数学年刊
3 (6) 1982

具有极大条件的乘格

谢冰璋
(杭州大学)

在文献[1—5]里，分别讨论了结合环、非结合环、两非环中的理想和群里的正规子群的准素分解问题．本文建立了乘格的概念，在此概念下统一讨论了准素分解问题，从而使上述文献中的一系列结果为本文的特例，且有的结论较上面列举者强．其次，本文对乘格定义了完备格的根，并对具有某些条件的乘格给出其结构定理．

§1. 乘格的定义及例子

定义1.1 一个格称为乘格，记作 $\{L, \leqslant, \cdot\}$，如果它满足：

1° $\{L, \leqslant\}$ 是一个完备格，且是 Dedekind 的，L 的最大下界记为 0，最小上界记作 1.

2° 集合 L 对乘法封闭，且 $a\cdot b\leqslant a\cap b$.

3° $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$.

例1 R 是结合环，$L_1(R)$：R 的所有理想，“$\leqslant$”为通常集合的包含关系“$\subseteq$”，乘法“$\cdot$”定义为理想的积，显然，$\{L_1(R), \leqslant, \cdot\}$ 满足 1°、2°、3°.

例2 R 是非结合环，$L_2(R)$：R 的所有理想，对于 $A, B\in L_2(R)$，定义 $A\cdot B$ 是由集合 $\{ab\,|\,a\in A,\ b\in B\}$ 生成的理想，显见，$L_2(R)$ 关于此乘法及集合的包含关系构成乘格.

例3 R 是两非环，$L_3(R)$：R 的所有理想，对于 $A, B\in L_3(R)$，定义 $A\cdot B$ 为 $[A, B]$ 生成的理想，记为 $[\![A, B]\!]$，其中$[\ ,\ ]$表示[3]中定义的乘法．不难核实 $[\![A+C, B]\!]=[\![A, B]\!]+[\![C, B]\!]$，从而 $L_3(R)$ 也成一乘格.

例4 G 是乘群，$L(G)$：G 的所有正规子群，对于 $A, B\in L(G)$，它们的最小上界 $A+B$ 为正规子群 AB，$A\cap B$ 是 A、B 的最大下界．乘法定义为：$A\cdot B=[A, B]$ 表示由换位子 $[a, b]=aba^{-1}b^{-1}$ 生成的子群，其中 $a\in A$, $b\in B$．由 $g[a, b]g^{-1}=gaba^{-1}b^{-1}g^{-1}=gag^{-1}gbg^{-1}ga^{-1}g^{-1}gb^{-1}g^{-1}=a'b'a'^{-1}b'^{-1}=[a', b']$，知 $L(G)$ 对乘法封闭．容易核实 $L(G)$ 满足 1°, 2°．下面证明 $L(G)$ 满足 3°.

对于 $A, A_1, A_2\in L(G)$，易见

$$A\cdot A_1+A\cdot A_2=[A, A_1][A, A_2]\subseteq[A, A_1A_2]=A\cdot(A_1+A_2).$$

反过来，设 $a'=[a, a_1a_2]$，其中 $a_i\in A_i$，于是有

本文1980年8月27日收到.

$$a'=a(a_1a_2)a^{-1}(a_1a_2)^{-1}=aa_1a^{-1}a_1^{-1}a_1aa_2a^{-1}a_2^{-1}a_1^{-1}$$
$$=[a,\ a_1]a_1[a,\ a_2]a_1^{-1}=[a,\ a_1][c,\ d].$$

其中 $c\in A$, $d\in A_2$. 因此得 $a'\in[A,\ A_1][A,\ A_2]=A\cdot A_1+A\cdot A_2$, 即 $A\cdot(A_1+A_2)=A\cdot A_1+A\cdot A_2$. 再由 $[a,\ b]=[b,\ a]^{-1}$ 知 $A\cdot(A_1+A_2)=(A_1+A_2)\cdot A$, 故 $L(G)$ 满足 3°, 是一乘格.

