr{F}_z^{L_a}$ 适应过程而且 $\forall D\triangleq((z_{L_a}, 0);\ (z'_{L_a}, z_{\bar{L}_a})]$ 有 $A(D)\triangleq\varDelta_{(z,z']}^{L_a}A(\cdot, z_{\bar{L}_a})\geqslant 0$.

给定 $z^0\in T$, 用 $\mathscr{M}^2(z^0)$ ($\mathscr{M}_c^2(z^0)$, $\mathscr{M}_s^2(z^0)$)表示全体满足 $E[|M_{z^0}|^2]<\infty$ 的右连续(相应地连续,右连续强)鞅 $\{M_z, z\leqslant z^0\}$.

定义 1.3 L_a 鞅 M 和 N 称为正交,记为 $M\perp N$, 若 MN 是弱 L_a 鞅.

令 $\mathscr{P}^{L_a}=\sigma\{(z, z']\times F, z<z', F\in\mathscr{F}_z^{L_a}\}$, 关于 $\mathscr{P}^{L_a}$ 可测的过程称为 $\mathscr{F}_z^{L_a}$ 可料过程.

用归纳法可将[3]的定理 1.5, 命题 1.8 和定理 1.9 推广而得下面定理 1.4, 1.5 和 1.6.

定理 1.4 若 $M\in\mathscr{M}_{L_a}^2(z^0)$ (全体平方可积 L_a 鞅), 则存在 L_a 增过程 A, 使 $\{M_z^2-A_z, z\leqslant z^0\}$ 是弱 L_a 鞅.

我们用 $\langle M\rangle$ 表示任一使 M^2-A 是弱 L_a 鞅的 L_a 增过程 A, 若 M, $N\in\mathscr{M}_{L_a}^2(z^0)$, 则令 $\langle M, N\rangle=\frac{1}{2}(\langle M+N\rangle-\langle M\rangle-\langle N\rangle)$.

定理 1.5 若 $M\in\mathscr{M}_{SL_a}^2(z^0)$ (全体平方可积强 L_a 鞅), 则 $\forall l\in L_a$ 存在唯一的 $\mathscr{F}_z^l$ 可料的 L_a 增过程 $[M]^l$, 使 $M^2-[M]^l$ 是 l 鞅, 且有 $E[M(D)^2/\mathscr{F}_z^l]=E[M^2(D)/\mathscr{F}_z^l]=E[[M]^l(D)/\mathscr{F}_z^l]$, 对 $\forall D=((z_{L_a}, 0);\ (z'_{L_a}, z_{\bar{L}_a})]\subset R_{z^0}$ 成立.

定理 1.6 设 $M\in\mathscr{M}_{SL_a}^2(z^0)$, 下面条件之一蕴含着 $\{[M]^l, l\in L_a\}$ 都相等. (a) σ-域族 $\{\mathscr{F}_z\}$ 由 Wiener 过程生成. (b) M 按 z_{L_a} 连续,且 $\forall z\leqslant z^0$, $E(M_z^4)<\infty$.

今后, 当 $M\in\mathscr{M}_{SL_a}^2$ 时, 我们总假定 $\{[M]^l, l\in L_a\}$ 都相同, 以 $[M]^{L_a}$ 表示共同的过程, $[M]^{L_n}$ 记为 $[M]$.

§2. 关于强鞅组的 r ($1\leqslant r\leqslant n$) 重积分

1 单重($r=1$)积分

在[3]§2 中 $\mathscr{F}_z^l$ 可料过程关于强鞅积分的直接推广是 $\mathscr{F}_z^{L_a}$ 可料过程关于强鞅的积分,下面是[3]定理 2.3 的类似物,证明略去.

定理 2.1 设 $M\in\mathscr{M}_s^2(z^0)$, $\varPhi$ 是 $\mathscr{F}_z^{L_a}$ 可料过程满足 $E\left[\int_{R(z^0)}\varPhi^2 d[M]\right]<\infty$, 则可定义积分 $\varPhi\cdot M$ 使(i) $\varPhi\cdot M$ 按 z_{L_a} 右连续, 若 M 按 z_{L_a} 连续, 则 $\varPhi\cdot M$ 亦然. (ii) $\varPhi\cdot M\in\mathscr{M}_{SL_a}^2(z^0)$, 关于 $\varPhi$ 是线性的. (iii) $[\varPhi\cdot M]_z^{L_a}=\int_{R(z^0)}\varPhi^2 d[M]$, $z\leqslant z^0$.

2　多重($r\geqslant 2$)积分

固定整数 $2\leqslant r\leqslant a\leqslant n$, 给定 r 个整数 $1\leqslant k_1<\cdots<k_r=a$, 令 $K_q=(k_{q-1}+1, k_{q-1}+1, \cdots, k_q)$, $(1\leqslant q\leqslant r,\ k_0=0)$, $S(L_a|K_{(r)})$ 表示将 L_a 分成 r 组使第 q 组恰有 k_q-k_{q-1} 个数的全部分法, 其中元素用 $(P_1, \cdots, P_{k_1};\ \cdots;\ P_{k_{r-1}}+1, \cdots, P_{k_r})$ 或 $(PK_1;\ \cdots;\ PK_r)$ 或 $PK_{(r)}$ 表示.

定义 2.2　T 中 r 个点 $\{\xi^q\}_{1\leqslant q\leqslant r}$ 称为有关系 $PK_{(r)}$ 若 ξ^q 的第 $l\in PK_q$ 个坐标大于其余各点的第 l 个坐标, 即有不等式组

$$\xi^q_l>\max_{1\leqslant h\leqslant r, h\neq q}\xi^h_l,\quad l\in PK_q,\quad 1\leqslant q\leqslant r. \tag{2.1}$$

令

$$GPK_{(r)}=\{\xi^{(r)}: \xi^{(r)}\triangleq(\xi^1, \cdots, \xi^r)\text{有关系 } PK_{(r)}\}. \tag{2.2}$$

T 中 r 个'矩形' $\{D_q=(s^q, t^q]\}_{1\leqslant q\leqslant r}$ 称为有关系 $PK_{(r)}$, 若下面不等式组成立

$$s^q_l\geqslant\max_{1\leqslant h\leqslant r, h\neq q}t^h_l,\quad l\in PK_q,\quad 1\leqslant q\leqslant r. \tag{2.3}$$

定义 2.3　设'矩形'组 $\{D_q=(s^q, t^q]\}_{1\leqslant q\leqslant r}$ 有关系 $PK_{(r)}$, α 是有界的 $\mathscr{F}^{L_a}_{\vee S^{(r)}}$ 可测的随机变量(其中 $L_a=PK_{(r)}$, $\vee S^{(r)}\triangleq\bigvee_{1\leqslant q\leqslant r}S^q$), 形为 $\alpha\prod_q I_{D_q}(\xi^q)$ 的函数称为 $PK_{(r)}$ 基本函数, 它们生成的 σ-域称为 $PK_{(r)}$ 可料 σ-域.

