数 学 年 刊
3 (6) 1982

拟正规结构和非线性映象的不动点

赵 汉 宾
(中国科学技术大学研究生院)

近年来，对各种非线性映象特别是非扩张映象的不动点问题进行了大量的研究. 至今一个尚未解决的问题是：在 Banach 空间的非空弱紧致凸子集 E 上的非扩张自身映象是否具有不动点？1965 年，Kirk[1] 在集 E 具有正规结构的条件下对上述问题给出了肯定的回答. 1976 年 Bogin[2] 把 Kirk 的结果推广到了平均非扩张映象的情形. 作者在 [3, 4] 中对平均非扩张映象不动点的存在性做了进一步的探讨. 1976 年，Karlovitz[5,6] 曾在 l^2 空间中引入了一个新的等价范数，在此范数之下该空间不具有正规结构，但在此空间中上述不动点问题仍有肯定的回答.

本文引进了包括非扩张映象在内的一类非线性映象：具有渐近正规性质的映象(§1)和拟正规结构的概念(§2). 上述 Karlovitz 的例子是具有拟正规结构的. 在 §3 中给出了不动点的存在定理，在具有拟正规结构的条件下对上述问题做出了肯定的回答.

§1. 映象的渐近正规性质

设$(X, \|\ \|)$是 Banach 空间，E 是 X 的非空闭凸子集，T 是映 E 到自身的映象. E 中的序列 $\{x_n\}$ 称为映象 T 的渐近正则序列，若

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n+1}\|=0,$$

称映象 T 在 E 上具有渐近正规性质. 若对于 E 的任何 T-不变的非空有界闭凸子集 K，在 K 中存在映象 T 的渐近正则序列 $\{x_n\}$，使对任何 $y\in\overline{co}(\{x_n\})$ ($\{x_n\}$ 的闭凸包)有

$$\lim_{n\to\infty}\|y-x_n\|=\delta(\{x_n\})\ (\{x_n\}\text{ 的直径}),$$

这时 $\{x_n\}$ 称为映象 T 的渐近正规序列.

命题 1 设$(X, \|\ \|)$是 Banach 空间，E 是 X 的非空弱紧致凸子集，T 是映 E 到自身的广义非扩张映象，即

$$(GN)\qquad \|Tx-Ty\|\leqslant\max\left\{\|x-y\|,\ \frac{1}{2}(\|x-Ty\|+\|y-Tx\|),\ x,\ y\in E\right\},$$

则映象 T 在 E 上具有渐近正规性质.

证 根据 Smulian 定理和 Zorn 引理，在 E 的任何 T-不变非空闭凸子集中必存在极小的 T-不变非空闭凸子集. 因此，为证映象 T 在 E 上具有渐近正规性质，只须证明在 E 的任何极小的 T-不变非空闭凸子集中必存在渐近正规序列.

假若不然，存在 E 的极小的 T-不变非空闭凸子集 K，在 K 中的任何序列都不是渐

本文 1980 年 9 月 1 日收到，1982 年 2 月 23 日收到修改稿.

近正规的．设序列 $\{x_n\}$ 由如下的迭代程序确定:

$$\left.\begin{array}{l} x_0\in K,\quad x_{n+1}=\lambda Tx_n+(1-\lambda)x_n, \\ 0<\lambda<1,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

我们来证明 $\{x_n\}$ 是映象 T 的渐近正则序列．引入记号(n 和 k 为非负整数)

$$\alpha_{n,k}=\|x_n-x_{n+k}\|,\qquad \alpha_k=\limsup_{n\to\infty}\alpha_{n,k},$$

$$\beta_{n,k}=\|x_n-Tx_{n+k}\|,\qquad \beta_k=\limsup_{n\to\infty}\beta_{n,k},$$

$$\gamma_{n,k}=\|Tx_n-Tx_{n+k}\|,\quad \gamma_k=\limsup_{n\to\infty}\gamma_{n,k},$$

$$\omega_{n,k}=\|Tx_n-x_{n+k}\|,\qquad \omega_k=\limsup_{n\to\infty}\omega_{n,k}.$$

由条件(GN)和(1.1)容易推出:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0=\gamma_0=0,\quad \omega_0=\beta_0, \\ \alpha_{k+1}\leqslant(1-\lambda)\alpha_k+\lambda\beta_k,\quad \beta_k\leqslant(1-\lambda)\beta_{k+1}+\lambda\gamma_{k+1}, \\ \gamma_{k+1}\leqslant \max\left\{\alpha_{k+1},\ \dfrac{1}{2}(\beta_{k+1}+\omega_{k+1})\right\}, \\ \omega_{k+1}\leqslant(1-\lambda)\omega_k+\lambda\gamma_k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

取 $\varepsilon=\dfrac{\lambda}{2-\lambda}$．我们利用数学归纳法来建立:

$$\left.\begin{array}{r} (1+k\lambda\varepsilon)\alpha_{k+1}\leqslant(1+(k+1)\lambda\varepsilon-\varepsilon)\beta_k, \\ (1+k\lambda\varepsilon)\omega_{k+1}\leqslant(1+(k+1)\lambda\varepsilon-2\varepsilon)\beta_k, \\ (1+(k+1)\lambda\varepsilon)\gamma_{k+1}\leqslant(1+(k+1)\lambda\varepsilon-\varepsilon)\beta_{k+1}, \\ (1+(k+1)\lambda\varepsilon)\beta_k\leqslant(1+k\lambda\varepsilon)\beta_{k+1}, \\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