下面我们把 $\{L,\ \leqslant,\ \cdot\}$ 简记作 L, 记其中元为 A, B, $\cdots$, a, b, $\cdots$. $A\cdot B$ 记为 AB. 记 $a<b$ 为 $a\leqslant b$ 且 $a\neq b$. 即表示 $a\leqslant b$ 和 $b\nleqslant a$, 后者表示 b 与 a 没有关系.

易证:

性质 1.1 $a+T>T$, 当且仅当 $a\nleqslant T$.

利用 $a\leqslant b$ 得 $a+b=b$, 可证:

性质 1.2 若 $a\leqslant b$, 则 $ac\leqslant bc$, $ca\leqslant cb$.

定义 1.2 乘格 L 满足极大条件, 如果 L 的任一非空集合都有极大元.

显然, 它与升链条件等价.

§2、§3 两部分都在 L 满足极大条件的情况下讨论, 下面不再将这一条件累述了.

§2. (右)第三分解

A, $B\in L$, 记集合 $\mathscr{A}_{A:B}=\{x\in L\,|_{xB\leqslant A}\}$ 的最小上界为 $A:B$, 称 A 关于 B 的左剩余. 同样, 记 $\mathscr{B}_{A::B}=\{x\in L\,|_{Bx\leqslant A}\}$ 的最小上界为 $A::B$, 称 A 关于 B 的右剩余. 易见, $A\in\mathscr{B}_{A::B}$, 事实上, $B\leqslant 1$, 由性质 1.2 及定义 1.1 中 2° 知, $BA\leqslant 1A\leqslant A$.

L 满足极大条件, 由[6]知, 它的每一个元都是紧致的, 故 $A::B=x_1+\cdots+x_n$, 其中 $x_i\in\mathscr{B}_{A::B}$. 易证 $A::B\in\mathscr{B}_{A::B}$; $u\leqslant A::B$ 的充要条件是 $u\in\mathscr{B}_{A::B}$; 及当 $X\leqslant Y$ 时, $A::X\geqslant A::Y$ 成立.

对 $A:B$ 也有同样的性质.

$T\in L$, 记集合 $\mathfrak{S}_T=\{x\in L\,|\,(T::X)\cap Y=T$ 推出 $Y=T\}$ 的最小上界 $t(T)$ 为 T 的第三(右)根. 由于 $T::T=1$, 所以, $T\in\mathfrak{S}_T$ 及 $T\leqslant t(T)$.

由元的紧致性知, $t(T)=t_1+\cdots+t_m$, 其中 $t_i\in\mathfrak{S}_T$, 可证 $t(T)\in\mathfrak{S}_T$. 事实上, 只要证明, 若 $X, Y\in\mathfrak{S}_T$, 则 $X+Y\in\mathfrak{S}_T$ 就够了. 由定义知, 对于任意元 $Z>T$, 有 $(T::X)\cap Z>T$, 令 $a=(T::X)\cap Z\nleqslant T$, 由此式得 $Xa\leqslant T$; $a\leqslant Z$; 及 $T+a>T$. 由 $Y\in\mathfrak{S}_T$ 推出 $(T::Y)\cap(T+a)>T$, 根据模律有 $(T::Y)\cap(T+a)=T+a\cap(T::Y)>T$, 由性质 1.1 知, $a'=a\cap(T::Y)\nleqslant T$, 由此得出, $a'\leqslant a\leqslant Z$ 及 $Ya'\leqslant T$. 故有 $(X+Y)a'=Xa'+Ya'\leqslant Xa+Ya'\leqslant T$, 即 $a'\leqslant T::(X+Y)$, 因此 $(T::(X+Y))\cap Z>T$, 也就是

$$X+Y\in\mathfrak{S}_T.$$

另外, 还可证: $u\leqslant t(T)$ 当且仅当 $u\in\mathfrak{S}_T$.

定义 2.1 称 L 的元 T 为(右)第三元, 如果 $T::X=T$ 成立, 对于任何元 $X\nleqslant t(T)$.

