数 学 年 刊
3 (6) 1982

具有间断系数非线性两点边值问题近似解法及误差估计

李 立 康
(复旦大学)

§1. 引 言

本文用差分法和伽辽金法找非线性两点边值问题

$$\begin{cases} -D(p(x)Du(x))+q(x)u(x)=f(x, u), \quad 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

的近似解及其 L^∞ 误差估计. $p(x)$有有限个第一类间断点,并满足条件

$$p(x)\geqslant p_0>0, \quad q(x)\geqslant 0, \quad \forall x\in I=[0, 1], \tag{1.2}$$

而$f(x, u)$满足: 1. 对 $H_0^1(I)$中的任一函数u, $f(x, u)\in L^2(I)$; 2. 存在常数 M, 使对任一$x\in I$成立$|f(x, u)-f(x, \tilde{u})|\leqslant M|u-\tilde{u}|$. 容易知道,只要 M 适当小(1.1)的弱解存在且唯一. §3 给出守恒型差分格式[3],并给出误差估计和差分方程的解法. 用伽辽金法讨论两点边值问题时,很多文章都是讨论$p(x)$为连续的情形[5,6]. 当发生间断时, 把间断点作为分割点[7]. 在[1, 4]中讨论间断点不取作分割点时$H^1(I)$和$L^2(I)$误差估计, 在[3]中讨论间断点取作分割点时 $L^\infty(I)$误差估计. 除[1]外, [3, 4]都是讨论线性情形. §4 和§5分别讨论近似解空间取为$P_m^0(I, \xi)$和$P_m^k(I, \xi)$($k\neq 0$)且间断点不取为分割点时用伽辽金法解(1.1)的$L^\infty(I)$误差估计. §5讨论线性的情形.

§2. 记 号

为叙述简便, 假定$p(x)$只有一个第一类间断点$\xi\in(0, 1)$. 记$J_1=[0, \xi]$, $J_2=[\xi, 1]$, $Q^{(k)}(I, \xi)=\{u|u\in C^{(k)}(J_1), u\in C^{(k)}(J_2)\}$. 而$H^m(I, \xi)$, $L^\infty(I, m, \xi)$和$L^2(I, m, \xi)$的定义见[4]. 设$0=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=1$. $I_i=[x_{i-1}, x_i]$. 用$P_m(I_i)$表示在I_i上不超过m次多项式全体. 记$P_m^0(I)=\{u|u\in C^0(I)\cap P_m(I_i), (i=1, \cdots, n+1), u(0)=u(1)=0\}$. 如果$\xi\in(x_{j_0-1}, x_{j_0})$, 则记$P_m^k(I)=\{u|u\in C^k(0, x_{j_0-1}), u\in C^k(x_{j_0}, 1)\}\cap P_m^0(I)$. 如果$\xi=x_{j_0-1}$, 则记$P_m^k(I)=\{u|u\in C^k(0, \xi), u\in C^k(\xi, 1)\}\cap P_m^0(I)$. 就用$P_m^k(I, \xi)$记上述三种情形之一. 下面用$c$和带足标的$c$表示常数, 同一个$c$可以表示不同常数. 记$\tilde{I}_m=(x_{j-1}, x_{j-1}+ch^{2m})\cup(x_j-ch^{2m}, x_j)$.

(1.1)的弱解确定如下: (1) $u\in H_0^1(I)$; (2) 记$(u, v)=\int_I uv\,dx$, 有

本文1980年9月1日收到.

$$(pDu,\ DU)+(qu,\ U)=(f,\ U),\quad \forall U\in H_0^1(I). \tag{2.1}$$

(1.1)的伽辽金近似解 y 确定如下：(1) $y\in P_m^k(I,\ \xi)$；(2) 成立

$$(pDy,\ DY)+(qy,\ Y)=(f,\ Y),\quad \forall Y\in P_m^k(I,\ \xi). \tag{2.2}$$

§3. 用差分法解(1.1)