事实上，由(1.2)得

$$\alpha_1\leqslant\lambda\beta_0,\quad \omega_1\leqslant(1-\lambda)\beta_0,$$

$$\gamma_1\leqslant\max\left\{\alpha_1,\ \frac{1}{2}(\beta_1+\omega_1)\right\}\leqslant\max\left\{\lambda\beta_0,\ \frac{1}{2}(\beta_1+(1-\lambda)\beta_0)\right\},$$

$$\beta_0\leqslant(1-\lambda)\beta_1+\lambda\gamma_1\leqslant(1-\lambda)\beta_1+\lambda\max\left\{\lambda\beta_0,\ \frac{1}{2}(\beta_1+(1-\lambda)\beta_0)\right\}.$$

因此

$$\beta_0\leqslant\max\left\{\frac{1}{1+\lambda},\ \frac{2-\lambda}{2-\lambda+\lambda^2}\right\}\beta_1=\frac{1}{1+\lambda\varepsilon}\beta_1.$$

根据 ε 的取法，由上述诸不等式可知当 $k=0$ 时(1.3)成立．假设当 $k=l$ 时(1.3)成立．令 $k=l+1$．由归纳假设和(1.2)

$$\alpha_{k+1}\leqslant(1-\lambda)\alpha_k+\lambda\beta_k\leqslant\frac{(1-\lambda)(1+k\lambda\varepsilon-\varepsilon)}{1+(k-1)\lambda\varepsilon}\beta_{k-1}+\lambda\beta_k$$

$$\leqslant\left[\frac{(1-\lambda)(1+k\lambda\varepsilon-\varepsilon)}{1+k\lambda\varepsilon}+\lambda\right]\beta_k=\frac{1+(k+1)\lambda\varepsilon-\varepsilon}{1+k\lambda\varepsilon}\beta_k,$$

$$(1+k\lambda\varepsilon)\alpha_{k+1}\leqslant(1+(k+1)\lambda\varepsilon-\varepsilon)\beta_k.$$

类似地

$$(1+k\lambda\varepsilon)\omega_{k+1}\leqslant(1+(k+1)\lambda\varepsilon-2\varepsilon)\beta_k.$$

$$(1+k\lambda\varepsilon)\gamma_{k+1}\leqslant(1+k\lambda\varepsilon)\cdot\max\left\{\alpha_{k+1},\ \frac{1}{2}(\beta_{k+1}+\omega_{k+1})\right\}$$
$$\leqslant\max\left\{(1+(k+1)\lambda\varepsilon-\varepsilon)\beta_k,\ \frac{1}{2}((1+k\lambda\varepsilon)\beta_{k+1}+(1+(k+1)\lambda\varepsilon-2\varepsilon)\beta_k)\right\},\tag{1.4}$$
$$(1+k\lambda\varepsilon)\beta_k\leqslant(1-\lambda)(1+k\lambda\varepsilon)\beta_{k+1}+\lambda(1+k\lambda\varepsilon)\gamma_{k+1}.\tag{1.5}$$

由(1.4)和(1.5)经简单的计算得到

$$(1+(k+1)\lambda\varepsilon)\beta_k\leqslant(1+k\lambda\varepsilon)\beta_{k+1},$$
$$(1+(k+1)\lambda\varepsilon)\gamma_{k+1}\leqslant(1+(k+1)\lambda\varepsilon-\varepsilon)\beta_{k+1}.$$

因此当 $k=l+1$ 时(1.3)亦成立. 从而建立了(1.3).

由(1.3)的最后一个不等式得到

$$\beta_0\leqslant\frac{1}{1+(k+1)\lambda\varepsilon}\beta_{k+1},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

因 K 是有界的, 故 $\{\beta_{k+1}\}$ 有界. 上式中令 $k\to\infty$ 得 $\beta_0=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$. 并且 $\alpha_1=\lambda\beta_0=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_{n+1}\|=0$. 因此 $\{x_n\}$ 是映象 T 的渐近正则序列.

因为 $\{x_n\}$ 不是渐近正规的, 存在 $y_0\in\overline{co}(\{x_n\})$, 使

$$\gamma_0=\liminf_{n\to\infty}\|y_0-x_n\|<\delta(\{x_n\}).$$

不妨假定 $\gamma_0=\lim\limits_{n\to\infty}\|y_0-x_n\|$(否则取 $\{x_n\}$ 的子序列代替之). 以下仿照[3, 定理 4]的证明(做微小的改动, 详细过程从略)可推出矛盾: $\delta(K)\leqslant\gamma_0<\delta(\{x_n\})\leqslant\delta(K)$. 由此矛盾推出命题成立.

注　广义非扩张映象类包括了非扩张映象. Karlovitz[6] 曾证明了非扩张映象在弱紧凸集上具有渐近正规性质、关于各类映象渐近正则序列的存在性见于[7—10].