设平方可积右连续强鞅组 $M=(M_1, \cdots, M_r)$ 满足

$$\prod_q M^2_q(\xi^q)\in L^1,\quad \forall\,\xi^{(r)}\in T^r. \tag{2.4}$$

$L^2_M(z^0, PK_{(r)})$ 表示满足下面条件的全体过程 Φ, ① Φ 是 $PK_{(r)}$ 可料, ② $\Phi=\Phi I_{GPK_{(r)}}$, ③ $E\left[\int_{R^r_{z^0}}\Phi^2 d[M]\right]<\infty$, 其中 $d[M]=d[M_1]\times\cdots\times d[M_r]$.

若 Φ 是 $PK_{(r)}$ 基本函数, 强鞅组 M 满足(2.4), Φ 关于 M 的积分定义为过程

$$X_z=\alpha\prod_q M_q(D_q\cap R_z),\quad z\leqslant z^0, \tag{2.5}$$

记为 $\Phi.M_z$ 或 $\int_{R^r_z}\Phi dM$, 照例可将积分扩张到 $L^2_M(z^0, PK_{(r)})$, 并有下面定理.

定理 2.4　若 $\Phi\in L^2_M(z^0, PK_{(r)})$, 强鞅组 M 满足(2.4), 则可定义积分 $\Phi.M$ 满足: (i) $\Phi.M\in\mathscr{M}^2_{L_a}(z^0)$, 按 z_{L_a} 右连续, 当 M 按 z_{L_a} 连续时, $\Phi.M$ 亦然. (ii) $\langle\Phi.M\rangle_z=\int_{R^r_z}\Phi^2 d[M]$. (iii) $\Phi.M\perp M_h(1\leqslant h\leqslant r)$.

证　根据单调类定理只须对(2.5)中的 X 给以证明, 为简单计, 设 $PK_{(r)}=K_{(r)}$, $k_r=a=n$, 任取 $D=(z, z']$, 不难验证有

$$X(D)=\alpha\prod_q M_q(D'_q), \tag{2.6}$$

其中, $D'_q=D_q\cap((0, z_{k_q}, 0);\ z']$, 对 $1\leqslant l\leqslant n$, 取 $1\leqslant\nu\leqslant r$, 使 $l\in K_\nu$, 用 z^ν 表示 D'_ν 的下端(当 $D'_\nu=\phi$ 时, 规定 $z^\nu=z^0$), 易知 α 关于 $\mathscr{F}^l_{z^\nu}$ 可测, 又因为 $D'_q(q\neq\nu)$ 中任意点的第 l 个坐标不大于 S^ν_l, 故 $\prod_{q\neq\nu}M_q(D'_q)$ 也关于 $\mathscr{F}^l_{z^\nu}$ 可测, 再由 M_ν 是强鞅得 $E[X(D)/\mathscr{F}^l_z]=0$, 即 X 是弱 l 鞅, 由定义 1.1 后的注知 X 是鞅.

往证 $X\perp M_h(1\leqslant h\leqslant r)$, 令 $\theta=\vee S^{(r)}\vee z$, 将 D 分成有限个不交'矩形' $\{d_i\}$ 之并, 使每个 d_i 或含于 $(\theta, z^0]$ 或含于 $R_{z^0}\backslash(\theta, z^0]$;

① 若 $d_i\subset(\theta, z^0]$，由 $\alpha\prod_q M_q(D'_q)$ 关于 $\bigvee_l \mathscr{F}^l_\theta$ 可测得

$$E[X(D)M_h(d_i)/\mathscr{F}_z]=E[X(D)E(M_h(d_i)/\bigvee_l\mathscr{F}^l_\theta)/\mathscr{F}_z]=0,$$

② 若 $d_i\subset R_{z^0}\backslash(\theta, z^0]=\sum_{l=1}^n((\theta_{(l-1)}, 0);\ (z^0_{(l-1)}, \theta_l, z^0_{[l+1,n]})]\triangleq\sum_l e_l$，若用 $d_i\cap e_l$ 取代 d_i，可设 $d_i\subset e_l$，此时 $M_h(d_i)$ 和 $\alpha\prod_{q\neq\nu}M_q(D'_q)$ 都关于 $\mathscr{F}^l_\theta$ 可测，又因为 $\theta_l=z^\nu_l(l\in K_\nu)$，故

$$E[X(D)M_h(d_i)/\mathscr{F}_z]=E[\alpha M_h(d_i)\prod_{q\neq\nu}M_q(D'_q)E(M_\nu(D'_\nu)/\mathscr{F}^l_\theta)/\mathscr{F}_z]=0.$$

总之有 $E[X(D)M_h(D)/\mathscr{F}_z]=0$，即 $X\perp M_h$.

现来求 $\langle X\rangle$，根据 (F_4) 有 $E[\prod_q M_q(D'_q)^2/\mathscr{F}_\theta]=E[\prod_q[M_q](D'_q)/\mathscr{F}_\theta]$，故

$$E[X(D)^2/\mathscr{F}_z]=E[\alpha^2\prod_q[M_q](D'_q)/\mathscr{F}_z].$$

参照(2.5)、(2.6)知，$\prod_q[M_q](D'_q)=\Delta_{(z,z')}\prod_q[M_q](D_q\cap R_\cdot)=\Delta_{(z,z')}\int_{R^r_z}\prod_q I_{D_q}d[M]$，若取 $A_z=\int_{R^r_z}\alpha^2\prod_q I_{D_q}d[M]=\int_{R^r_z}\Phi^2d[M]$，则有 $E[X(D)^2-A(D)/\mathscr{F}_z]=0$，即 A 是 $\langle X\rangle$ 中的一员.