讨论时，取 $h=h_i=(x_i-x_{i-1})$，$(i=1,\ \cdots,\ n+1)$. 利用[2]中的平衡法，对(1.1)提出如下的守恒型差分格式：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{h}\left[a_{i+1}\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-d_iy_i=-\varphi_i,\ i=1,\ \cdots,\ n,\\ y_0=y_{n+1}=0,\end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases}a_i=\left[\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{ds}{p(x_i+sh)}\right]^{-1},\quad d_i=\displaystyle\int_{-0.5}^{0.5}q(x_i+sh)ds,\\ \varphi_i=\displaystyle\int_{-0.5}^{0.5}f(x_i+sh,\ y_i)ds.\end{cases} \tag{3.2}$$

只要使用 $f(x,\ u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件以及[2]中提供的方法可以得到：

定理 3.1 设 $p\in Q^{(2)}(I,\ \xi)$ 和 $q\in Q^{(1)}(I,\ \xi)$ 满足(1.2). f 除满足§1中的条件外，还满足：(1) $1-\dfrac{M}{p_0}>0$；(2) $f(x,\ u)\in C^2(J_1\times(-\infty,\ \infty))\cap C^2(J_2\times(-\infty,\ \infty))$，那末成立

$$\max_{0<i<n+1}|y_i-u(x_i)|=O(h^2).$$

可用下列迭代格式求解差分方程(3.1)

$$\frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}^{(m+1)}-y_i^{(m+1)}}{h}-a_i\frac{y_i^{(m+1)}-y_{i-1}^{(m+1)}}{h}\right]-d_iy_i^{(m+1)}=-\int_{-0.5}^{0.5}f(x_i+sh,\ y_i^{(m)})ds.$$

上述格式用追赶法计算是非常有效的. 令 $\varepsilon_i^{(m+1)}=y_i^{(m+1)}-y_i^{(m)}$. 设 $G(x,\ \xi)$ 是 (3.1) 的 Green 函数[2]. 成立

$$\varepsilon_i^{(m+1)}=\left(G(x_i,\ \xi),\ \int_{-0.5}^{0.5}[f(\xi+sh,\ y_i^{(m)})-f(\xi+sh,\ y_{i-1}^{(m)})]ds\right),$$

这里 $(a,\ b)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_ih$. 由 Green 函数的性质和 f 满足的条件得到

$$\max_{0<i<n+1}|\varepsilon_i^{(m+1)}|\leqslant\frac{M}{p_0}\max_{0<i<n}|\varepsilon_i^{(m)}|,$$

从而迭代格式收敛.

§4. 用伽辽金法解(1.1)的 L^∞ 误差估计

这一节取(2.2)中的 $k=0$. 根据[1]成立

定理 4.1 如果(1.1)的解 $u\in H^{m+1}(I,\ \xi)$，$\xi\in\tilde{I}_m$，则成立

$$\|u-y\|_{L^2(I)}+h\|u'-y'\|_{L^2(I)}\leqslant ch^{m+1}\|u\|_{H^{m+1}(I,\xi)}.$$

记 $P_{m0}(0,\ h)=\{u\,|\,u\in P_m(0,\ h),\ u(0)=u(h)=0\}$.

引理 4.1 设 $p(x)\in L^\infty(0,\ h)$，$0<p_0\leqslant p(x)\leqslant p_1$，$V\in W^{m+1,\infty}(0,h)$，而 $Z\in P_m(0,h)$

由下面确定：(1) $Z(0)=V(0)$, $Z(h)=V(h)$；(2) 对任一 v 属于 $P_{m0}(0, h)$ 成立

$$\int_0^h p(x)(V-Z)'v'dx=0,$$

那末成立

$$\|V-Z\|_{L^\infty(0,h)}\leqslant ch^{m+1}\|V^{(m+1)}\|_{L^\infty(0,h)}. \tag{4.1}$$

证明见[6].