§2. 拟正规结构

设$(X,\|\ \ \|)$是 Banach 空间, E 是 X 的子集. 用 $\delta(E)$表示 E 的直径. 设 $x\in E$, 若对于任何 $y\in E$, $\|x-y\|<\delta(E)$, 则称 x 为 E 的非直径点. 若 $d_E(x)=\sup\limits_{y\in E}\|x-y\|<\delta(E)$, 则称 x 为集 E 的正规点, 凸集 E 称为具有正规结构, 若它的任何包含不止一点的有界凸子集 K 均有 K 的正规点. 上述概念均与空间 X 的范数有关. 当空间 X 中引进不同的范数时, 这些概念常冠以"相对于某范数"以示区别.

引理 1　设 E 是 Banach 空间$(X,\|\ \ \|)$的凸子集. 若 $x\in E$ 是集 E 的非直径点(或正规点), 则对任意 $y\in E$ 和 $t\in(0,1]$, $z=tx+(1-t)y$ 也是集 E 的非直径点(或正规点).

这个引理可直接由非直径点或正规点的定义推出, 证明从略.

引理 2(Wong, C. S.[13])　Banach 空间中任何包含不止一点的可分弱紧致凸子集均含有非直径点.

用 X^* 表示 Banach 空间$(X,\|\ \ \|)$的共轭空间. 对于任何有限集 F, 用$|F|$表示集

F的元素个数. 设$\Omega\subseteq X^*$, $x\in X$, p为正数且n为正整数. 我们引入如下的记号

$$|x|_{\Omega_p(n)}=\sup\{(\sum_{f\in F}|f(x)|^p)^{1/p}:\ F\subseteq\Omega,\ |F|\leqslant n\},$$

$$|x|_{\Omega_\infty}=\sup\{|f(x)|:\ f\in\Omega\}.$$

设E是Banach空间$(X,\|\ \ \|)$中的凸子集.

(I) 称集E具有第一型拟正规结构,若在X上存在范数$\|\!|\ \ \|\!|$, 它满足如下条件:

(i) 集E相对于范数$\|\!|\ \ \|\!|$具有正规结构.

(ii) 存在集$\Omega\subseteq X^*$和正数$p\geqslant1$, 使

$$|x|_{\Omega_p(2)}\leqslant\|\!|x\|\!|\leqslant\|x\|,\quad x\in E.$$

(iii) 记$E_0=\{x\in E:\ \|\!|x\|\!|<\|x\|\}$. 存在$\theta\in(0,1]$使

$$2^{\frac{1}{p}}|x|_{\Omega_\infty}\geqslant\theta\|x\|+(1+\theta)\|\!|x\|\!|,\quad x\in E_0.$$

(II) 称集E具有第二型拟正规结构, 若在X上存在范数$\|\!|\ \ \|\!|$, 它满足如下条件:

(i) 集E相对于范数$\|\!|\ \ \|\!|$具有正规结构.

(ii) 存在集$\Omega\subseteq X^*$和正数$p\geqslant1$, 使

$$|x|_{\Omega_p(4)}\leqslant\|\!|x\|\!|\leqslant\|x\|,\quad x\in E.$$

(iii) 存在常数α, $1\leqslant\alpha<4^{\frac{1}{p}}$, 使

$$\|x\|=\max\{\|\!|x\|\!|,\ \alpha|x|_{\Omega_\infty}\},\quad x\in E.$$

(iv) 对Ω的任意可数子集ω

$$\sup\{\sum_{f\in\omega}|f(x)|^p:\ x\in E\}<+\infty,$$

称集E具有拟正规结构,若它具有第一型或第二型拟正规结构.

下面的命题和例子表明拟正规结构是正规结构概念的真正拓广.

命题2 设$(X,\|\ \ \|)$是Banach空间, E是X的凸子集且相对于范数$\|\ \ \|$具有正规结构,则E必具有第一型和第二型拟正规结构.

设 只须取$\|\!|\ \ \|\!|=\|\ \ \|$, $p=1$, $\{f_j:\ j=1,2,\cdots\}=\Omega$, 其中$\|f_j\|\leqslant2^{-j}$, 则(I)和(II)中诸条件皆满足. 因此, E具有第一型和第二型拟正规结构.

例 在空间$(l^p,\|\ \ \|_p)$ $(p\geqslant1)$中引进新范数$\|\ \ \|_{p,\alpha}$ $(\alpha\geqslant1)$:

$$\|x\|_{p,\alpha}=\max\{\|x\|_p,\ \alpha\|x\|_\infty\},\quad x\in l^p$$

令$J_{p,\alpha}=(l^p,\|\ \ \|_{p,\alpha})$. 容易验证:

(1) 当$p>1$且$\alpha=2^{\frac{1}{p}}$时,空间$J_{p,\alpha}$具有第一型拟正规结构;

(2) 当$p>1$且$\alpha<4^{\frac{1}{p}}$时,空间$J_{p,\alpha}$具有第二型拟正规结构.