3　随机积分的推广

设右连续强鞅组 M 满足(2.4)且对几乎所有 ω，$[M_q](1\leqslant q\leqslant r)$ 在 T 上产生的 Borel 测度被非随机增过程 A 产生的测度控制，令

$$\mathscr{L}_M(z^0, PK_{(r)})=\Big\{\Phi:\ ①\ \Phi \text{ 是 } PK_{(r)} \text{ 可料且 } \Phi=\Phi I_{GPK_{(r)}},$$

$$②\int_{R^r_{z_0}}\Phi^2dA^{(r)}<\infty,\ a.s.,\ dA^{(r)}\triangleq\overbrace{dA\times\cdots\times dA}^{r}\Big\}.$$

对任意随机变量 α，$N(\alpha)\triangleq E\left[\dfrac{|\alpha|}{1+|\alpha|}\right]$，参考[3, 5]可证明下面诸定理

定理 2.5　设强鞅组 M 满足上述假设；又设 Φ 是 $PK_{(r)}$ 简单函数或是 $L^2_M(z^0, PK_{(r)})$ 中满足 $E\left[\int_{R^r_{z_0}}\Phi^2dA^{(r)}\right]<\infty$ 的函数，若令

$$\varphi_q(z)=\int_{R^q_z}\left(\int_{R^{r-q}_z}\Phi(\xi^{(q)};\xi^{[q+1,r]})dM_{[q+1,r]}\right)^2dA^{(q)},\ 0\leqslant q\leqslant r,\ \text{特别},$$

$$\varphi_0(z)=(\Phi.M)^2,\ \varphi_r(z)=\int_{R^r_z}\Phi^2dA^{(r)},\ \varphi_q(z^0)=\int_{R^q_{z_0}}Q^2(\xi^{(q)})dA^{(q)},\ 1\leqslant q\leqslant r,$$

其中 $Q(\xi^{(q)})=\int_{R^{r-q}_{z_0}}\Phi(\xi^{(q)}, \xi^{[q+1,r]})dM_{[q+1,r]}$，则有

$$N[\varphi^{\frac12}_{q-1}(z^0)]\leqslant 4N^{\frac13}[\varphi^{\frac12}_q(z^0)],\quad 2\leqslant q\leqslant r,$$

$$N[\varphi^{\frac12}_0(z^0)]\leqslant 4N^{\frac13}[\varphi^{\frac12}_1(z^0)]\leqslant 4^rN^{3^{-r}}[\varphi^{\frac12}_r(z^0)].\tag{2.7}$$

定理 2.6　若强鞅组 M 满足定理 2.5 的假设，则关于 M 的积分可扩张到 $\mathscr{L}_M(z^0, PK_{(r)})$ 上，且使积分满足(2.7).

定理 2.7　若强鞅组 M 和增过程 A 满足定理 2.5 的假设，函数列 $\{\Phi^i\}_{i\geqslant1}$ 和 Φ 都属于 $\mathscr{L}_M(z^0, PK_{(r)})$ 且满足

(i) $\sup_i \sup_{\xi^{(r)}\in R(z^0)^r} |\Phi^i(\xi^{(r)})|<\infty$, a.s.

(ii) $\Phi^i(\xi^{(r)}) \xrightarrow{a.s.} \Phi(\xi^{(r)})\ (i\to\infty)$ 关于测度 $dA^{(r)}$ a.e. $\xi^{(r)}\in R^r_{z^0}$ 成立，则有

$$\lim_{i\to\infty} \text{in prob}\ \Phi^i.M_{z^0}=\Phi.M_{z^0}$$

注　上面诸定理只适用于 $2\leqslant r\leqslant n$; 对 $r=1$ 的情形，将[5]的引理1和命题1及其证明作些明显的修改，可将积分扩张到 $\mathscr{L}(z^0)$ 上，且定理 2.7 仍然成立.

$$\mathscr{L}(z^0)\triangleq\left\{\Phi:\ \Phi \text{ 是 } \mathscr{F}_z \text{ 可料且有} \int_{R(z^0)}\Phi^2 d[M]<\infty,\ a.s.\right\}$$

为了今后简化式子，再如下扩大被积函数类，对给定的 $2\leqslant r\leqslant a\leqslant n$ 和 L_a，令

$$S(L_a|r)=\bigcup_{1\leqslant k_1<\cdots<k_r=a} S(L_a|K_{(r)}),$$

$$G(L_a|r)=\bigcup_{PK_{(r)}\in S(L_a|r)} GPK_{(r)}.$$

当 $L_a=\{1,\ \cdots,\ a\}$ 时，用 $S(a|r)$, $G(a|r)$ 分别代替 $S(L_a|r)$, $G(L_a|r)$，令

$$\mathscr{L}_M(z^0,\ a|r)=\{\Phi:\ \Phi=\Phi I_{G(a|r)} \text{ 且 } \forall PK_{(r)}\in S(a|r),\ \Phi I_{GPK_{(r)}}\in \mathscr{L}_M(z^0,\ PK_{(r)})\}.$$

显然，当 $\Phi(\xi^{(r)})$ 是 $R^r_{z^0}$ 上的连续适应（指 $\forall \xi^{(r)}\in R^r_{z^0}$, $\Phi(\xi^{(r)})$ 关于 $\mathscr{F}_{\vee\xi^{(r)}}$ 可测）过程时，$\Phi I_{G(a|r)}\in \mathscr{L}_M(z^0,\ a|r)$，若 $\Phi\in \mathscr{L}_M(z^0,\ a|r)$，则定义 Φ 关于 M 的积分为

$$\Phi.M_z=\sum_{PK_{(r)}\in S(a|r)} \Phi I_{GPK_{(r)}}.M_z=\Phi I_{G(a|r)}.M_z,\quad z\leqslant z^0. \tag{2.8}$$

自然还可将积分扩张到 $\mathscr{L}_M(a|r)\triangleq\bigcap_{z\in T}\mathscr{L}_M(z,\ a|r)$ 上.