引理 4.2 设

$V\in C^0(0, h)\cap W^{m+1,\infty}(0, \xi)\cap W^{m+1,\infty}(\xi, h)$, $\xi\in(0, ch^{2(m+1)})\cap(h-ch^{2(m+1)}, h)$, p 和 Z 同引理 4.1. 那末成立

$$\|V-Z\|_{L^\infty(0,h)}\leqslant ch^{m+1}\sum_{l=1}^{m+1}(\|V^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|V^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,h)}). \tag{4.2}$$

证　设 $\xi\in(h-ch^{2(m+1)}, h)$. 成立

$$V(x)=V(\xi)+V'(\xi-0)(x-\xi)+\cdots+V^{(m)}(\xi-0)\frac{(x-\xi)^m}{m!}$$
$$+\frac{1}{m!}\int_\xi^x V^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt,\quad 0\leqslant x\leqslant\xi,$$
$$V(x)=V(\xi)+V'(\xi+0)(x-\xi)+\cdots+V^{(m)}(\xi+0)\frac{(x-\xi)^m}{m!}$$
$$+\frac{1}{m!}\int_\xi^x V^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt,\quad \xi\leqslant x\leqslant h.$$

定义在$[0, h]$上的函数

$$V_1(x)=V(\xi)+V'(\xi-0)(x-\xi)+\cdots+V^{(m)}(\xi-0)\frac{(x-\xi)^m}{m!}$$
$$+\frac{1}{m!}\int_\xi^x V^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt,\quad 0\leqslant x\leqslant h,$$

属于 $W^{m+1,\infty}(0, h)$. 设 $Z_1(x)$ 由 $V_1(x)$ 确定：(1) $Z_1(0)=V_1(0)$, $Z_1(h)=V_1(h)$；(2) 对任一 $v\in P_{m0}(0, h)$ 成立 $\int_0^h p(x)(V_1-Z_1)'v'dx=0$. 由引理 4.1 得到

$$\|V_1-Z_1\|_{L^\infty(0,h)}\leqslant ch^{m+1}\|V_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(0,h)}\leqslant ch^{m+1}\|V^{(m+1)}\|_{L^\infty(0,h)}. \tag{4.3}$$

另外，成立

$$\|V-V_1\|_{L^\infty(0,h)}\leqslant ch^{2(m+1)}\sum_{l=1}^{m}(\|V^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|V^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,h)}). \tag{4.4}$$

$V'-V_1'$ 在区间 $[0, h]$ 上的上界不超过 $c\sum_{l=1}^{m}(\|V^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|V^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,h)})$. 令 $a=V(h)-V_1(h)$, 有 $|a|\leqslant ch^{2(m+1)}\sum_{l=1}^{m}(\|V^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|V^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,1)})$. 函数 $W(x)=Z(x)-Z_1(x)-a\frac{x}{h}$ 满足 $W(0)=W(h)=0$, 所以由 $\int_0^h pW'W'dx=\int_0^h p\left(V-V_1-a\frac{x}{h}\right)'W'dx$ 得到

$$p_0\|W'\|^2_{L^2(0,h)}\leqslant p_1\left\|\left(V-V_1-a\frac{x}{h}\right)'\right\|_{L^\infty(0,h)}\|W'\|_{L^2(0,h)}.$$

消去公因子，再利用 Poincare 不等式得到

$$\|W\|_{H^1(0,h)}\leqslant ch^{(m+1)}\sum_{l=1}^{m}(\|V^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|V^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,h)}).$$

由上式利用嵌入定理导出

$$\|Z-Z_1\|_{L^\infty(0,h)}=\left\|W+a\frac{x}{h}\right\|_{L^\infty(0,h)}\leqslant ch^{m+1}\sum_{l=1}^{m}(\|V^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|V^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,h)}). \tag{4.5}$$

再由(4.3)—(4.5)得到(4.1). $\xi\in(0,\ ch^{2(m+1)})$的证明同上.