(3) 当$p\geqslant1$且$\alpha\geqslant2^{\frac{1}{p}}$时,空间$J_{p,\alpha}$不具有正规结构.

§3. 不动点定理

这一节将给出本文的主要结果和它的一些推论和应用.

定理1 设$(X,\|\ \ \|)$是Banach空间, E是X的非空弱紧致凸子集且具有拟正规

结构．设 T 是映 E 到自身的映象，则为使映象 T 在 E 上具有不动点性质，即对 E 的任何 T–不变非空闭凸子集 K，T 在 K 中存在不动点，必要且只要映象 T 在 E 上具有渐近正规性质．

证　设映象 T 在 E 上具有不动点性质，K 是 E 的 T–不变非空闭凸子集，则在 K 中存在映象 T 的不动点 x．对任意正整数 n，令 $x_n=x$．显然定常序列 $\{x_n\}$ 是映象 T 的渐近正规序列．因此，映象 T 在 E 上具有渐近正规性质．

现设映象 T 在 E 上具有渐近正规性质，K 是 E 的 T–不变非空闭凸子集，则在 K 中存在映象 T 的渐近正规序列 $\{x_n\}$，即有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n+1}\|=0, \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|y-x_n\|=\delta(\{x_n\}),\quad y\in\overline{co}(\{x_n\}). \tag{3.2}$$

令 $\widetilde{K}=\overline{co}(\{x_n\})$ 且假设 $\widetilde{K}$ 中包含不止一点．

设范数 $\|\ \ \|$ 和集合 $\Omega\subseteq X^*$ 满足第一型或第二型拟正规结构定义中所要求的条件．分别用 $\delta(\widetilde{K})$ 和 $d(\widetilde{K})$ 表示集 $\widetilde{K}$ 在范数 $\|\ \ \|$ 和 $\|\ \ \|$ 之下的直径．因 $\widetilde{K}$ 中包含不止一点且 $\|x\|\leqslant\|x\|$，所以 $\delta(\widetilde{K})\geqslant d(\widetilde{K})>0$．由于集 E 相对于范数 $\|\ \ \|$ 具有正规结构，因此在 $\widetilde{K}$ 中存在相对于范数 $\|\ \ \|$ 的正规点 y_1．设 z_1 是 $\{x_n\}$ 的一个弱聚点，$z_1\in\widetilde{K}$．因 $\widetilde{K}$ 是可分弱紧致凸子集，根据引理 2(§ 2)，$\widetilde{K}$ 中存在相对于范数 $\|\ \ \|$ 的非直径点 z_2．取充分小的正数 λ，令

$$y_0=\begin{cases}\lambda y_1+(1-\lambda)z_1, & \text{当 } E \text{ 具有第一型拟正规结构时},\\ \dfrac{1}{2}(y_1+z_2), & \text{当 } E \text{ 具有第二型拟正规结构时}.\end{cases}$$

根据引理 1(§ 2)，y_0 也是集 $\widetilde{K}$ 关于范数 $\|\ \ \|$ 的正规点．因此

$$\gamma_0=\limsup_{n\to\infty}\|y_0-x_n\|<d(\widetilde{K})\leqslant\delta(\widetilde{K}). \tag{3.3}$$

设 ε 是充分小的正数．根据(3.1)，(3.2)和(3.3)．存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时

$$\|x_n-x_{n+1}\|\leqslant\varepsilon,\ \|y_0-x_n\|\geqslant\delta(\widetilde{K})-\varepsilon,\ \|y_0-x_n\|\leqslant\gamma_0+\varepsilon. \tag{3.4}$$

下面分别按集 E 具有第一型或第二型拟正规结构两种情形讨论．

(1) 设集 E 具有第一型拟正规结构．这时，令 $\alpha=2^{\frac{1}{p}}$．取

$$0<\lambda\leqslant\frac{\theta}{\alpha},\quad 0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}(\delta(\widetilde{K})-\gamma_0).$$

根据(3.4)，当 $n\geqslant N$ 时 $\|y_0-x_n\|-\|y_0-x_n\|\geqslant\delta(\widetilde{K})-\gamma_0-2\varepsilon\geqslant2\varepsilon$．因此，由条件(I)之款(iii)得

$$\alpha|y_0-x_n|_{\Omega_\infty}\geqslant\theta\|y_0-x_n\|+(1-\theta)\|y_0-x_n\|\geqslant\|y_0-x_n\|+2\theta\varepsilon,\quad n\geqslant N. \tag{3.5}$$

令

$$\Omega_n=\{g\in\Omega:\ \alpha|g(y_0-x_n)|\geqslant\|y_0-x_n\|+\theta\varepsilon\}.$$

由(3.5)知当 $n\geqslant N$ 时 Ω_n 非空．当有 $g_1,\ g_2\in\Omega_n,\ g_1\neq g_2$，则

$$\begin{aligned}|y_0-x_n|_{\Omega_p(2)}&\geqslant(|g_1(y_0-x_n)|^p+|g_2(y_0-x_n)|^p)^{1/p}\geqslant\left(\frac{2}{\alpha^p}\right)^{1/p}(\|y_0-x_n\|+\theta\varepsilon)\\&=\|y_0-x_n\|+\theta\varepsilon>\|y_0-x_n\|,\end{aligned}$$