§3. 平方可积鞅的表示

假定 N 是正整数，$\varepsilon=\dfrac{1}{2^N}$, $i=(i_1,\ \cdots,\ i_n)$, $i_l=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^{N-1}$, $1\leqslant l\leqslant n$; $e=(1,\ \cdots,\ 1)$, $i\varepsilon=(i_1\varepsilon,\ \cdots,\ i_n\varepsilon)$, $i^*=(i_1,\ \cdots,\ i_{n-1})$，类似地有 e^*, 0^*. $\Delta^l_{i\varepsilon}$ 有双重意义，既表示 T 中'矩形'$((0,\ i_l\varepsilon,\ 0);\ (i_{(l-1)}\varepsilon,\ i_l\varepsilon+\varepsilon,\ i_{[l+1,n]}\varepsilon)]$，又表示差分算子 $\Delta^l_{i\varepsilon}f(\cdot)\triangleq f(i_{(l-1)}\varepsilon,\ i_l\varepsilon+\varepsilon,\ i_{[l+1,n]}\varepsilon)-f(i\varepsilon)$，类似地有 $\Delta^{L_a}_{i\varepsilon}$，比如 $\Delta^{1,2}_{i\varepsilon}$ 既表示 T 中'矩形'$((i_{(2)}\varepsilon,\ 0);\ (i_1\varepsilon+\varepsilon,\ i_2\varepsilon+\varepsilon,\ i_{[3,n]}\varepsilon)]$，又表示差分算子 $\Delta^{1,2}_{i\varepsilon}f(\cdot)\triangleq\Delta^1_{i\varepsilon}\Delta^2_{i\varepsilon}f(\cdot,\ i_{[3,n]}\varepsilon)$.

$f(u,\ z)\ (u\in R^m,\ z\in T)$ 是实(复)值函数，具有关于 u 的分量直到 $n+1$ 阶连续混合偏导数和关于 z 的连续梯度，令

$$f^{\alpha(r)}(u,\ z)=\frac{\partial^r f(u,\ z)}{\partial u_{\alpha_1}\cdots\partial u_{\alpha_r}},\quad 1\leqslant\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_r\leqslant m,\ 1\leqslant r\leqslant n+1,$$

$$\nabla f(u,\ z)=\text{grad}_z f(u,\ z).$$

设连续强鞅组 $M=(M_1,\ \cdots,\ M_m)$ 满足: $\forall\alpha(r)\triangleq\alpha_{(r)}$, $\forall z^{(r)}\in T^r$, $1\leqslant r\leqslant n+1$ 有

$$E\left[\prod_{q=1}^r M^2_{\alpha[q]}(z^q)\right]<\infty. \tag{3.1}$$

根据定理 1.6 及其后说明，存在弱 $\mathscr{F}_z$ 可料增过程 $[M_q]\ (1\leqslant q\leqslant m)$ 使 $M^2_q-[M_q]$ 是鞅，令

$$V_{\alpha(2)}(z)=[M_{\alpha_1},\ M_{\alpha_2}]_z=\frac{1}{2}([M_{\alpha_1}+M_{\alpha_2}]_z-[M_{\alpha_1}]_z-[M_{\alpha_2}]_z)$$

假设 $[M_q]$ 满足 §2, 3 中的要求，且 $\nabla V_{\alpha(2)}(z)$ a.s 存在，有限. 若 $f(u,\ z)$ 满足

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha(2)} f^{\alpha(2)}(u, z)\cdot\nabla V_{\alpha(2)}(z)+\nabla f(u, z)=0, \quad a.s, \tag{3.2}$$

则 $f(M_z, z)$ 是[1]意义下的多参数局部鞅，且在每条上升路径上有([1](4.5)式)

$$f(M_{\theta(t)}, \theta(t))-f(M_{\theta(0)}, \theta(0))=\sum_{\alpha=1}^{m}\int_0^t f^{\alpha}(M_{\theta(s)}, \theta(s))M_{\alpha}(d\theta(s)) \tag{3.3}$$

定理 3.1 若 M, f 满足上述假设，则有

$$\Delta_{(0,z]}f(M_\cdot, \cdot)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\sum_{\alpha(r)}\int_{R_z^r} f^{\alpha(r)}(M(\vee\xi^{(r)}, \vee\xi^{(r)})I_{G(n|r)}dM_{\alpha(r)}, \tag{3.4}$$

其中 $M_{\alpha(r)}=(M_{\alpha_1}, \cdots, M_{\alpha_r})$.

由于 $f^{\alpha(r)}(M(\vee\xi^{(r)}), \vee\xi^{(r)})$ 是连续适应过程，故(3.4)右边的积分都存在，由两边的鞅性，只须对 $z=e$ 给以证明，我们通过下面几个引理来完成证明.

引理 3.2 设函数 $g(u, z)$ 具有连续的各阶偏导数且满足(3.2),

$$PK_{(r)}\in S(n-1|r), \quad 1\leqslant r\leqslant n-1,$$

数组 $\overline{PK_{(r)}}$ 中的 $\overline{PK_q}$ 或等于 PK_q 或等于 $(PK_q;\ n)$ $(1\leqslant q\leqslant r)$ 而且至少有某个 q 使后者成立，则有

$$\sum_i \Delta_{i\varepsilon}^{n} g(M_\cdot, \cdot)\prod_q \Delta_{i\varepsilon}^{\overline{PK}[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)=o(\varepsilon) \tag{3.5}$$

其中 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ in prob $o(\varepsilon)=0$.