命题 2.1 L 的每一个既约元 T 都是(右)第三元.

证 若 T 不是(右)第三元, 由定义知, 存在 $X\nleqslant t(T)$, 使得 $T::X>T$. 再从 $X\nleqslant t(T)$ 知 $X\notin\mathfrak{S}_T$, 于是存在元 $Y>T$, 使得 $(T::X)\cap Y=T$ 成立, 与 T 是既约元矛盾.

命题 2.2 L 的任意元 A 是有限多个既约元的最大下界，或称 A 可分解为有限多个既约元的交.

证 (略). 综合上面两命题可得:

命题 2.3 L 里每一个元都可分解为有限多个(右)第三元的交.

可与[2]一样定义既约分解及正规分解. 利用上面建立的概念及得到的结果，仿照[2]的证明步骤可以证明:

定理 2.4 L 中每一个元都有正规的(右)第三分解，且若 $A=T_1\cap\cdots\cap T_n=T'_1\cap\cdots\cap T'_m$ 是两个正规的(右)第三分解，则 $m=n$，且适当调换次序，可使

$$t(T_i)=t(T'_i)\quad 1\leqslant i\leqslant n=m.$$

§3. (右)准素分解及素分解

$a\in L$，记 $a^i=a^{i-1}\cdot a$，元 a 的超乘幂记为 $a^{n_1,\cdots,n_r}=((\cdots((a^{n_1})^{n_2})^{n_3}\cdots)^{n_{r-1}})^{n_r}$，其中 $n_1,\cdots,n_r$ 为任一组正整数. 记 $a^{(0)}=a$，$a^{(i)}=a^{(i-1)}a^{(i-1)}$，元 a 的可解乘积记为:

$$a^{(n_1),\cdots,(n_r)}=((\cdots((a^{(n_1)})^{(n_2)})^{(n_3)}\cdots)^{(n_{r-1})})^{(n_r)}.$$

参阅[3]易证:

性质 3.1 (1) $a^{(n_1),\cdots,(n_r)}\leqslant a^{n_1,\cdots,n_r}$.

(2) $a_1,a_2\in L$，k 是正整数，则 $(a_1+a_2)^{2k}\leqslant a_1^k+a_2^k$.

性质 3.2 m 为正整数，$n_1,\cdots,n_r$ 是一组非负整数，那末有

(1) $a^{(m)}=a^{\overbrace{2,2,\cdots,2}^{m\text{个}}}$.

(2) $a^{(n_1),\cdots,(n_r)}=a^{(n_1+\cdots+n_r)}$.

性质 3.3 $a_1,\cdots,a_r\in L$，$k_1,\cdots,k_s$ 是任一组正整数，则存在适当大的正整数 α 使得下列关系成立

$$(a_1+\cdots+a_r)^{\alpha k_1,\cdots,\alpha k_s}\leqslant a_1^{k_1,\cdots,k_s}+a_2^{k_1,\cdots,k_s}+\cdots+a_r^{k_1,\cdots,k_s}.$$

定义 3.1 称 L 的元 P 为素元，如果 $P:X=P::X=P$ 成立，对于任何 $X\nleqslant P$.

显然，此定义与“$XY\leqslant P$，其中 $X\nleqslant P$(或 $Y\nleqslant P$)能推出 $Y\leqslant P$(或 $X\leqslant P$)”等价.

称集合 $\mathfrak{P}_A=\{x\in L|_{A<x,x\text{为}L\text{的素元}}\}$ 的最小下界 $r(A)=\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{P}_A}X$ 为 A 的根.

定义 3.2 $Q\in L$ 称为(右)准素元，如果 $Q::X=Q$ 成立，对于任意 $X\nleqslant r(Q)$.

定义 3.3 称 L 具有 Artin-Rees 性质，如果 $A,B\in L$，对于任意正整数 n 和任意型 ν，存在一个正整数 $h(n)$ 和型 μ，使得 $P_{h(n)}^{(\mu)}(A)\cap B\leqslant P_n^{(\nu)}(A)B$. 其中 $P_n^{(\nu)}(A)$ 表示 A 的 n 次固定型 ν 的幂.