定理 4.2 设$p\in L^\infty(I,\ m,\ \xi)$, $q\in L^\infty(I,\ m-1,\ \xi)$, f满足§1中的条件, $\xi\in\tilde{I}_{m+1}$. 如果$u\in C^0(I)\cap W^{m+1,\infty}(0,\ \xi)\cap W^{m+1,\infty}(\xi,\ 1)$, 则

$$\max|u(x)-y(x)|\leqslant ch^{m+1}\sum_{l=0}^{m+1}(\|u^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|u^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,h)}). \tag{4.6}$$

证 设$V(x)\in P_m^0(I)$由$(p(V-u)',\ v')=0(\forall v\in P_m^0(I))$确定. 记$u_1=u-y$, $v_1=V-y$. 由(2.1)—(2.2)得到$(pv_1',\ v_1')=-(qu_1,\ v_1)+(f(x,\ u)-f(x,\ y),\ v_1)$. 由此式利用$f$满足 Lipschitz 条件得到

$$\|v_1\|_{L^\infty(I)}\leqslant C\|v_1\|_{H^1(I)}\leqslant ch^{m+1}\|u\|_{H^{m+1}(I,\xi)}. \tag{4.7}$$

根据[1]中的定理3.1成立

$$\max_{0<j<n+1}|V(x_j)-u(x_j)|\leqslant ch^{2m}\|u\|_{H^{m+1}(I,\xi)}. \tag{4.8}$$

设$Y\in P_m(I_j)$, 确定如下: (1) $Y(x_j)=u(x_j)$, $Y(x_{j+1})=u(x_{j+1})$; (2) 成立

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}}p(Y-u)'v'dx=0,\quad \forall v\in P_{m0}(I_{j+1}), \tag{4.9}$$

这里$P_{m0}(I_{j+1})=\{u|u\in P_m(I_{j+1}),\ u(x_j)=u(x_{j+1})=0\}$. 由引理4.1和引理4.2得到

$$\max_{x\in I_{j+1}}|Y-u|\leqslant ch^{m+1}\sum_{l=1}^{m+1}(\|u^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|u^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,1)}). \tag{4.10}$$

记$Z=Y-V$根据[3]的(3.27)有

$$\|Z\|_{L^\infty(I_{j+1})}\leqslant ch^{m+1}\|u\|_{H^{m+1}(I,\xi)}. \tag{4.11}$$

合并(4.7)、(4.10)和(4.11)得到(4.6).

§5. 线性问题的 L^∞ 误差估计

本节在(1.1)中的f不依赖u, 且$P_m^k(I)$中的$k\neq0$的情形下来估计$\|u-y\|_{L^\infty(I)}$. 记$h_i=x_i-x_{i-1}$, 假定对任意i, j成立$h_ih_j\leqslant C$. 根据[4]中方法成立

$$\|u-y\|_{L^2(I)}\leqslant ch\|u-y\|_{H^1(I)}\leqslant ch\inf_{p_m\in P_m^k(I)}\|u-p_m\|_{H^1(I)}.$$

只讨论$\xi\in(x_{j_0-1},\ x_{j_0})$的情形($\xi=x_{j_0-1}$的情形可类似讨论). 记

$$P_m^k(I,\ u)=\{v|v\in P_m^k(I),\ v(x_{j_0-1})=u(x_{j_0-1}),\ v(x_{j_0})=u(x_{j_0})\}.$$

显然$P_m^k(I,\ u)\subset P_m^k(I)$. 因而

$$\inf_{p_m\in P_m^k(I)}\|u-p_m\|_{H^1(I)}\leqslant\inf_{p_m\in P_m^k(I,u)}\|u-p_m\|_{H^1(I)}. \tag{5.1}$$