证 为简单计，只讨论 $\overline{PK_1}=(PK_1, n)=(K_1, n)$, $\overline{PK_q}=PK_q=K_q$ $(2\leqslant q\leqslant n)$ 且 $\alpha_{(r)}=(r)$, 这种特殊情形，其它情形类似可证，令

$$d_i=\Delta_{i\varepsilon}^{n} g(M_\cdot, \cdot)\Delta_{i\varepsilon}^{k_1,n}M_1(\cdot)\prod_{q=2}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{k_q}M_q(\cdot). \tag{3.6}$$

记 $\delta\triangleq(i_n\varepsilon, i_n\varepsilon+\varepsilon]$, 由 Kunita-Watanabe 微分公式和(3.2)得

$$d_i=\sum_{\alpha=1}^{m}\int_{\delta} g^{\alpha}(M(i^*\varepsilon, z_n);\ i^*\varepsilon, z_n)M_{\alpha}(i^*\varepsilon, dz_n)\Delta_{i\varepsilon}^{k_1,n}M_1(\cdot)\prod_{q=2}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{k_q}M_q(\cdot), \tag{3.7}$$

以下略去 $i^*\varepsilon$ 不写，并分两步证明 $\sum\limits_i d_i=o(\varepsilon)$

(1) 设

$$\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant m}\sup_{z\leqslant e}|g^{\alpha}(M_z, z)|\leqslant C, \quad a.s, \tag{3.8}$$

其中，$g^0=g$, C 是常数

由(3.1), (3.6)知，$\forall i$, $E(d_i^2)<\infty$; 往证 $E[d_i, d_j]=0$ $(i\neq j)$, 事实上若 $i\neq j$, 不妨设存在 $l\in(k_1, n)$, 使 $i_l<j_l$, 从而有

$$E[d_i d_j]=E[d_i\Delta_{j\varepsilon}^{n} g(M_\cdot, \cdot)\prod_{q=2}^{r}\Delta_{j\varepsilon}^{k_q}M_q(\cdot)E(\Delta_{j\varepsilon}^{k_1,n}M_1(\cdot)/\bigvee_{l\in(k_1,n)}\mathscr{F}_{j\varepsilon}^{l})]=0.$$

若注意到

$$E\Big[\Big(\int_{\delta} g^{\alpha}(M(z_n), z_n)M_{\alpha}(dz_n)\Big)^2\Big(\Delta_{i\varepsilon}^{k_1,n}M_1(\cdot)\prod_{q=2}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{k_q}M_q(\cdot)\Big)^2\Big]$$

$$=E\Big[\Big(\int_{\delta} g^{\alpha}(M(z_n), z_n)M_{\alpha}(dz_n)\Big)^2[M_1](\Delta_{i\varepsilon}^{k_1,n})\prod_{q=2}^{r}[M_q](\Delta_{i\varepsilon}^{k_q})\Big]. \tag{3.9}$$

由(3.7), (3.9)和不等式 $\Big(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\Big)^2\leqslant m\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2$ 得

$$E[\sum_i d_i]^2=\sum_i Ed_i^2\leqslant mc^2\sum_{\alpha=1}^m\sum_i E[[M_\alpha](\varDelta_{i\varepsilon}^n)]A(\varDelta_{i\varepsilon}^{k_1,n})\prod_{q=2}^r A(\varDelta_{i\varepsilon}^{k_q})$$

$$\leqslant mc^2[A(R_e)]^r\sum_{\alpha=1}^m E\left[\max_i[M_\alpha](\varDelta_{i\varepsilon}^n)\right].$$

因为 $\max_i[M_\alpha](\varDelta_{i\varepsilon}^n)\leqslant A(R_e)$ 且 $\max_i[M_\alpha](\varDelta_{i\varepsilon}^n)\xrightarrow{a.s.}0(\varepsilon\to 0)$. 由控制收敛定理得

$$\sum_i d_i=o(\varepsilon).$$

(2) 一般情形，令 $T^N(z)=\begin{cases}1, \text{当} \max\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant m}\sup\limits_{\xi\leqslant z}|g^\alpha(M_\xi,\xi)|\leqslant N \text{时},\\ 0, \text{其它},\end{cases}$

则 $T^N(z)$ 是 $\mathscr{F}_z$ 可料过程且 $P\{T^N(e)=1\}\uparrow 1$(当 $N\uparrow\infty$ 时).

设 $g^{\alpha,N}(\xi)=T^N(\xi)g^\alpha(M_\xi,\xi)$, $0\leqslant\alpha\leqslant m$, 易知它们都是有界的 $\mathscr{F}_\xi$ 可料过程，根据积分的局部化性质([6]定理 12.10)，由(3.7)得，$\forall\rho>0$ 有

$$P\{|\sum_i d_i|>\rho,\ T^N(e)=1\}$$

$$=P\left\{|\sum_i\sum_{\alpha=1}^m\int_\delta g^{\alpha,N}(z_n)M_\alpha(dz_n)\varDelta_{i\varepsilon}^{k_1,n}M_1(\cdot)\prod_{q=2}^r\varDelta_{i\varepsilon}^{k_q}M_q(\cdot)|>\rho,\ T^N(e)=1\right\}.$$

将(1)中讨论用于 $\{g^{\alpha,N}\}$ 得 $P\{|\sum_i d_i|>\rho,\ T^N(e)=1\}\to 0(\varepsilon\to 0)$, 因为

$$P\{|\sum_i d_i|>\rho\}\leqslant P\{T^N(e)=0\}+P\{|\sum_i d_i|>\rho,\ T^N(e)=1\},$$

令 $N\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ 得 $P\{|\sum_i d_i|>\rho\}\to 0$.

引理 3.3 若令

$$I_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon)=f^{\alpha(r)}(M(i\varepsilon),i\varepsilon)\prod_{q=1}^r\varDelta_{i\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot),\quad 1\leqslant r\leqslant n,\tag{3.10}$$

$$S_r^n(i\varepsilon)=\sum_{\alpha(r)}\sum_{PK(r)\in S(n|r)}I_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon),\quad 1\leqslant r\leqslant n,\tag{3.11}$$

则在定理 3.1 的条件下有

$$\varDelta_{(0,e]}f(M.,\ \cdot)=\sum_{r=1}^n\frac{1}{r!}\sum_i S_r^n(i\varepsilon)+o(\varepsilon)\tag{3.12}$$

证　对 n 施行归纳法，当 $n=1$ 时，由(3.3)和积分的 Riemann-Stieljes 逼近得

$$\varDelta_{(0,1]}f(M.,\ \cdot)=\sum_{\alpha=1}^m\int_0^1 f^\alpha(M_z,z)M_\alpha(dz)=\sum_{\alpha=1}^m\sum_{i=0}^{2^N-1}f^\alpha(M(i\varepsilon),i\varepsilon)\varDelta_{i\varepsilon}M_\alpha(\cdot)+o(\varepsilon).$$

引理成立.