这与条件(I)之款(ii)相矛盾．因此，当 $n\geqslant N$ 时 Ω_n 中仅含一个元素．记 $\Omega_n=\{g_n\}$．根据

(3.5)和 Ω_n 的定义

$$\alpha|g_n(y_0-x_n)|\geqslant\|y_0-x_n\|+2\theta\varepsilon,\quad n\geqslant N.\tag{3.6}$$

因 $\|x_n-x_{n+1}\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|$，由(3.1)知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_{n+1}\|=0$. 存在正整数 $N_1\geqslant N$, 当 $n\geqslant N_1$ 时 $\|x_n-x_{n+1}\|\leqslant\dfrac{\theta\varepsilon}{\alpha+1}$. 由此和(3.6)，当 $n\geqslant N_1$ 时

$$\begin{aligned}\alpha|g_{n+1}(y_0-x_n)|&\geqslant\alpha|g_{n+1}(y_0-x_{n+1})|-\alpha|g_{n+1}(x_n-x_{n+1})|\\&\geqslant\|y_0-x_{n+1}\|+2\theta\varepsilon-\alpha\|x_n-x_{n+1}\|\\&\geqslant\|y_0-x_n\|+2\theta\varepsilon-(\alpha+1)\|x_k-x_{n+1}\|\\&\geqslant\|y_0-x_n\|+\theta\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明 $g_{n+1}\in\Omega_n$. 但 Ω_n 中仅含一个元素 g_n, 因此 $g_n=g_{n+1}$. 由此推出当 $n\geqslant N_1$ 时 $g_n\equiv g_{N_1}$. 令 $g=g_{N_1}$. 按照 Ω_n 的定义和(3.5)的第一式有

$$\alpha|g(y_0-x_n)|\geqslant\theta\|y_0-x_n\|-(1-\theta)\|y_0-x_n\|,\quad n\geqslant N_1.\tag{3.7}$$

注意到 $y_0=\lambda y_1+(1-\lambda)z_1$, 其中 z_1 是 $\{x_n\}$ 的弱聚点, $0<\lambda\leqslant\dfrac{\theta}{\alpha}$, y_1 是 $\widetilde{K}$ 的相对于范数 $\|\ \|$ 的正规点. 因此

$$\|y_0-z_1\|=\lambda\|y_1-z_1\|<\lambda d(\widetilde{K})\leqslant\frac{\theta}{\alpha}\delta(\widetilde{K}).\tag{3.8}$$

另一方面, $\{x_n\}$ 有弱收敛到 z_1 的子序列 $\{x_{n_k}\}$. 根据条件(I)之(ii), (3.7)和(3.2)

$$\begin{aligned}\|y_0-z_1\|\geqslant|g(y_0-z_1)|&=\lim_{k\to\infty}|g(y_0-x_{n_k})|\\&\geqslant\frac{\theta}{\alpha}\lim_{k\to\infty}\|y_0-x_{n_k}\|+\frac{1-\theta}{\alpha}\liminf_{k\to\infty}\|y_0-x_{n_k}\|\\&\geqslant\frac{\theta}{\alpha}\delta(\{x_n\})=\frac{\theta}{\alpha}\delta(\widetilde{K}).\end{aligned}$$

这与(3.8)相矛盾.

(2) 设集 E 具有第二型拟正规结构. 这时 $1<\alpha<4^{\frac{1}{p}}$. 令 $\beta=4^{\frac{1}{p}}$ 且取 ε 满足

$$0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{4}(\delta(\widetilde{K})-\gamma_0),\ \frac{(\beta-\alpha)\delta(\widetilde{K})}{4\beta}\right\}.$$

由(3.4)推出当 $n\geqslant N$ 时 $\|y_0-x_n\|-\|y_0-x_n\|\geqslant2\varepsilon>0$. 根据条件(II)之(ii)

$$\alpha|y_0-x_n|_{\Omega}=\|y-x_n\|,\quad n\geqslant N.\tag{3.9}$$

以下设 $n\geqslant N$ 且令

$$\Omega_n=\{f\in\Omega:\ \alpha|f(y_0-x_n)|\geqslant\|y_0-x_n\|-2\|x_n-x_{n+1}\|\}.$$

我们依次建立如下的四个论断:

1° $|\Omega_n|\leqslant3$ 且存在 $f_n\in\Omega_n$ 使

$$\alpha|f_n(y-x_n)|=\|y_0-x_n\|.\tag{3.10}$$

若有某个 $n\geqslant N$, 使 $|\Omega_n|\geqslant4$. 取 $\omega_n\subseteq\Omega_n$, $|\omega_n|=4$, 则根据款(II)—(ii)和 Ω_n 的定义

$$\begin{aligned}\|y_0-x_n\|\geqslant|y_0-x_n|_{\Omega_p(4)}&\geqslant\Big(\sum_{f\in\omega_n}|f(y_0-x_n)|^p\Big)^{1/p}\\&\geqslant\frac{\beta}{\alpha}(\|y_0-x_n\|-2\|x_n-x_{n+1}\|).\end{aligned}$$