特别地，若 L 具有 Artin-Rees 性质，则存在整数 $h>0$ 及型 μ，使得

$$P_h^{(\mu)}(A)\cap B\leqslant AB.$$

命题 3.1 如果 L 具有 Artin-Rees 性质，那末 $t(A)\leqslant r(A)$. 从而，(右)第三元一定是(右)准素元.

证 $t(A)(A::t(A))\leqslant A$，由于 L 具有性质知，存在整数 $h>0$ 及型 μ，使得

$$A\geqslant t(A)(A::t(A))\geqslant P_h^{(\mu)}(t(A))\cap(A::t(A)).$$

由 $(A::t(A))\cap(A+P_h^{(\mu)}(t(A)))=A+P_h^{(\mu)}(t(A)))\cap(A::t(A))=A$ 及 $t(A)\in\mathfrak{S}_A$, 得 $A+P_h^{(\mu)}(t(A))=A$, 于是 $P_h^{(\mu)}(t(A))\leqslant X_i$, 其中 X_i 为素元, 且有性质 $X_i\geqslant A$, 由 X_i 的素性知, $t(A)\leqslant X_i$, 故 $t(A)\leqslant\bigcap_{x_i\in\mathfrak{P}_A}X_i=r(A)$

因此有:

定理 3.2 若 L 有 Artin-Rees 性质, 那末 L 的每一个元可分解为有限多个(右)准素元的交.

定义 3.4 $m\in L$, 称 A 是 m-超幂零的, 若存在正整数 $n_1,\cdots,n_r$ 使得 $A^{n_1,\cdots,n_r}\leqslant m$, 否则称 A 为 m-非超幂零的.

命题 3.3 $A\in L$ 是 m-非超幂零元, 则必存在素元 P_A, 使得 $m\leqslant P_A$, $A^{n_1,\cdots,n_s}\nleqslant P_A$, 其中 $n_1,\cdots,n_s$ 是任意一组正整数.

证 $W=\{x\in L|_{m\leqslant x,\ A^{n_1,\cdots,n_r},\ x,n_1,\cdots,n_r\text{是任意一组正整数}}\}$. 由 $m\in W$ 知, W 为非空, 记它的极大元为 P_A.

若 P_A 不是素元, 存在 $B, C\nleqslant P_A$, 而 $BC\leqslant P_A$. 由 P_A 的极大性知, 存在 $n_1,\cdots,n_s$ 及 $t_1,\cdots,t_r$ 使得 $A^{n_1,\cdots,n_s}\leqslant P_A+B$, $A^{t_1,\cdots,t_r}\leqslant P_A+C$. 于是

$$A^{n_1,\cdots,n_s,t_1,\cdots,t_r,2}\leqslant A^{n_1,\cdots,n_s,t_1,\cdots,t_r}A^{n_1,\cdots,n_s,t_1,\cdots,t_r}\leqslant(P_A+B)(P_A+C)$$

$$\leqslant P_A,\ \text{与}\ P_A\in W\ \text{矛盾}$$

证毕.

命题 3.4 存在一组正整数 $n_1,\cdots,n_r$ 使得 $r(A)^{n_1,\cdots,n_r}\leqslant A$.

证 若对于任意一组正整数 $n_1,\cdots,n_r$ 都有 $r(A)^{n_1,\cdots,n_r}\nleqslant A$, 即 $r(A)$ 是 A-非超幂零的, 于是存在素元 $P_{r(A)}$ 使得 $A\leqslant P_{r(A)}$ 及 $r(A)^{n_1,\cdots,n_r}\nleqslant P_{r(A)}$, 其中 $n_1,\cdots,n_r$ 为任意一组正整数. 这与 $r(A)=\cap X\leqslant P_{r(A)}$ 矛盾.