把$P_m^k(I,\ u)$中每一元素分别看作定义在$(0,\ x_{j_0-1})$, $(x_{j_0-1},\ x_{j_0})$, $(x_{j_0},\ 1)$上的函数所构成的集合依次记为$P_{m1}^k(I,\ u)$, $P_{m2}^k(I,\ u)$, $P_{m3}^k(I,\ u)$. 作方程

$$\begin{cases}-D(pDu_i)+qu_i=f, & a_i<x<b_i,\\ u_i(a_i)=u(a_i), & u_i(b_i)=u(b_i),\end{cases} \tag{5.2}$$

这里i取1, 2, 3, 且$a_1=0$, $b_1=a_2=x_{j_0-1}$, $b_2=a_3=x_{j_0}$, $b_3=1$. 显然u在相应的区域上分别与u_1, u_2, u_3相等. 用伽辽金法分别找(5.2)在$P_{mi}^k(I,\ u)$中的近似解($i=1,\ 2,\ 3$),

依次记为 $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ 和 $\tilde{y}_3$. 分别由[5]和利用[1]中定理 2.1 的证明方法得到

$$\|u_1-\tilde{y}_1\|_{L^2(0,x_{j_0-1})}+h\|u_1-\tilde{y}_1\|_{H^1(0,x_{j_0}-1)}\leqslant ch^{m+1}\|u_1\|_{H^{m+1}(0,x_{j_0-1})},\tag{5.3}$$

$$\|u_3-\tilde{y}_3\|_{L^2(x_{j_0},1)}+h\|u_3-\tilde{y}_3\|_{H^1(x_{j_0},1)}\leqslant ch^{m+1}\|u_3\|_{H^{m+1}(x_{j_0},1)},\tag{5.4}$$

$$\|u_2-\tilde{y}_2\|_{L^2(x_{j_0-1},x_{j_0})}+h\|u_2-\tilde{y}_2\|_{H^1(x_{j_0-1},x_{j_0})}\leqslant ch^{m+1}\|u_2\|_{H^{m+1}((x_{j_0-1},x_{j_0}),\xi)}.\tag{5.5}$$

作函数 $\tilde{y}(x)$, 由下式确定

$$\tilde{y}(x)=\tilde{y}_i(x),\quad x\in[a_i,\ b_i],\quad i=1,\ 2,\ 3.\tag{5.6}$$

显然 $\tilde{y}(x)\in P_m^k(I,\ u)$. 由(5.1)利用(5.3)—(5.6)得到

$$\|y-u\|_{H^1(I)}\leqslant ch^m\|u\|_{H^{m+1}(I,\xi)}.\tag{5.7}$$

记 $e(x)=u(x)-y(x)$. 利用类似[1]中的定理 3.1 的证法成立

$$\max(|e(x_{j_0-1})|,\ |e(x_{j_0})|)\leqslant ch^{2m}\|u\|_{H^{m+1}(I,\xi)}.\tag{5.8}$$

作方程

$$\begin{cases}-D(pD\tilde{\tilde{u}}_i)+q\tilde{\tilde{u}}_i=f,\\ \tilde{\tilde{u}}_i(a_i)=y(a_i),\quad \tilde{\tilde{u}}_i(b_i)=y(b_i).\end{cases}\quad i=1,\ 2,\ 3,\tag{5.9}$$

用伽辽金法分别找(5.9)在 $P_{mi}^k(I,\ y)\ (i=1,\ 2,\ 3)$ 中的近似解, 近似解依次记为 $\tilde{\tilde{y}}_1$, $\tilde{\tilde{y}}_2$ 和 $\tilde{\tilde{y}}_3$, 这里 $P_{mi}^k(I,\ y)$ 的定义同 $P_{mi}^k(I,\ u)$. 显然, y 在相应的区间内同 $\tilde{\tilde{y}}_1$, $\tilde{\tilde{y}}_2$ 和 $\tilde{\tilde{y}}_3$ 相等. 由[6]可知

$$\|\tilde{\tilde{y}}_1-\tilde{\tilde{u}}_1\|_{L^\infty(0,x_{j_0}-1)}\leqslant ch^{m+1}\|\tilde{\tilde{u}}_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(0,x_{j_0}-1)},\tag{5.10}$$

$$\|\tilde{\tilde{y}}_3-\tilde{\tilde{u}}_3\|_{L^\infty(x_{j_0},1)}\leqslant ch^{m+1}\|\tilde{\tilde{u}}_3^{(m+1)}\|_{L^\infty(x_{j_0},1)}.\tag{5.11}$$