注意到(3.4)和 $\varepsilon<\dfrac{(\beta-\alpha)\delta(\widetilde{K})}{4\beta}$, 由上式得到

$$\|y_0-x_n\|\geqslant\frac{\beta}{\alpha}(\delta(\widetilde{K})-4\varepsilon)>\delta(\widetilde{K}),$$

这是不可能的. 因此对一切 $n\geqslant N_1$, $|\Omega_n|\leqslant3$. 若对某个 $n\geqslant N$, Ω_n 中不存在使(3.10)成立的 f_n. 根据(3.9), 集合

$$\Omega_n(\varepsilon)=\{f\in\Omega:\ \alpha|f(y_0-x_n)|\geqslant\|y_0-x_n\|-\varepsilon\}$$

是无穷集合. 由(3.4)和 ε 的取法知 $\|y_0-x_n\|-\varepsilon\geqslant\delta(\widetilde{K})-2\varepsilon>0$. 取 $\Omega_n(\varepsilon)$中的可数子集 ω, 则有 $\sum\limits_{f\in\omega}|f(y_0-x_n)|^p=+\infty$, 这与条件(II)之(iv)相矛盾.

2° 对任何 $f\in\Omega$, 集合 $\{n:\ f\in\Omega_n\}$ 是有限集. 因若不然, 有某个 $f\in\Omega$ 和正整数列 $\{n_k\}$, $N\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 使 $f\in\Omega_{n_k}$. 设 x_* 是 $\{x_{n_k}\}$ 的弱聚点, 则

$$\|y_0-x_*\|\geqslant\alpha|f(y_0-x_*)|\geqslant\liminf_{k\to\infty}(\alpha|f(y_0-x_{n_k})|)$$
$$\geqslant\liminf_{k\to\infty}\|y_0-x_{n_k}\|-2\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\|=\delta(\widetilde{K}).$$

因此 $\|y_0-x_*\|=\delta(\widetilde{K})$, y_0 是 $\widetilde{K}$ 的直径点. 但根据 y_0 的定义和引理1(§2), y_0 是 $\widetilde{K}$ 的非直径点. 所产生的矛盾表明款 2° 成立.

3° 集合 $\{n:\ |\Omega_n|\geqslant2\}$ 是无穷集. 若不然, 存在 $N_1\geqslant N$, 使当 $n\geqslant N_1$ 时 $|\Omega_n|=1$. 因此, 满足条件(3.10)的 f_n 是 Ω_n 中仅有的元素. 于是,

$$|f_{n+1}(y_0-x_n)|\geqslant|f_{n+1}(y_0-x_{n+1})|-|f_{n+1}(x_n-x_{n+1})|$$
$$\geqslant\|y_0-x_{n+1}\|-\|x_n-x_{n+1}\|\geqslant\|y_0-x_n\|-2\|x_n-x_{n+1}\|,$$

这表明 $f_{n+1}\in\Omega_n$, $f_n=f_{n+1}$. 由此推出当 $n\geqslant N_1$ 时 $f_n=f_{N_1}$, 即 $f_{N_1}\in\Omega_n$ 这与款 2° 相矛盾.

4° 存在无穷子序列 $\{n_k\}$, $N\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 使 $|\Omega_{n_k}|\geqslant2$ 且当 $k\neq l$ 时 $\Omega_{n_k}\cap\Omega_{n_l}=\emptyset$. 由款 1° 知, 每个 Ω_n 是有限集, 再由款 2° 和款 3° 不难归纳地选出满足款 4° 要求的子序列 $\{\Omega_{n_k}\}$.

设 $\{\Omega_{n_k}\}$ 满足款 4°. 令

$$\omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_{n_k},\quad \omega_k=\bigcup_{j=1}^{k}\Omega_{n_j},\quad k=1,\ 2,\ \cdots.$$

根据款 1° 和款 4°, ω 是无穷可数集且 $|\omega_k|\geqslant2k$. 由条件(II)之(iv)知

$$M=\sup\{(\sum_{f\in\omega}|f(x)|^p)^{1/p}:\ x\in\widetilde{K}\}<+\infty.$$

根据 Minkowski 不等式

$$\sup\{(\sum_{f\in\omega}|f(x-y)|^p)^{1/p}:\ x,\ y\in\widetilde{K}\}\leqslant2M. \tag{3.11}$$

取正整数 m, 使 $(m+1)\varepsilon>2M$. 令

$a_k=\max\{|f(y_0-x_{n_j})|:\ 1\leqslant j\leqslant m+1,\ f\in\Omega_{n_k}\}$, $k=1,\ 2,\ \cdots$ 由 (3.11), $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$.