假设引理对 $n-1$ 成立，往证对 n 成立. 若 $f(u,z)$、M_z 满足定理 3.1 前面所述条件，则任意固定 $z_n\in R_+$, f, M 视为以 z^* 为参数的函数和过程满足相应条件，从而根据归纳假设有

$$\varDelta_{(0,e]}f(M.,\ \cdot)=\varDelta_{(0,1]}^n\varDelta_{(0^*,e^*]}^{1,\cdots,(n-1)}f(M_{*,\cdot};\ *,\ \cdot)=\varDelta_{(0,1]}^n\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r!}\sum_{i^*}S_r^{n-1}(i^*\varepsilon,\ \cdot)+o(\varepsilon)$$

$$=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r!}\sum_i\varDelta_{i\varepsilon}^n S_r^{n-1}(i^*\varepsilon,\ \cdot)+o(\varepsilon),\tag{3.13}$$

其中

$$S_r^{n-1}(i^*\varepsilon,\ \cdot)=\sum_{\alpha(r)}\sum_{PK(r)\in S(n-1|r)}I_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i^*\varepsilon,\ \cdot),\quad 1\leqslant r\leqslant n-1,\tag{3.14}$$

$$I_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i^*\varepsilon,\ \cdot)=f^{\alpha(r)}(M(i^*\varepsilon,\ \cdot),\ (i^*\varepsilon,\ \cdot))\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i^*\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(*,\ \cdot),\quad 1\leqslant r\leqslant n-1,\tag{3.15}$$

利用等式 $\Delta_{(\alpha,\beta]}fg(\cdot)=f(\alpha)\Delta_{(\alpha,\beta]}g(\cdot)+\Delta_{(\alpha,\beta]}f(\cdot)g(\beta)$ 得

$$\begin{aligned}\Delta_\delta^n I_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i^*\varepsilon,\ \cdot)=&f^{\alpha(r)}(M_{i\varepsilon},\ i\varepsilon)\sum_{t=1}^{r}\Big(\prod_{q=1}^{t-1}\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)\Big)\\&\cdot\Delta_{i\varepsilon}^{PK[t],n}M_{\alpha[t]}(\cdot)\prod_{q=t+1}^{r}\Delta_{i^*\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(*,\ i_n\varepsilon+\varepsilon)\\&+\Delta_\delta^n f^{\alpha(r)}(M(i^*\varepsilon,\ \cdot),\ (i^*\varepsilon,\ \cdot))\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i^*\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(*,\ i_n\varepsilon+\varepsilon)\\&\triangleq A_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon)+B_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon),\end{aligned}\tag{3.16}$$

若表 $\Delta_{i^*\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(*,\ i_n\varepsilon+\varepsilon)=\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q],n}M_{\alpha[q]}(\cdot)+\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)$, 则有

$$\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i^*\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(*,\ i_n\varepsilon+\varepsilon)=\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)+\sum{}'\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{\overline{PK}[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot),\tag{3.17}$$

其中，求和 $\sum'$ 遍及这样一些项，使每个被加项中的 $\overline{PK}[q]$ $(1\leqslant q\leqslant r)$ 或等于 $PK[q]$ 或等于 $(PK[q],\ n)$，而且至少存在某个 q 使后者成立，应用引理 3.2 于 $g=f^{\alpha(r)}$ 得

$$\sum_i\Delta_\delta^n f^{\alpha(r)}(M(i^*,\ \cdot),\ i^*,\ \cdot)\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{\overline{PK}[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)+o(\varepsilon),\tag{3.18}$$

由(3.16)、(3.18)、(3.3)得

$$\begin{aligned}\sum_i B_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon)=&\sum_i\Delta_\delta^n f^{\alpha(r)}(M(i^*\varepsilon,\ \cdot),\ i^*\varepsilon,\ \cdot)\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)+o(\varepsilon)\\=&\sum_i\sum_{\alpha[r+1]=1}^{m}\int_\delta f^{\alpha(r+1)}(M(i^*\varepsilon,\ z_n),\ i^*\varepsilon,\ z_n)M_{\alpha[r+1]}(i^*,\ dz_n)\\&\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)+o(\varepsilon).\end{aligned}\tag{3.20}$$

下面进一步证明

$$\sum_i B_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon)=\sum_i\sum_{\alpha[r+1]=1}^{m}I_{\alpha(r+1)}^{PK(r);n}(i\varepsilon)+o(\varepsilon).\tag{3.21}$$

事实上，若令 $D_i=\underset{1\leqslant q\leqslant r}{\times}\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]}\times\Delta_{i\varepsilon}^n$, $0\leqslant i<2^N\varepsilon$, 显然 $\{D_i\}$ 两两不交且 $\forall i$, $\{\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]},\ \Delta_{i\varepsilon}^n,\ 1\leqslant q\leqslant r\}$ 有关系 $(PK(r);\ n)$, 令

$$h^\varepsilon(\xi^{(r+1)})=\sum_i[f^{\alpha(r+1)}(M(i^*\varepsilon,\ \xi_n^{r+1}),\ i^*\varepsilon,\ \xi_n^{r+1})-f^{\alpha(r+1)}(M_{i\varepsilon},\ i\varepsilon)]I_{D_i}(\xi^{(r+1)}),$$

则(3.20), (3.21)右端之差等于

$$\sum_{\alpha[r+1]=1}^{m}\int_{R_\varepsilon^{r+1}}h^\varepsilon dM_{\alpha(r+1)}.\tag{3.22}$$

显然，对几乎一切固定的 ω, 当 $\varepsilon\to0$ 时, $h^\varepsilon(\xi^{(r+1)})$ 在 R_ε^{r+1} 上有界地趋于 0, 由定理 2.7 得(3.22)依概率趋于 0, 即(3.21)成立。令

$$B_r^{n-1}(i\varepsilon)=\sum_{\alpha(r)}\sum_{PK(r)\in\mathscr{S}(n-1|r)}B_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon),\quad 1\leqslant r\leqslant n-1,\tag{3.23}$$