利用此结果, 仿照[2]中证明步骤可得:

定理 3.5 若 L 中每个元都可以表为有限多个准素元的交, 那末 L 具有 Artin-Rees 性质.

称集合 $\mathfrak{S}'_T=\{x\in L|_{(T:x)\cap Y=T\ \text{推出}\ Y=T}\}$ 的最小上界 $t'(T)$ 为 T 的第三(左)根, 它有与第三(右)根一样的性质, 类似定义(左)第三元.

定义 3.5 称 A 为第三元, 如果 A 是(右)第三元, 又是(左)第三元.

命题 3.6 A 是第三元, 则 A 是素元的充要条件是 $A=t(A)=t'(A)$.

证 显见充分性及 $A\leqslant t(A)$, $A\leqslant t'(A)$, 若 $t(A)\nleqslant A$, 由 $t(A)\in\mathfrak{S}_A$ 知 $(A::t(A))\cap(A+t(A))>A$, 即 $b=(A::t(A))\cap t(A)\nleqslant A$, 由此得 $b\leqslant A::t(A)$, 于是有 $t(A)b\leqslant A$ 成立, 与 A 是素元矛盾.

同理可证 $A\leqslant t'(A)$

证毕.

命题 3.7 若元 A 具有性质: $C^2\leqslant A$, 推出 $C\leqslant A$, 那末 $A=t(A)=t'(A)$.

证 只要证 $A\geqslant t(A)$ 就够了. 若 $t(A)\nleqslant A$, 于是 $(A::t(A))\cap(A+t(A))>A$, 令 $b=(A::t(A))\cap t(A)\nleqslant A$. 故有 $t(A)b\leqslant A$ 及 $b\leqslant t(A)$, 从而 $b^2\leqslant t(A)b\leqslant A$, 推得 $b\leqslant A$ 与 $b\nleqslant A$ 矛盾.

由第三元的定义知, 既约元都是第三元, 故有

定理 3.8 L 的每一个元 A 都可分解为有限多个第三元的交.

定理 3.9 L 的元具有性质：$C^2\leqslant A$ 推出 $C\leqslant A$，那末 A 可分解为有限多个素元的交.

证　$A=T_1\cap\cdots\cap T_n$ 是 A 的第三分解，T_i 是第三元，由于 A 具有上述性质，不难证明，T_i 具有上述性质，于是由命题 3.4 知 $t(T_i)=t'(T_i)=T_i$，$i=1, 2, \cdots, n$. 再利用命题 3.6 即可得.

§4. 乘格的可解根

定义 4.1 $a, b\in L$，称 a 与 b 有关系 ρ，记 $a\rho b$，当且仅当存在一组正整数 $n_1, \cdots, n_s$，使得 $a^{n_1,\cdots,n_s}\leqslant b\leqslant a$ 成立.

作链 $u_0(L, \rho)=0$，$u_1(L, \rho)=\sum\{p|p\rho_0\}$，假设 $\nu<\lambda$ 时 $u_\nu(L, \rho)$ 已定义，那末当 λ 是极限序数时，定义 $u_\lambda(L, \rho)=\sum\{u_\nu(L, \rho), \nu<\lambda\}$；当 λ 不是极限序数时，$u_\lambda(L, \rho)=\sum\{p|p\rho u_{\lambda-1}(L, \rho)\}$. 如此得升链 $u_0(L, \rho)\leqslant u_1(L, \rho)\leqslant\cdots\leqslant u_\lambda(L, \rho)\leqslant\cdots$ 存在一个最小的 τ，使得 $u_\tau(L, \rho)=u_{\tau+1}(L, \rho)=\cdots$ 由[7]知，在集合 $\{x\in L|u_\tau(L, \rho)\leqslant x\leqslant 1\}$ 里不存在非零元 X，使得 $X\rho 0$ 成立.

命题 4.1 L 是满足极大条件的乘格，则 $u_\tau(L, \rho)=u_1(L, \rho)$.

证　由于 L 满足极大条件，上述升链在有限处中断，即 $u_\tau(L, \rho)=u_m(L, \rho)$. 只要证明 $u_m(L, \rho)\leqslant u_1(L, \rho)$就行了.