因此存在某个 $l\geqslant m+2$, 使 $a_l<\varepsilon$. 根据 m 的取法和(3.11), 集合 $\widetilde{\omega}=\{f\in\omega_{m+1}:\ |f(y_0-x_{n_i})|\geqslant\varepsilon\}$ 的元素个数 $|\widetilde{\omega}|\leqslant m$. 因此 $|\omega_{m+1}\backslash\widetilde{\omega}|=|\omega_{m+1}|-|\widetilde{\omega}|\geqslant m+2$. 由 ω_{m+1} 的定义知, 至少有某一个 i, $i\leqslant m+1$, 使 $\Omega_{n_i}\cap(\omega_m\backslash\widetilde{\omega})$ 中包含不少于两个元素. 取 g_1, $g_2\in\Omega_{n_i}\cap(\omega_m\backslash\widetilde{\omega})$, $g_1\neq g_2$; 取 g_3, $g_4\in\Omega_{n_l}$, $g_3\neq g_4$. 注意到 $\Omega_{n_i}\cap\Omega_{n_l}=\emptyset$, 因此

$$\|x_{n_i}-x_{n_l}\|\geqslant|x_{n_i}-x_{n_l}|_{\Omega_p(4)}\geqslant\left(\sum_{j=1}^{4}|g_j(x_{n_i}-x_{n_l})|^p\right)^{1/p}$$
$$\geqslant\left[\sum_{j=1}^{2}(|g_j(y_0-x_{n_i})|-|g_j(y_0-x_{n_l})|)^p+\sum_{j=3}^{4}(|g_j(y_0-x_{n_l})|-|g_j(y_0-x_{n_i})|)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$>\frac{\beta}{\alpha}(\delta(\widetilde{K})-4\varepsilon)>\delta(\widetilde{K}),$$

这与$\|x_{n_i}-x_{n_l}\|\leqslant\delta(\widetilde{K})$相矛盾.

由上可知,若 $\widetilde{K}$ 中不止一点,则必与集 E 具有拟正规结构相矛盾. 因此 $\widetilde{K}$ 中仅含一点 x. 对任意 n, $x_n\equiv x$. 因 $\{x_n\}$ 是渐近正则的, 故 $x=Tx$, x 是映象 T 在 K 中的不动点. 从而证明了映象 T 在 E 上具有不动点性质. 定理全部证完.

利用定理 1 和命题 1 可立即得到

定理 2 设$(X,\|\ \ \|)$是 Banach 空间, E 是 X 中的非空弱紧致凸子集且具有拟正规结构. 设 T 是映 E 到自身的广义非扩张映象(见 § 1), 则映象 T 在 E 中存在不动点.

特别地, 当 T 是 E 的非扩张自身映象时, T 在 E 中存在不动点.

推论 设 E 是空间 $J_{p,\alpha}$ $(p>1,\ 0<\alpha<4^{\frac{1}{p}})$ 的非空有界闭凸子集. T 是映 E 到自身的广义非扩张映象, 则 T 在 E 中存在不动点.

证　因$(l^p,\|\ \ \|_p)$ $(p>1)$ 是自反 Banach 空间, $J_{p,\alpha}$(见 § 2)是在 l^p 中引进与 $\|\ \ \|_p$ 等价的范数 $\|\ \ \|_{p,\alpha}$ 而得到. 因此 $J_{p,\alpha}$ 也是自反的, E 是弱紧致的, 又因 $J_{p,\alpha}$ 具有拟正规结构. 由定理 2 推出映象 T 在 E 中具有不动点.

注 1　因为拟正规结构是正规结构的真正拓广. 因此, 定理 1 和定理 2 是 Kirk 定理[1] 和 Bogin 定理[2] 的实质性推广.

注 2　Karlovitz[5,6] 曾对于空间 $J_{2,\sqrt{2}}$ 和非扩张映象证明了推论. 注意到 $J_{2,\sqrt{2}}$ 具有第一型拟正规结构. 将定理 1 的有关第一型拟正规结构部分的证明与 Karlovitz 的复杂证明相比,要简明得多.

将定理 2 应用于一些已知的结论上, 还可以得到更进一步的结果, 例如, 将定理 2 应用于 Bruck 定理[14, 定理 1]可得

定理 3 设$(X,\|\ \ \|)$是具有拟正规结构的 Banach 空间, E 是 X 的弱紧致非空凸子集. $\mathscr{T}$ 是 E 上的非扩张自身映象的可交换族, 则映象族 $\mathscr{T}$ 在 E 中具有公共不动点且它的公共不动点集 $F(\mathscr{T})$ 是 E 的非空非扩张收缩.

应用定理 2 于 Caristi 定理[15, 定理 2, 4]可得

定理 4 设$(X,\|\ \ \|)$是具有拟正规结构的 Banach 空间, E 是 X 的非空弱紧致凸子集. T 是映 E 到 X 中的 Lipshitz 映象和伪压缩映象, 即对任意 $t>0$ 和 $x,\ y\in E$ 有

$$\|x-y\|\leqslant\|(1+t)(x-y)-t(Tx-Ty)\|. \tag{3.12}$$

再设映象 T 是弱内向的, 即对任意 $x\in E$, Tx 属于 $I_E(x)=\{x+t(u-x):\ u\in E,\ t\geqslant 1\}$的闭包, 则映象 T 在 E 中具有不动点.