利用 § 4 中的推导过程可以证明

$$\|\tilde{\tilde{y}}_2-\tilde{\tilde{u}}_2\|_{L^\infty(x_{j_0}-1,x_{j_0})}\leqslant ch^{m+1}\sum_{l=1}^{m+1}(\|\tilde{\tilde{u}}_2^{(l)}\|_{L^\infty(x_{j_0}-1,\xi)}+\|\tilde{\tilde{u}}_2^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,x_{j_0})}).\tag{5.12}$$

作函数 $\tilde{\tilde{u}}$, 由下式确定

$$\tilde{\tilde{u}}(x)=\tilde{\tilde{u}}_i(x),\quad x\in[a_i,\ b_i],\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

利用[1]中的引理 3.1, 引理 3.2 和本节的(5.8)得到

$$\|\tilde{\tilde{u}}-u\|_{L^\infty(I)}\leqslant ch^{2m}\|u\|_{H^{m+1}(I,\xi)}.\tag{5.13}$$

从(5.10)—(5.13)得到

$$\|y-u\|_{L^\infty(I)}\leqslant ch^{m+1}\sum_{l=0}^{m+1}(\|u^{(l)}\|_{L^\infty(0,\xi)}+\|u^{(l)}\|_{L^\infty(\xi,1)}).\tag{5.14}$$

定理 5.1　设 $p\in L^\infty(I,\ m,\ \xi)$, $q\in L^\infty(I,\ m-1,\ \xi)$, $f\in L^\infty(I,\ m-1,\ \xi)$, $\xi\in\tilde{I}_{m+1}$, $u\in C^0(I)\cap W^{m+1,\infty}(0,\ \xi)\cap W^{m+1,\infty}(\xi,\ 1)$, y 是(2.2)的解($k\neq0$), 则成立估计式(5.14).

注　条件 $h_ih_j\leqslant c$ 是为了得到(5.3), (5.4), (5.10)和(5.11)所必须的(见[6]). 定理 5.1 中对 p、q 和 f 的假设可以保证(1.1)的解能属于 $H^{m+1}(I,\ \xi)$.

参考文献

[1] 李立康,用伽辽金法解两点边值问题,高校计算数学学报, **3**:3(1981).

[2] Самарский., А. А., Введение в теорию разностных схем. «Наука», 1971.

[3] 李立康,二阶微分算子边值问题的 L^∞ 误差估计,复旦学报, **19**:2(1980).

[4] 李立康,用伽辽金法解边值问题的误差估计,高校计算数学学报, **1**:2(1979).

[5] Douglas. J. Jr., Dupont. T. Wahlbin. L. Optimal L_∞ error estimates for Galerkin approximation to solutions of two-point boundary value problems, *Math. Comp.*, **29**(1975), 475—483.

[6] Wheeler. M. F., An optimal L_∞ error estimates for Galerkin approximations to solutions of two-point boundary value problems, *SIAM. J. Numer. Anal.*, **10**(1973).

[7] Ciarlet. P. Schultz M. H. Varga R. S. Numerical methods of high accuracy for nonlinear boundary-value problem, Numer. *Math.*, **9**(1967), 394—430.

NUMERICAL METHODS AND ERROR ESTIMATES OF NONLINEAR TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DISCONTINOUS COEFFICIENTS

LI LIKANG

(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper we consider L^∞ error estimates for difference methods and Galerkin methods to solutions of nonlinear two-point boundary value problem

$$\begin{cases} -D(pDu)+qu=f(x, u), & 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases}$$

Where coefficient function $p(x)$ is piecewise continuous. Moreover, discontinuous points are not chosen to be a mesh points.