由(3.21)得

$$\sum_i B_r^{n-1}(i\varepsilon)=\sum_i\sum_{\alpha(r+1)}\sum_{PK(r)\in\mathscr{S}(n-1|r)}I_{\alpha(r+1)}^{PK(r);n}(i\varepsilon)+o(\varepsilon).\tag{3.24}$$

若取 $\bar{k}_q=k_q(1\leqslant q\leqslant r)$, $\bar{k}_{r+1}=n$, $\overline{PK}(r+1)=(PK(r);\ n)$, 则(3.24)可写成

$$\sum_i B_r^{n-1}(i\varepsilon)=\sum_i\sum_{\alpha(r+1)}\sum_{\overline{PK}(r+1)\in S(n|r+1),\bar{k}_{r+1}-\bar{k}_r=1} I_{\alpha(r+1)}^{\overline{PK}(r+1)}(i\varepsilon)+o(\varepsilon), \tag{3.25}$$

由于 $f^{\alpha(r+1)}$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r+1}$ 的顺序无关，故有 $I_{\alpha(t-1),\alpha[r+1],\alpha[t,r]}^{PK(t-1);n;PK[t,r]}(i\varepsilon)=I_{\alpha(r+1)}^{\overline{PK}(r+1)}(i\varepsilon)$，$1\leqslant t\leqslant r+1$. 如同得到(3.25)一样可得

$$\sum_i B_{r+1}^{n-1}(i\varepsilon)=\frac{1}{r+1}\sum_i\sum_{\alpha(r+1)}\sum_{t=1}^{r+1}\sum_{\overline{PK}(r+1)\in S(n|r+1),\bar{k}_{t+1}-\bar{k}_t=1} I_{\alpha(r+1)}^{\overline{PK}(r+1)}(i\varepsilon)+o(\varepsilon),\quad 1\leqslant r\leqslant n-1, \tag{3.26}$$

令

$$A_r^{n-1}(i\varepsilon)=\sum_{\alpha(r)}\sum_{PK(r)\in S(n-1|r)} A_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon),\quad 1\leqslant r\leqslant n-1, \tag{3.27}$$

对 $A_{\alpha(r)}^{PK(r)}(i\varepsilon)$ 作类似的讨论得

$$\sum_i A_r^{n-1}(i\varepsilon)=\sum_i\sum_{\alpha(r)}\sum_{t=1}^{r}\sum_{\overline{PK}(r)\in S(n|r),\bar{k}_{t+1}-\bar{k}_t\geqslant 2} I_{\alpha(r)}^{\overline{PK}(r)}(i\varepsilon)+o(\varepsilon),\quad 1\leqslant r\leqslant n-1, \tag{3.28}$$

由(3.26), (3.28)得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_i A_1^{n-1}(i\varepsilon)=\sum_i S_1^n(i\varepsilon)+o(\varepsilon),\\&\sum_i\left(A_{r+1}^{n-1}(i\varepsilon)+(r+1)B_r^{n-1}(i\varepsilon)\right)=\sum_i S_{r+1}^n(i\varepsilon)+o(\varepsilon),\quad 1\leqslant r\leqslant n-2,\\&\sum_i B_{n-1}^{n-1}(i\varepsilon)=\frac{1}{n}\sum_i S_n^n(i\varepsilon)+o(\varepsilon).\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

由(3.13)、(3.14)、(3.16)、(3.23)、(3.27)、(2.29)得

$$\begin{aligned}\Delta_{(0,e]}f(M.,\cdot)&=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r!}\sum_i\left(A_r^{n-1}(i\varepsilon)+B_r^{n-1}(i\varepsilon)\right)+o(\varepsilon)\\&=\sum_i A_1^{n-1}(i\varepsilon)+\sum_{r=1}^{n-2}\sum_i\left(\frac{1}{(r+1)!}A_{r+1}^{n-1}(i\varepsilon)+\frac{1}{r!}B_r^{n-1}(i\varepsilon)\right)\\&\quad+\frac{1}{(n-1)!}\sum_i B_{n-1}^{n-1}(i\varepsilon)+o(\varepsilon)\\&=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\sum_i S_r^n(i\varepsilon)+o(\varepsilon).\end{aligned}$$

证毕.

引理 3.4　设 $g(\xi)$, $\xi\in T$ 是 $\mathscr{F}_\xi$ 适应连续过程, $PK(r)\in S(n|r)$, $1\leqslant r\leqslant n$, 则有

$$p\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_i g(i\varepsilon)\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)=\int_{R_\xi^r} g(\vee\xi^{(r)})I_{GPK(r)}(\xi^{(r)})dM_{\alpha(r)}(\xi^{(r)}),$$

其中 p-lim 表依概率收敛的极限.

证　若令

$$D_i^\varepsilon=\underset{1\leqslant q\leqslant r}{\times}\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]},\quad D^\varepsilon=\bigcup_i D_i^\varepsilon,\quad D=GPK(r),\quad g^\varepsilon(\xi^{(r)})=\sum_i g(i\varepsilon)I_{D_i^\varepsilon}(\xi^{(r)}),$$

则有

$$\sum_i g(i\varepsilon)\prod_{q=1}^{r}\Delta_{i\varepsilon}^{PK[q]}M_{\alpha[q]}(\cdot)=\int_{R_\xi^r} g^\varepsilon dM_{\alpha(r)}.$$

因为对几乎一切固定的 ω, $\{g^\varepsilon(\xi^{(r)})\}$ 在 R_e^r 上关于 ε 一致有界，按定理 2.7 及其后的注，只须证明，$\forall\xi^{(r)}\in R_e^r$ 有 $g^\varepsilon(\xi^{(r)})\xrightarrow{a.s.}g(\vee\xi^{(r)})I_D(\xi^{(r)})\ (\varepsilon\to 0)$，显然 $D^\varepsilon\subset D$，故

$$\begin{aligned}|g(\vee\xi^{(r)})I_D-g^\varepsilon(\xi^{(r)})|&=|g(\vee\xi^{(r)})-g^\varepsilon(\xi^{(r)})|I_D\\&=|g(\vee\xi^{(r)})-g^\varepsilon(\xi^{(r)})|I_{D^\varepsilon}+|g(\vee\xi^{(r)})|I_{D\setminus D^\varepsilon}.\end{aligned}$$