由定义知，存在 $m_1, \cdots, m_h$; $t_1, \cdots, t_s, \cdots, r_1, \cdots, r_k$ 分别使得 $u_m(L, \rho)^{m_1,\cdots,m_h}\leqslant u_{m-1}(L, \rho)\leqslant u_m(L, \rho)$，$u_{m-1}(L, \rho)^{t_1,\cdots,t_s}\leqslant u_{m-2}(L, \rho)\leqslant u_{m-1}(L, \rho)$，$\cdots$，$u_1(L, \rho)^{r_1,\cdots,r_k}\leqslant u_0(L, \rho)\leqslant u_1(L, \rho)$成立. 因此 $u_m(L, \rho)^{m_1,\cdots,m_h,t_1,\cdots,t_s,\cdots,r_1,\cdots,r_k}\leqslant 0\leqslant u_m(L, \rho)$，即 $u_m(L, \rho)\rho 0$，于是得证.

由[7]知 $u_1(L, \rho)$是根，记为 u.

定义 4.2 称 u 为 L 的可解根. 当 $u=0$ 时，称 L 是半单的

易证，$a\leqslant u$ 当且仅当存在一组正整数 $n_1, \cdots, n_r$，使得 $a^{n_1,\cdots,n_r}=0$ 及 u 具有性质 $a^2\leqslant u$ 推出 $a\leqslant u$，于是有

命题 4.2 在满足极大条件的乘格里，u 可以表成有限多个素元的交.

定义 4.3 $a, b\in L$，称 a, b 互素，如果 $a+b=1$ 成立.

命题 4.3 乘格 L 里，如果 $1\cdot 1=1$，且 P_1, P_2 互素，P_1, P_3 互素，则 P_1 与 $P_2\cap P_3$ 互素.

证　只要证 $1\leqslant P_1+P_2\cap P_3$ 即可. 事实上，$1=1\cdot 1=(P_1+P_2)(P_1+P_3)=P_1^2+P_2P_1+P_1P_3+P_2P_3\leqslant P_1+P_2\cap P_3$.

不难得到，在上面的乘格里，若 $P_1, \cdots, P_n$ 两两互素，那末 P_i 与 $R_i=P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap P_{i+1}\cap\cdots\cap P_n$ 互素.

定义 4.4 元 a 称为元 $b_1, \cdots, b_n$ 的直和，记为 $a=b_1\dotplus b_2\dotplus\cdots\dotplus b_n$，如果满足：(1) $a=b_1+\cdots+b_n$ (2) $(b_1+\cdots+b_{i-1})\cap b_i=0$，$i=2, \cdots, n$.

定理 4.4 在满足极大条件的乘格 L 里，$1=1\cdot 1$ 成立，且 L 是半单的，即 $u=0=\bigcap_{i=1}^{n}P_i$，其中 P_i 与 $P_j(i\neq j)$互素，那末 $1=R_1\dotplus\cdots\dotplus R_n$

其中 $$R_i=P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap P_{i+1}\cap\cdots\cap P_n.$$

证 由上面讨论知, P_i 与 R_i 互素, 即

$$P_1+R_1=1,\quad R_1\leqslant P_i\quad i\neq 1;$$

(2) $$P_2+R_2=1\quad R_2\leqslant P_i,\quad i\neq 2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(n) $$P_n+R_n=1\quad R_n\leqslant P_i,\quad i\neq n.$$

由(2)得 $P_1=1\cap P_1=(R_2+P_2)\cap P_1=R_2+P_1\cap P_2$, 代入(1) $1=P_1\cap P_2+R_1+R_2$, 假设 $1=P_1\cap\cdots\cap P_{k-1}+R_1+\cdots+R_{k-1}$ 成立, 由(k)得

$$P_1=1\cap P_1=(P_k+R_k)\cap P_1=R_k+P_1\cap P_k,$$

代入上式得

$$\begin{aligned}1&=(R_k+P_1\cap P_k)\cap(P_2\cap\cdots\cap P_{k-1})+R_1+\cdots+R_{k-1}\\&=P_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_{k-1}\cap P_k+R_1+\cdots+R_{k-1}+R_k,\end{aligned}$$