应用定理 2 到 Kirk-Schöneberg 定理[11, 定理 1]可得

定理 5 设$(X,\|\ \ \|)$是具有拟正规结构的自反 Banach 空间, E 是 X 的具有非空内部的有界闭子集. 设 T 是映 E 到 X 的连续伪压缩映象(满足(3.12)). 再设存在点 $z\in E$, 对于 E 的边界 ∂E 的一切 x, $\|z-Tz\|<\|x-Tx\|$, 则映象 T 在 E 中存在不动点.

参 考 文 献

[1] Kirk, W. A., A fixed point theorem for mappings which do not increases distances, *Amer. Math. Monthly*, **72** (1965), 1004—1006.

[2] Bogin, J., A generalization of a fixed point theorem of Goebel, *Kirk and Shimi*, *Canad. Math. Bull.*, **19** (1976), 7—12.

[3] 赵汉宾, Banach 空间中的平均非扩张映象, 数学学报, **22** (1979), 459—470.

[4] 赵汉宾, 非线性映象的不动点的迭代逼近, 科学通报, **25** (1980), 484—488.

[5] Karlovitz, L. A., Existance of fixed points of non-expansive mappings in a space without normal structure, *Pacific J. Math.*, **66** (1976), 153—159.

[6] Karlovitz, L. A., Some fixed point results for nonexpansive mappings, in Fixed Point Theory and Its Applications, Academic Press, New York, 1976, 91—103.

[7] Ishikawa, S., Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **59** (1976), 65—71.

[8] Petryshyn, W. V. and Williamson, Jr. T. E., Strong and weak conuergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **43** (1973), 459—497.

[9] Singh, K. L., Generalized contractions and sequence of iterates, in Nonlinear Equations in Abstract spaces, Academic Press, New York, 1978, 439—462.

[10] Browder, F. E. and Petryshyn, W. V., Construction of fixed point of nonlinear mappings in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **20** (1967), 197—228.

[11] Kirk, W. A. and Schöneberg, R., Some results on pseudo-contractive mappings, *Pacific J. Math.*, **71** (1977), 89—100.

[12] Browder, E. F., Nonlinear Operators and Non linear Equations of Evolution in Banach Spaces, *Proc. Symp. Pure Math.*, **18**, Part II, (1976).

[13] Wong, C. S., Close-to-normal structure and its applications, *J. Functional Analysis*, **16** (1974), 353—358.

[14] Bruck, Jr. R. E., A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings, *Pacific J. Math.*, **53** (1974), 59—71.

[15] Caristi, J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241—251.

QUASI-NORMAL STRUCTURE AND FIXED POINTS OF NONLINEAR MAPPINGS

ZHAO HANBIN
(*Graduate School, University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

Let $(X, \| \ \|)$ be a Banach space. For $\Omega\subseteq X^*$ and $x\in X$ we introduce the following notations ($p\geqslant 1$ and $n\in\mathbf{N}$)

$$|X|_{\Omega_p(n)}=\sup\{(\sum_{f\in F}|f(x)|^p)^{1/p}\colon F\subseteq\Omega,\ |F|\leqslant n\},$$

$$|X|_{\Omega_\infty}=\sup\{|f(x)|\colon f\in\Omega\}.$$

A convex subset E of X is said to have guasi-normal structure whenever there exists a norm $|\!|\!| \ |\!|\!|$ on X which satisfies the following conditions:

(i) E has normal structure relative to the norm $|\!|\!| \ |\!|\!|$.

(ii) There exist $\Omega\subseteq X^*$, $p\geqslant 1$ and $\theta\in(0, 1]$ such that

$$|x|_{\Omega_p(2)}\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|\leqslant\|x\| \quad for \quad x\in E \quad \text{and} \quad |\!|\!|x|\!|\!|<\|x\|$$

$$\text{implies } 2^{1/p}|x|_{\Omega_\infty}\geqslant\theta\|x\|+(1-\theta)|\!|\!|x|\!|\!|.$$

or (ii)′ There exist $\Omega\subseteq X^*$, $p\geqslant 1$ and $\alpha\in[1, 4^{1/p})$ such that for all $x\in E$, $|x|_{\Omega_p(4)}\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|$, $\|x\|=\max\{|\!|\!|x|\!|\!|, \alpha|x|_{\Omega_\infty}\}$ and for any countable subset ω of Ω

$$\sup\{\sum_{\delta\in\omega}|f(x)|^p\colon x\in E\}<+\infty.$$

We notice that a set with normal steucture must have quasi-normal structure and there exist sets without normal structure which quasi-normal structure.

The main result of the present paper is as follows:

Theorem. Let $(X, \| \ \|)$ be a Banach space, E a weak compact convex nonempty subset of X with quasi-normal structure. Let T be a mapping of E in to itself. If there exists a sequence $\{x_n\}$ in any T-invariant convex subset of E such that

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n+1}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\|y-x_n\|=\delta(\overline{co}\{x_n\}),\quad \text{for } y\in\overline{co}(\{x_n\}),$$

then the mapping T has a fixed point in E.

In particular, if the mapping T satisfies

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\max\left\{\|x-y\|,\ \frac{1}{2}(\|x-Ty\|+\|y-Tx\|)\right\},\quad \text{for } x,\ y\in E,$$

then the mapping T has a fixed point in E.