若 $\xi^{(r)}\in D^\varepsilon$，则存在某个 i，使 $i\varepsilon<\vee\xi^{(r)}\leqslant(i+e)\varepsilon$，故 $d(\vee\xi^{(r)},i\varepsilon)\leqslant\sqrt{n}\,\varepsilon\to 0\ (\varepsilon\to 0)$

(其中 $d(\xi, \eta)\triangleq\left(\sum_{l=1}^{n}(\xi_l-\eta_l)^2\right)^{1/2}$), 进而, $|g(\vee\xi^{(r)})-g^{\varepsilon}(\xi^{(r)})|I_{D^{\varepsilon}}\xrightarrow{a.s.}0\ (\varepsilon\to 0)$. 另外, 若 $\xi^{(r)}\in D\triangleq GPK(r)$, 即

$$\xi_l^q>\max_{t\neq q}\xi_l^t,\quad l\in PK_q,\quad 1\leqslant q\leqslant r,$$

所以, 只要 ε 充分小, 就存在 i 使

$$\max_{t\neq q}\xi_l^t<i_l\varepsilon<\xi_l^q\leqslant i_l\varepsilon+\varepsilon.$$

故 $\xi^{(r)}\in D^{\varepsilon}$, 即 $D\backslash D^{\varepsilon}\to\phi(\varepsilon\to 0)$, $g(\vee\xi^{(r)})I_{D\backslash D^{\varepsilon}}\to 0(\varepsilon\to 0)$, 证毕.

现在将引理 3.4 用于 $g=f^{\alpha(r)}$, 由(3.10), (3.11), (3.12)和(2.8)得到(3.4), 定理 3.1 得证.

现假设 $\{W_z, \mathscr{F}_z, z\in T\}$ 是 n 维参数的 Wiener 过程, 定义鞅 $M=(M_1, \cdots, M_m)$是 Wiener 泛函 $M_{qz}=\int_{R_z}\varphi_q(\xi)W(d\xi)\ (1\leqslant q\leqslant m)$, 其中, $\varphi_q\in L^2(T)$是非随机函数, 令

$$V_{\alpha(2)}(z)=\int_{R_z}\varphi_{\alpha_1}(\xi)\varphi_{\alpha_2}(\xi)d\xi,\quad 1\leqslant\alpha_1,\ \alpha_2\leqslant m.$$

应用定理 3.1 于此时的强鞅组 M, 得到

推论 3.5 若 $f(u, z)$ 满足定理 3.1 的条件, 则

$$f(M_z, z)=\text{const}+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\sum_{\alpha(r)}\int_{R_z^r}f^{\alpha(r)}(M(\vee\xi^{(r)}), \vee\xi^{(r)})I_{G(n|r)}\prod_{q=1}^{r}\varphi_{\alpha[q]}(\xi^q)W(d\xi^1)\cdots W(d\xi^r),$$

其中 const 表示与 ω 无关, 但可与 z 有关的函数.

推论 3.6(参见[1]定理 6.1 的推论) 设 X 是 $\{W_z, z\in R_e\}$ 的一个平方可积泛函, 那末 X 可表为

$$X=E[X]+\sum_{r=1}^{n}\int_{R_e^r}\Psi_r(\xi^{(r)})W(d\xi^1)\cdots W(d\xi^r),\ \text{其中},\ \Psi_r\in L^2_{\underbrace{W\cdots W}_{r}}(e;\ n|r).$$

推论 3.7 若取 $\mathscr{F}_z=\sigma\{W_\xi, \xi\leqslant z\}$, 则每个平方可积 $\mathscr{F}_z$ 适应鞅 M_z 可表为

$$M_z=M_0+\sum_{r=1}^{n}\int_{R_z^r}\Psi_r(\xi^{(r)})W(d\xi^1)\cdots W(d\xi^r).$$

由此可知, 每个平方可积的 $\mathscr{F}_z$ 适应鞅有连续修正.

注 [7]Yor, M., 利用指数鞅的随机积分公式, 得到在 n 维参数情形将平方可积鞅表示为关于 Wiener 过程和 Poisson 过程的积分形式, 首先解决了 Wong, E. 和 Zakai, M. 在[1]中提出的问题.

参 考 文 献

[1] Wong, E. and Zakai, M., Martingales and Stochastic integrals for processes with a multidemensional prameter, *Z. Wahr. Verw Geb*, **29** (1974) 109—122.

[2] Wong, E. and Zakai, M., Weak martingales and stochastic integrals in the plane, *Ann Prabability*, **4** (1976), 570—586.

[3] Cairoli, R. and Walsh, J. B., Stochastic integrals in the plane, *Acta Math.* **134** (1975), 111—183.

[4] Walsh, J. B., Convergence and Regularity of multiparameter strong martingales. *Z. Wahr, Verw Geb*, **46**:2 (1979) 177—192.

[5] Wong, E. and Zakai, M., An extention of Stochactic integrales in the plane. *Ann Probability*, **5**:5 (1977), 770—778.

[6] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社.

[7] Yor, M., Représentation des martingales de caré intégrable relative aux processus de Wiener et de Poisson à n paramètres. *Z. Wahr. Verw. Geb.*, **35** (1976), 121—129.

ON STOCHASTIC INTEGRALS FOR STRONG MARTINGALES WITH n-DIMENSIONAL PARAMETER

NIE ZANKAN
(*Xibei University*)

ABSTRACT

In this paper, we define $PK_{(r)}$-predictable process $\Phi(\xi^1, \cdots, \xi^r)$ ($\xi^q \in R_+^n$, $1 \leqslant q \leqslant r \leqslant n$) and its r-iterated stochastic integral with respect to a group of strong martingales $M = (M_1, \cdots, M_r)$ with n-dimensional parameter. We can express functional of strong martingale with proper properties by these stochastic integrals. Particularly, square integrable functionals and martingale of Wiener process with n-dimensional parameter are expressed by them so that the problem suggested by Wong, E. and Zakai, M. in [1] is solved with a method which differs from the method in [7].