成立. 所以

$$1=P_1\cap\cdots\cap P_{n-1}+R_1+\cdots+R_{n-1}=R_1+\cdots+R_n.$$

若 $(R_1+\cdots+R_{i-1})\cap R_i\neq 0$, 存在 $0\neq a\in(R_1+\cdots+R_{i-1})\cap R_i$ 即 $a\leqslant R_1+\cdots+R_{i-1}$, $a\leqslant R_i$, 于是 $a^2=a\cdot a=R_i(R_1+\cdots+R_{i-1})=R_iR_1+\cdots+R_iR_{i-1}\leqslant R_i\cap R_1+\cdots+R_i\cap R_{i-1}$ 而 $R_i\cap R_j=P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap P_{i+1}\cap\cdots\cap P_n\cap P_i=0$, $j<i$, 因此 $a^2=0=u$, 于是 $a=0$.

证毕.

参考文献

[1] Chew, K. L., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**:4(1964), 925—932.
[2] Kurata, Y., *Math. Z.*, **88**(1965), 129—135.
[3] 许永华，中国科学，**4**(1978), 363—373.
[4] 许永华，数学学报，**21**:4(1978), 289—300.
[5] Kurata, Y., Osaka. *J. Math.*, **1**(1964), 201—229.
[6] Crawloy, P. & Dilworth, R. P., Algebraic theory of lattices, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1973).
[7] Amitsur, A., *Amer. J. Math.*, **74**(1952), 774—786.

MULTIPLICATIVE LATTICE WITH MAXIMAL CONDITION

XIE BINGZHANG
(*Hangzhou University*)

ABSTRACT

This paper defines multiplicative lattice. The conception of multiplicative lattice is abstracted from several lattices, which may be composed of ideals of the associative ring, ideals of the non-associative ring, or ideals of the both non-associative and non-distributive ring and which may be composed of normal subgroups of the group as well.

Definition 1. The multiplicative lattice L is a lattice with following conditions:

1. L is complemented and Dedekind's, the least upper bound of L equals 1 and the greatest lower bound of L equals 0.

2. The multiplication is closed and $ab \leqslant a \cap b$, where $a \cap b$ denotes the greatest lower bound of a and b.

3. $a(b+c) = ab+ac$, $(b+c) = ba+bc$, where $b+c$ denotes the least upper bound of b and c.

Suppose L is multiplicative lattice with maximal condition, the following theorems are proved:

Theorem 1. Every element a of L has normal (right) third decomposition, that means every element is the intersection of finite number of (right) third elements, whose (right) third roots are different from each other and if $a = T_1 \cap \cdots \cap T_m = T'_1 \cap \cdots \cap T'_n$ are two different normal (right) third decomposition of a, then $m = n$ and their third roots are equal correspondingly by rearranging properly

Theorem 2. If A is an element of L and has property that $c^2 \leqslant A \Rightarrow c \leqslant A$, then A is the intersection of finite number of prime elements.

Theorem 3. Every element of L has primary decomposition if and only if L

satisfies Artin-Rees condition.

Definition 2. u is called a solvable radical of the multiplicative lattice with maximal condition if u is the least upper bound of the subset of L whose every element x satisfies that there exists a group of positive integers $n_1, \cdots, n_r$ such that $X^{n_1, \cdots, n_r} = 0$.

Theorem 4. u is an intersection of finite number of prime elements.

Theorem 5. If L is semi-simple, i. e. $O = u = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$, and if $P_i + P_j = 1$ $(i \neq j)$ and $1 \cdot 1 = 1$, then 1 is the direct sum in $R_1, \cdots, R_n$, where

$$R_i = P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap P_{i+1} \cap \cdots \cap P_n.$$